BLAISE PASCAL
PT 2024-2025

Fiche résumé 19 – Thermodynamique

Conduction thermique

- **Modes de transfert thermique :** conduction + convection + rayonnement.
  $\rightsquigarrow$ en pratique, la convection l'emporte largement dès qu'elle est possible.

I - Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

- **Équilibre thermodynamique local :** éq thermo atteint à l'échelle mésoscopique mais pas à l'échelle macroscopique.
  $\rightsquigarrow$ les grandeurs intensives sont des champs qui dépendent de l'espace (et du temps).
- **Flux thermique échangé au travers d'une surface** = puissance thermique (Φ est algébrique)

$$\mathcal{P}_{\text{th}} = \Phi = \iint_{\mathcal{S}} \vec{j}_{\text{th}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \qquad \vec{j}_{\text{th}} = \begin{cases} \text{vecteur densité de flux thermique} \\ \text{vecteur densité de courant thermique} \end{cases}$$

- **Loi de Fourier :** λ = conductivité thermique en $\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$.

$$\boxed{\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \, \overrightarrow{\text{grad}}\, T} \qquad \text{(conduction uniquement)}$$

- **À une interface :** il y a toujours continuité du flux thermique, mais la température n'est continue que dans le cas du contact thermique parfait.
- **Loi de Newton :** à une interface entre un solide et un fluide,

$$\mathcal{P}_{\text{flu}\to\text{sol}} = \Phi_{\text{flu}\to\text{sol}} = hS(T_{\text{flu}} - T_{\text{sol}}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{j} = h(T_{\text{flu}} - T_{\text{sol}})\vec{n}_{\text{flu}\to\text{sol}}\,.$$

h = coefficient conducto-convectif (phénoménologique).

II - Régime stationnaire : résistances thermiques

- **Conservation du flux :** en régime stationnaire et sans source thermique, pour un système en géométrie cartésienne, le flux thermique est uniforme, c'est-à-dire identique au travers de toute section quelle que soit son abscisse (il existe des résultats analogues en cylindriques et sphériques).
- **Profil de température en régime stationnaire :**
  ❶ Relier le flux thermique Φ à la dérivée de la température grâce à la loi de Fourier ;
  ❷ Intégrer la relation obtenue par séparation des variables entre une extrémité et une position quelconque, la conservation du flux permettant de sortir Φ de l'intégrale ;
  ❸ Remplacer la constante impliquant Φ et λ à l'aide de la deuxième condition aux limites.
- **Analogie entre conduction thermique et conduction électrique :**

$$\begin{array}{ccc} \vec{j}_{\text{élec}} = -\gamma\, \overrightarrow{\text{grad}}\, V & \longleftrightarrow & \vec{j}_{\text{th}} = -\lambda\, \overrightarrow{\text{grad}}\, T \\ U = \Delta V = R\, I & \longleftrightarrow & \Delta T = R_{\text{th}}\, \Phi \end{array}$$

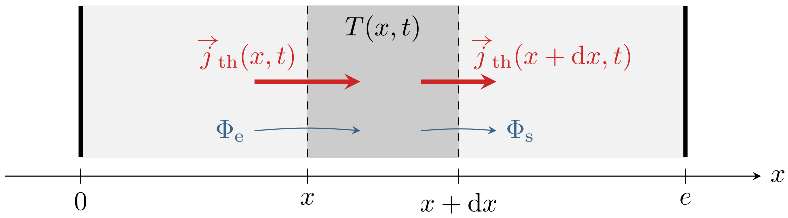
- **Méthode de calcul d'une résistance thermique :**
  ❶ Relier le flux thermique Φ à la dérivée de la température grâce à la loi de Fourier ;
  ❷ Intégrer la relation obtenue entre les deux extrémités du milieu par séparation des variables ;
  ❸ Conclure en vérifiant la convention récepteur : $T_1 - T_2 = R_{\text{th}}\, \Phi_{1\to 2}$.

Paroi plane (épaisseur e et section S) : $\boxed{R_{\text{th}} = \dfrac{e}{\lambda S}}$ (dépend de la géométrie et pas seulement du matériau)

- **Associations de résistances thermiques :**
  ▷ en série : matériaux superposés (p.ex. laine de verre sous un toit) ;
  ▷ en parallèle : matériaux juxtaposés, c'est-à-dire installés côte à côte (p.ex. fenêtre dans un mur).

III - Régime variable : diffusion thermique

- **Équation de diffusion de la chaleur :** raisonnement sur une tranche mésoscopique de cylindre



Bilan d'enthalpie :

$$\mathrm{d}H \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} \Phi_\mathrm{e}\,\mathrm{d}t - \Phi_\mathrm{s}\,\mathrm{d}t = j_x(x,t)\,S\,\mathrm{d}t - j_x(x+\mathrm{d}x,t)\,S\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial j_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,S\,\mathrm{d}t$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} \underbrace{\rho\,S\,\mathrm{d}x}_{\text{masse}}\,c\Big[T(x,t+\mathrm{d}t) - T(x,t)\Big] = \rho\,S\,\mathrm{d}x\,c\,\frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}t$$

Loi de Fourier et conclusion :

$$\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c\frac{\partial T}{\partial t} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad \text{avec} \qquad D = \frac{\lambda}{\rho c} \quad \text{diffusivité en } \mathrm{m^2\cdot s^{-1}}}$$

Généralisation en 3d :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D\,\Delta T} \qquad (\Delta = \text{opérateur laplacien scalaire.})$$

- **Diffusivité vs. résistance thermique :**

▷ La résistance thermique quantifie la facilité des transferts thermiques au travers d'un système, et tient compte non seulement du matériau mais aussi de la géométrie.
▷ La diffusivité thermique compare les propriétés de conduction et de stockage thermique. Elle est intrinsèque à un matériau, et indépendante d'un système en particulier.

- **Résolution numérique à 1d :** méthode des différences finies adaptée du schéma d'Euler explicite.

▷ *Expression du laplacien :* se retrouve par développement limité puis somme de $T(x_j \pm \Delta x, t_i)$.
▷ *Évolution temporelle :* application du schéma d'Euler explicite à la dérivée temporelle pour obtenir la relation de récurrence, qui fait intervenir le laplacien.
▷ *Implémentation en Python :* utiliser une liste de listes dont le premier indice fait référence au temps, c'est-à-dire `T[i][j]` est un flottant qui donne $T(x_j, t_i)$, `T[i]` est une liste qui donne la température à l'instant t_i pour toutes les valeurs de x.

- **Temps de diffusion :** durée τ du régime transitoire.

▷ *Paramètres :* τ dépend de la diffusivité D et de la taille caractéristique ℓ du matériau (+ on pourait aussi imaginer inclure l'écart de température ΔT ... qui en fait n'intervient pas).
▷ *Recherche par analyse dimensionnelle :* on cherche $\tau = k\,D^\alpha\,\ell^\beta$ avec α et β deux exposants tels que la relation soit homogène et k une constante sans dimension de l'ordre de 1, ce qui conduit à $\tau = \ell^2/D$.

- **Longueur de diffusion :** distance ℓ sur laquelle avance le front de diffusion au bout d'une durée Δt.

▷ *Paramètres :* ℓ dépend de la diffusivité D et de la durée Δt (+ on pourait aussi imaginer inclure l'écart de température ΔT ... qui en fait n'intervient pas).
▷ *Recherche par analyse dimensionnelle :* on cherche $\ell = k'\,D^{\alpha'}\,\Delta t^{\beta'}$ avec α' et β' deux exposants tels que la relation soit homogène et k' une constante sans dimension proche de 1, ce qui conduit à $\ell = \sqrt{D\,\Delta t}$.

Attention ! Ne pas confondre phénomène diffusif et phénomène ondulatoire !

▷ Équation de d'Alembert : $\vec{\Delta}\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$
  ⇝ dérivée temporelle seconde au lieu de dérivée première dans l'équation de diffusion.

▷ Avancée d'une onde pendant une durée Δt : $\ell = c\,\Delta t$
  ⇝ une onde se propage à la célérité c, qui n'a pas de sens pour un phénomène diffusif : il faut plus longtemps pour diffuser sur « le deuxième centimètre » que sur « le premier ».