



# Conduction thermique

## Plan du cours

<b>I Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique</b>	<b>3</b>
I.A Équilibre thermodynamique local . . . . .	3
I.B Vecteur densité de flux ou de courant thermique. . . . .	3
I.C Densité de flux thermique dans un solide homogène : loi de Fourier. . . . .	4
I.D Densité de flux thermique à une interface : continuité du flux et loi de Newton . . . . .	5
<b>II Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques</b>	<b>6</b>
II.A Uniformité du flux au travers du système. . . . .	6
II.B Profil de température en régime stationnaire. . . . .	7
II.C Analogies entre conduction électrique et conduction thermique . . . . .	9
II.D Calcul des résistances thermiques . . . . .	10
II.E Association de résistances thermiques. . . . .	12
<b>III Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique</b>	<b>14</b>
III.A Équation de diffusion à une dimension cartésienne . . . . .	14
III.B Équation de diffusion à trois dimensions . . . . .	19
III.C Résolution numérique de l'équation de diffusion unidimensionnelle . . . . .	20
III.D Temps et distance caractéristiques de diffusion. . . . .	22

## Au programme

Extrait du programme officiel : partie 1 « Thermodynamique et mécanique des fluides », bloc 7 « Transfert d'énergie par conduction thermique à une dimension cartésienne ».

Cette partie aborde l'étude de la conduction thermique dans les solides à l'aide de bilans infinitésimaux. On se limite à l'étude de problèmes unidimensionnels à une dimension en coordonnées cartésiennes.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Vecteur densité de flux thermique.	Définir et algébriser le flux thermique échangé à travers une interface.
Loi de Fourier.	Lier la non-uniformité de la température à l'existence d'un flux thermique et interpréter son sens.  Utiliser la loi de Fourier.  Citer des ordres de grandeur de conductivité thermique dans le domaine de l'habitat.
Bilan d'énergie.	Établir l'équation différentielle entre la température et le vecteur densité de flux thermique.
Équation de la diffusion thermique sans terme source.	Établir l'équation de la diffusion thermique.  Interpréter qualitativement l'irréversibilité du phénomène.  Relier le temps et la longueur caractéristiques d'un phénomène de diffusion au coefficient de diffusion thermique par une analyse dimensionnelle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
	Capacité numérique : résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires.
Analogie électrique dans le cas du régime stationnaire.	Définir la résistance thermique. Exploiter l'analogie lors d'un bilan thermique.
Loi de Newton.	Exploiter la loi de Newton fournie pour prendre en compte les échanges conducto-convectifs.

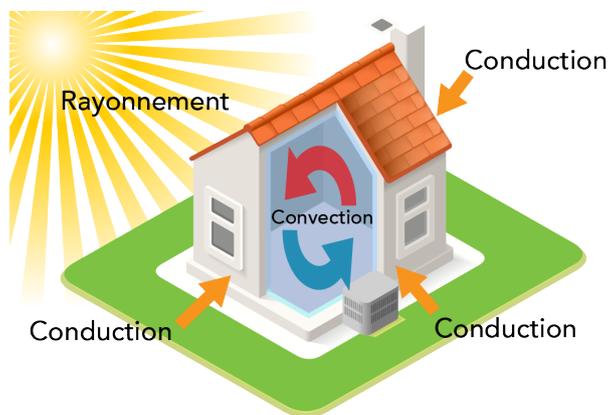
En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

## Ces cinq dernières années au concours

- ▷ Écrit : épreuves B 2021, épreuve A 2022 et 2023, épreuve d'informatique 2024.
- ▷ Oral : très souvent, c'est LE chapitre pour lequel mon stock d'exercices est le plus fourni ☺

L'objectif de ce chapitre est de décrire les transferts thermiques par une approche mésoscopique. Cela permettra notamment de calculer la température dans des systèmes où elle n'est pas uniforme.

**Rappel** : on distingue trois modes de transfert thermique.



- ▷ **Conduction** au sein d'un solide ou d'un liquide immobile : les molécules du solide, globalement fixes, se communiquent de l'énergie de proche en proche par collisions.
- ▷ **Convection** au sein d'un fluide en mouvement : le fluide se déplace au niveau macroscopique, reçoit de l'énergie dans les zones chaudes et en cède aux zones froides.
- ▷ **Rayonnement** électromagnétique : un corps chaud brille, c'est-à-dire qu'il envoie de l'énergie sous forme d'ondes électromagnétiques, qui est absorbée par les autres corps.

***Remarque** : Dans le cas du rayonnement, le transfert a lieu dans les deux sens (la Terre rayonne elle aussi de l'énergie vers le Soleil), mais globalement le corps le plus chaud cède plus d'énergie que le corps le plus froid.*

En règle générale, les trois modes de transfert thermique coexistent mais ils n'ont pas tous la même importance. En particulier, la convection est généralement prédominante sur les autres modes dès qu'elle est possible.

↪ restriction à la conduction de thermique, c'est-à-dire sans mouvement de matière au sein du système, ce qui de fait exclut quasiment les fluides de l'étude.

## I - Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

### I.A - Équilibre thermodynamique local

#### • Un exemple pour comprendre

À l'échelle macroscopique, les grandeurs d'état intensives ne sont pas forcément homogènes : penser à la température d'une pièce en hiver, il fait plus chaud près du radiateur que près d'une fenêtre. Ainsi, le système « air de la pièce » est hors équilibre à l'échelle macroscopique, et ses variables d'état intensives ne sont pas définies à cette échelle.

Par contre, des thermomètres placés à différents endroits de la pièce n'auront pas de mal à indiquer une température. Ainsi, si l'on isole par la pensée une petite zone (mésoscopique) autour du thermomètre, il est tout à fait possible de définir sa température, et toutes ses autres variables d'état intensives.

↪ ce volume mésoscopique est dans un état d'équilibre thermodynamique.

#### • Formalisation



On appelle **état d'équilibre thermodynamique local** un état du système dans lequel l'équilibre est atteint à l'échelle mésoscopique mais pas à l'échelle macroscopique.

Les grandeurs d'état intensives sont alors décrites non plus à l'échelle macroscopique du système complet, mais par des champs dépendant du point considéré.

**Exemples :** champ de pression, champ de température, mais aussi pourquoi pas champ d'enthalpie molaire, d'entropie molaire, etc.

**Intérêt :** appliquer les principes de la thermodynamique à l'échelle mésoscopique en considérant le travail et la chaleur échangés par des systèmes mésoscopiques voisins.

↪ dans toute la suite, on suppose l'équilibre thermodynamique local.

### I.B - Vecteur densité de flux ou de courant thermique

On sait intuitivement que les transferts thermiques se font « du chaud vers le froid », et ont donc une direction.

↪ raisonnable de la traduire à l'échelle mésoscopique par un vecteur  $\vec{j}_{th}$ , dont la norme est d'autant plus grande que le transfert thermique est important.



On appelle **vecteur densité de flux thermique** ou **densité de courant thermique**  $\vec{j}_{th}$  le vecteur dont le flux au travers d'une surface orientée  $\mathcal{S}$  est égal à la puissance thermique qui la traverse.

$$\mathcal{P}_{th} = \Phi = \iint_{\mathcal{S}} \vec{j}_{th} \cdot \vec{dS}.$$

Le vecteur densité de flux thermique s'exprime en  $W \cdot m^{-2}$ .

(R!)

L'orientation de  $\mathcal{S}$  (en pratique le sens de  $\vec{dS}$ ) indique dans quel sens le flux est algébrisé.

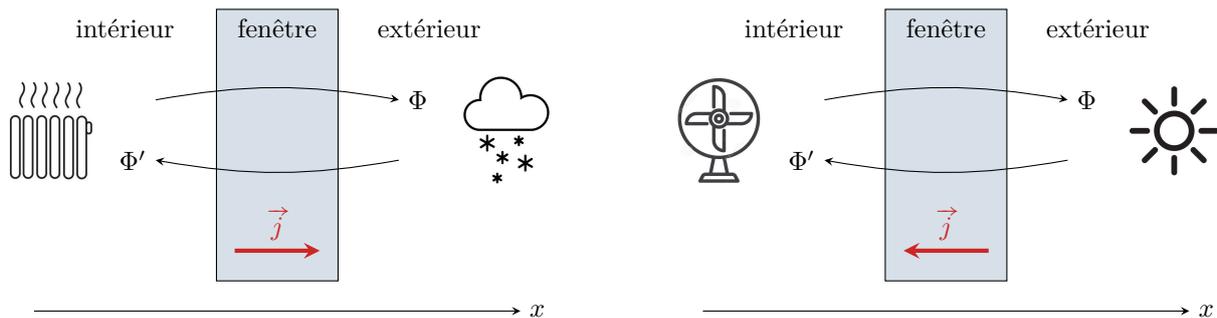
#### Vocabulaire et notations :

- ▷ on utilise indifféremment le vocabulaire « puissance thermique » (notée  $\mathcal{P}_{th}$ ) ou « flux thermique » (noté  $\Phi$ ), dont on rappelle qu'il s'agit d'une grandeur algébrique ;
- ▷ le vocabulaire « densité de courant thermique » vient de l'analogie avec le vecteur « densité de courant électrique », cf. cours d'électromagnétisme ;
- ▷ notations alternatives :  $\vec{j}_{th}$  est parfois noté  $\vec{j}_Q$  ou simplement  $\vec{j}$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

**Remarque :** Le vecteur densité de flux thermique contient a priori les contributions de chaque mode de transfert thermique,

$$\vec{j}_{th} = \vec{j}_{conduction} + \vec{j}_{convection} + \vec{j}_{rayonnement}.$$

**Illustration :** Faire dessiner  $\vec{j}$  qualitativement



En hiver :  $\Phi > 0$ ,  $\Phi' = -\Phi < 0$  et  $\vec{j} = j_x \vec{e}_x$  avec  $j_x > 0$  ;

En été :  $\Phi < 0$ ,  $\Phi' = -\Phi > 0$  et  $\vec{j} = j_x \vec{e}_x$  avec  $j_x < 0$  (une composante est algébrique).

Espace 1

## I.C - Densité de flux thermique dans un solide homogène : loi de Fourier



La loi de Fourier est une loi phénoménologique, proposée par Joseph Fourier en 1807. Pour aboutir à cette loi à une époque où les notions d'énergie et de température n'étaient pas encore clairement formalisées, Fourier s'est inspiré d'une analogie mécanique : de même qu'un torrent s'écoule vers les altitudes les plus basses, « la chaleur s'écoule vers les températures les plus basses ».

### Loi de Fourier :

Le vecteur densité de flux thermique par conduction est opposé au gradient de température,

$$\vec{j}_{\text{cond}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T,$$

où  $\lambda$  est une caractéristique du matériau appelée **conductivité thermique**, exprimée en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

### Analyse qualitative :

▷ Sens :

$\overrightarrow{\text{grad}} T$  dirigé dans la direction où la température augmente le plus, il est donc logique que  $\vec{j}$  soit de sens opposé.

Espace 2

▷ Norme :

plus les variations spatiales de température sont grands, pour le gradient sera élevé, plus les transferts thermiques seront intenses : cohérent.

Espace 3

**Ordres de grandeur :** retenir  $\lambda \sim 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  pour un bon conducteur thermique et  $\lambda \sim 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  pour un isolant.

Matériau	Conductivité $\lambda$ ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ )	Diffusivité $D$ ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ )
Cuivre	$4 \cdot 10^2$	$1 \cdot 10^{-4}$
Zinc	$1 \cdot 10^2$	$4 \cdot 10^{-5}$
Béton	1	$5 \cdot 10^{-7}$
Verre	0,9	$5 \cdot 10^{-7}$
Humus	0,5	$1 \cdot 10^{-7}$
Laine de verre	$5 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-7}$
Polystyrène expansé	$4 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-6}$
Eau (*)	0,6	$1 \cdot 10^{-7}$
Air (*)	$3 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-5}$

(\*) La conductivité thermique décrit uniquement les transferts thermiques par conduction, qui sont très souvent dominés par la convection dans les fluides. Ces valeurs sont donc à utiliser avec précaution, uniquement dans le cas où il n'y a pas de mouvement au sein du fluide.

Les conductivités thermiques dépendent faiblement de la température : à notre niveau, cette dépendance sera presque toujours considérée comme négligeable.

## I.D - Densité de flux thermique à une interface : continuité du flux et loi de Newton

Les échanges thermiques au sein d'un matériau sont pilotés par les conditions aux limites imposées aux interfaces entre ledit matériau et son environnement.

### • Quelles sont les grandeurs continues ?

Température ?

non : penser p.ex. à un radiateur qui est chaud, et donc pas à la même température que la pièce.

Espace 4

Flux thermique ?

oui : pas d'accumulation d'énergie à l'interface, tout l'énergie qui arrive d'un côté doit ressortir de l'autre.

Espace 5



La température n'est pas nécessairement continue à une interface, mais le flux et le vecteur densité de flux sont toujours continus.

Lorsque la température est continue, les deux milieux sont dits **en contact thermique parfait**.

### • Interface solide-fluide : loi de Newton

Considérons le cas où un fluide de température  $T_{\text{flu}}$  qui circule autour d'un solide de température  $T_{\text{sol}} \neq T_{\text{flu}}$ . Comme le fluide est en mouvement, les deux phénomènes de conduction et convection contribuent aux échanges d'énergie : ces échanges sont qualifiés de **conducto-convectif**.

***Remarque :** À cause de sa viscosité, la vitesse du fluide est nulle au contact du solide, c'est donc la conduction qui est majoritaire au niveau du contact, et son importance décroît rapidement avec la distance. Utiliser la loi de Newton revient à négliger l'épaisseur de cette couche limite conducto-convective devant les autres dimensions caractéristiques du système.*

R

**Loi de Newton :**

Le flux thermique reçu par le solide de la part du fluide est proportionnel à l'écart de température entre eux et à la surface d'échange,

$$\mathcal{P}_{\text{flu} \rightarrow \text{sol}} = \Phi_{\text{flu} \rightarrow \text{sol}} = hS(T_{\text{flu}} - T_{\text{sol}}).$$

À l'échelle mésoscopique, cela se traduit par une densité de courant thermique

$$\vec{j} = h(T_{\text{flu}} - T_{\text{sol}})\vec{n}_{\text{flu} \rightarrow \text{sol}}.$$

Le coefficient  $h$  est appelé **coefficient d'échange** ou **coefficient conducto-convectif**. Il s'agit d'un coefficient phénoménologique qui s'exprime en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ .

**Ordres de grandeur :** la valeur de  $h$  dépend de beaucoup de paramètres, en premier lieu la vitesse du fluide (cf. notion de température ressentie), mais aussi de l'état de surface du solide.

- ▷ avec la seule convection naturelle,  $h \sim 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$  dans un gaz et  $h \sim 500 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$  dans un liquide ;
- ▷ si la convection est forcée (solide en mouvement ou écoulement imposé, par exemple par un ventilateur), il faut typiquement multiplier ces valeurs par 10 ;
- ▷ si le fluide change d'état au contact du solide (dans les échangeurs d'une machine thermique) les valeurs peuvent atteindre  $10^5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ .

Officiellement cette loi doit toujours être fournie par un énoncé. Le seul risque est de se tromper sur le signe de la différence de température : pour s'en assurer il suffit de contrôler que les échanges d'énergie se font du chaud vers le froid.

- **Paroi calorifugée**

Par définition, il n'y a pas de transfert thermique au travers d'une paroi calorifugée. Ainsi en tout point de la paroi, le flux thermique au travers de la paroi est nul.

↪ on en déduit que  $\vec{j}$  doit être tangent à la paroi ... mais pas forcément nul : il peut y avoir un transfert thermique le long de la paroi.

## II - Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

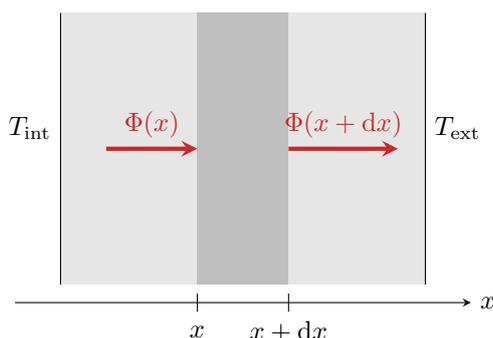
On suppose dans ce paragraphe que le régime stationnaire est atteint : la température en tout point du système considéré est indépendante du temps. Les résultats établis ici sont généralisables au cas des **régimes lentement variables** ou **régimes quasi-stationnaires** (ARQS thermique), qui se définissent en comparant le temps caractéristique de variation des conditions aux limites au temps caractéristique de diffusion qui sera défini dans la dernière partie du cours.

### II.A - Uniformité du flux au travers du système

Considérons une plaque plane d'épaisseur  $e$  et de section  $S$ , et supposons la situation à une dimension cartésienne :  $T = T(x)$ . On oriente tous les flux orientés dans le sens des  $x$  croissants, c'est-à-dire que l'on pose

$$\Phi(x) = \iint_S \vec{j}_{\text{th}}(x) \cdot \underbrace{dS \vec{e}_x}$$

Procédons à un bilan d'enthalpie infinitésimal pour la tranche mésoscopique comprise entre  $x$  et  $x + dx$ .



$$\begin{aligned} dH &= \overset{\uparrow \text{1er P}}{\Phi(x)} dt - \overset{\uparrow \text{RP}}{\Phi(x+dx)} dt = 0 \text{ donc } \Phi(x+dx) = \Phi(x) \text{ et avec} \\ \text{un DL } \frac{d\Phi}{dx} &= 0 \end{aligned}$$

Espace 6.

R



À une dimension cartésienne et en régime stationnaire, le flux thermique est le même au travers de toute section du système, indépendamment de l'abscisse  $x$  de la section considérée.

On dit que le flux thermique est **conservatif**.

Des formulations analogues existent en géométrie cylindrique et sphérique, à établir et utiliser au cas par cas.

► **Pour approfondir** : On retrouve un résultat analogue à la conservation du débit volumique au travers d'une conduite en mécanique des fluides, ou de manière plus dissimulée à l'uniformité du courant électrique dans un fil en électromagnétisme. Ceci n'est pas un hasard, et vient des analogies formelles entre ces différents domaines de la physique. ■

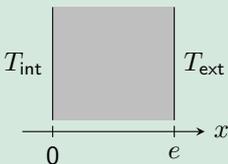
## II.B - Profil de température en régime stationnaire

Méthode :

- ❶ Relier le flux thermique  $\Phi$  à la dérivée de la température grâce à la loi de Fourier ;
- ❷ Intégrer la relation obtenue par séparation des variables entre une extrémité et une position quelconque, la conservation du flux permettant de sortir  $\Phi$  de l'intégrale ;
- ❸ Remplacer la constante impliquant  $\Phi$  et  $\lambda$  à l'aide de la deuxième condition aux limites.

### • Exemple en géométrie unidimensionnelle cartésienne

#### Application 1 : Profil de température dans un mur, approche par la conservation du flux



On considère le mur de maison d'épaisseur  $e$  et de section  $S$  schématisé ci-contre, supposé en régime stationnaire. On suppose que la température au sein du mur ne dépend que de l'abscisse  $x$ .

Déterminer le profil de température à l'intérieur du mur, en supposant un contact thermique parfait avec l'air environnant.

(M!)

Expression du flux puis intégration :

$$\phi = j_x S = -\lambda S \frac{dT}{dx} \quad \text{d'où} \quad -\frac{\phi}{\lambda S} \int_0^x dx = \int_{T_{\text{int}}}^{T(x)} dT$$

et ainsi

$$T(x) = T_{\text{int}} - \frac{\phi}{\lambda S} x$$

Attention à ne pas croire qu'on a fini ! Le flux est constant mais inconnu, il faut utiliser l'autre condition limite pour éliminer  $\phi$  :

$$T(e) \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{CL}}}{=} T_{\text{ext}} \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{expr}}}{=} T_{\text{int}} - \frac{\phi}{\lambda S} e \quad \text{d'où} \quad \frac{\phi}{\lambda S} = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{e} \quad \text{et} \quad \boxed{T(x) = T_{\text{int}} - \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{e} x}$$

Espace 7



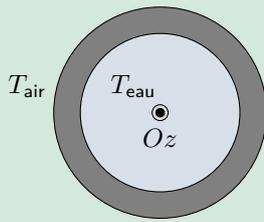
En régime stationnaire à une dimension cartésienne, la température au sein du système varie de manière linéaire.



- Exemple en géométrie unidimensionnelle cylindrique (hors programme ... mais qui tombe même à l'écrit)

### Application 2 : Profil de température dans une conduite en régime stationnaire

M



On s'intéresse à un tuyau de chauffage en cuivre de longueur totale  $L$ , de rayon intérieur  $R_1$  et extérieur  $R_2$ . Déterminer l'expression de  $T(r)$  en supposant la continuité de la température en  $R_1$  et  $R_2$ .

Flux au travers d'un cylindre de rayon  $R_1 < r < R_2$

$$\phi = -\lambda \frac{dT}{dr} \times 2\pi r L \quad \text{d'où} \quad -\frac{\phi}{2\pi\lambda L} \int_{R_1}^r \frac{dr}{r} = \int_{T_{\text{eau}}}^{T(r)} dT$$

et ainsi

$$T(r) = T_{\text{eau}} - \frac{\phi}{2\pi\lambda L} \ln \frac{r}{R_1}$$

Attention ! Le flux est constant, mais inconnu : il faut utiliser l'autre CL

$$T(r=R_2) \underset{\text{CL}}{=} T_{\text{air}} \underset{\text{expr}}{=} T_{\text{eau}} - \frac{\phi}{2\pi\lambda L} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

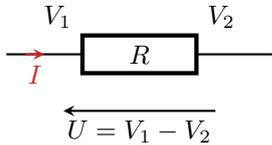
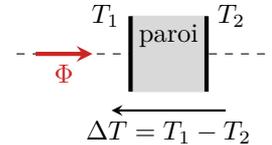
d'où

$$\frac{\phi}{2\pi\lambda L} = -\frac{T_{\text{air}} - T_{\text{eau}}}{\ln(R_2/R_1)}$$

et enfin

$$T(r) = T_{\text{eau}} + \frac{T_{\text{air}} - T_{\text{eau}}}{\ln(R_2/R_1)} \ln \frac{r}{R_1}$$

## II.C - Analogies entre conduction électrique et conduction thermique

Conduction électrique	Conduction thermique
Loi d'Ohm locale (mésoscopique) $\vec{j}_{\text{elec}} = \gamma \vec{E} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V$	Loi de Fourier $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$
Intensité électrique $I = \iint_S \vec{j}_{\text{elec}} \cdot d\vec{S}$	Flux thermique $\Phi = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot d\vec{S}$
« Loi des nœuds » dans un fil $I_e = I_s = I$	Conservation du flux à 1d $\Phi_e = \Phi_s = \Phi$
Tension = différence de potentiel $U = \Delta V = V_1 - V_2$	Différence de température $\Delta T = T_1 - T_2$
Loi d'Ohm (macroscopique) $U = RI$ (convention récepteur) 	Loi d'Ohm thermique $\Delta T = R_{\text{th}} \Phi$ (convention récepteur) 

En régime stationnaire ou quasi-stationnaire, le flux thermique  $\Phi$  au travers d'un système et l'écart de température  $\Delta T$  entre ses extrémités sont proportionnels,

$$\Delta T = R_{\text{th}} \Phi = \frac{1}{G_{\text{th}}} \Phi \quad \Leftrightarrow \quad \Phi = G_{\text{th}} \Delta T = \frac{1}{R_{\text{th}}} \Delta T$$

La **résistance thermique**  $R_{\text{th}}$  s'exprime en  $\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$ , la **conductance thermique**  $G_{\text{th}}$  en  $\text{W} \cdot \text{K}^{-1}$ . Elles sont toujours positives.

**Attention !** Le flux et la différence de température doivent être orientés en convention récepteur. Pour ne pas se tromper, on pourra retenir

$$T_1 - T_2 = R_{\text{th}} \Phi_{1 \rightarrow 2}.$$

**Remarque :** La résistance thermique n'est définie qu'en régime (quasi-)stationnaire, sinon  $\Phi$  n'est pas uniforme dans la paroi et la définition n'a plus de sens.

**Interprétation :** À différence de température fixée, le flux thermique (donc les transferts thermiques) sont d'autant plus grands que  $R_{\text{th}}$  est faible.

- ▷ paroi diatherme :  $R_{\text{th}}$  faible,  $G_{\text{th}}$  élevée
- ▷ paroi calorifugée :  $R_{\text{th}}$  infinie

### Schémas électriques équivalents :

▷ une paroi entre deux milieux (mur, fenêtre, etc.) : une résistance

▷ une température : une flèche de potentiel, c'est-à-dire jusqu'à « la masse »

▷ un écart de température fixé : un générateur de tension

▷ une puissance thermique fixée (radiateur, etc.) : un générateur de courant

## II.D - Calcul des résistances thermiques

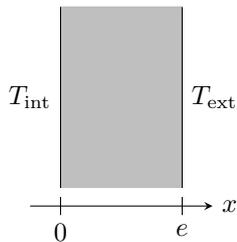
**Méthode :** le calcul est quasiment identique à celui du profil de température, mais la finalité n'est pas la même.

- ❶ Relier le flux thermique  $\Phi$  à la dérivée de la température grâce à la loi de Fourier ;
- ❷ Intégrer la relation obtenue entre les deux extrémités du milieu par séparation des variables ;
- ❸ Conclure en vérifiant la convention récepteur.

### • Résistance thermique en géométrie unidimensionnelle cartésienne (très important !)

#### Application 3 : Résistance thermique d'un mur

Calculer la résistance thermique d'un mur d'épaisseur  $e$ , de surface  $S$ , fait dans un matériau de conductivité thermique  $\lambda$ .



Dessiner  $\phi$  sur le schéma + schéma de résistance équivalente.

$$\begin{aligned}\phi &= j_x(x)S = -\lambda S \frac{dT}{dx} \\ -\frac{\phi}{\lambda S} \int_0^e dx &= \int_{T_{\text{int}}}^{T_{\text{ext}}} dT \\ -\frac{\phi}{\lambda S} e &= T_{\text{ext}} - T_{\text{int}} \\ T_{\text{int}} - T_{\text{ext}} &= \frac{e}{\lambda S} \phi \\ \boxed{R_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S}}\end{aligned}$$

Espace 13

La résistance thermique d'une paroi plane d'épaisseur  $e$  et de section  $S$  faite dans un matériau de conductivité thermique  $\lambda$  vaut

$$R_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S}$$

Elle caractérise le *système*, c'est-à-dire non seulement le matériau mais aussi de la géométrie.

#### Analyse qualitative du résultat :

- ▷ Dépendance en  $e$  :  
plus la paroi est épaisse, plus elle est thermiquement isolante : cohérent

Espace 14

▷ Dépendance en  $\lambda$  :

les transferts thermiques sont plus importants si la conductivité thermique du matériau est élevée : cohérent

Espace 15

▷ Dépendance en  $S$  :

à matériau et épaisseur fixée, il y a d'autant plus de transferts thermiques que la surface d'échange est élevée : cohérent également

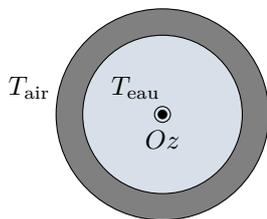
Espace 16

• Résistance thermique en géométrie cylindrique (théoriquement hors programme)

Application 4 : Résistance thermique d'une conduite

Calculer la résistance thermique du tuyau de chauffage étudié précédemment. Cette conduite est cylindrique de longueur  $L$ , de rayon interne et externe  $R_1 < R_2$ , faite dans un matériau de conductivité  $\lambda$ .

(M)



Dessiner  $\Phi$  sur le schéma + schéma de résistance équivalente

Flux sortant d'un cylindre de rayon  $R_1 < r < R_2$ , indépendant de  $r$  par conservation du flux.

$$\begin{aligned}\phi &= j_r(r) \times 2\pi r L = -2\pi r L \lambda \frac{dT}{dr} \\ -\frac{\phi}{2\pi\lambda L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} &= \int_{T_{\text{eau}}}^{T_{\text{air}}} dT \\ -\frac{\phi}{2\pi\lambda L} \ln \frac{R_2}{R_1} &= T_{\text{air}} - T_{\text{eau}} \\ T_{\text{eau}} - T_{\text{air}} &= \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi\lambda L} \phi \\ R_{\text{th}} &= \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi\lambda L}\end{aligned}$$

Conclure par les tests de vraisemblance : commenter le signe, la dépendance en  $R_2/R_1$  (plus la conduite est épaisse, plus  $R_2/R_1$  est grand), la dépendance en  $\lambda$  et celle en  $L$ .

Espace 17

### • Résistance thermique d'interface

La loi de Newton appliquée à l'interface entre deux milieux 1 et 2 s'écrit

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = hS(T_1 - T_2),$$

ce qui permet d'identifier directement une résistance thermique.

L'interface entre deux milieux crée à elle seule une résistance thermique, appelée **résistance d'interface** ou **résistance de contact**

$$R_{th,c} = \frac{1}{hS}$$

**Remarque :** Le contact thermique parfait se définit par  $R_c = 0$ , donc  $h \rightarrow \infty \dots$  et donc  $T_1 = T_2$  sous peine d'avoir un flux, donc une puissance, infinie, ce qui est impossible.

## II.E - Association de résistances thermiques

L'analogie électrique laisse entendre qu'il existe des règles d'association des résistances thermiques analogues à celles rencontrées en électricité. La seule demi-difficulté consiste à définir clairement ce que veut dire « en série » ou « en parallèle » en thermique.

$I \longleftrightarrow \Phi$	Montage en série	$\longleftrightarrow$	même intensité
$U \longleftrightarrow \Delta T$	Montage en parallèle	$\longleftrightarrow$	même tension

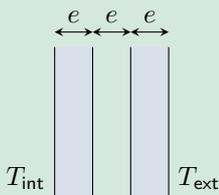
### • Résistances thermiques en série

Deux résistances thermiques  $R_1$  et  $R_2$  sont dites **associées en série** lorsqu'elles sont traversées par le même flux thermique, mais soumises à des différences de température différentes.

En pratique, les matériaux sont alors superposés les uns sur les autres.

La résistance thermique équivalente est alors donnée par  $R_{\text{éq}} = R_1 + R_2$ .

### Application 5 : Double vitrage



Un double vitrage est constitué de deux vitres en verre séparées d'une couche d'air, toutes supposées de même surface  $S$  et de même épaisseur  $e$ .

**1** - Justifier qu'il s'agit d'une association en série. Représenter le schéma électrique équivalente et calculer la résistance thermique.

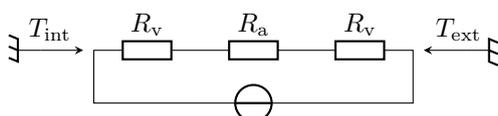
**2** - La comparer à celle d'un simple vitrage de même épaisseur totale  $3e$ . Commenter.

**3** - D'après ce modèle, comment pourrait-on améliorer simplement les performances thermiques du double vitrage ? Quel problème se pose en pratique ?

**Données :** conductivités thermiques de l'air  $\lambda_a = 3 \cdot 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  et du verre  $\lambda_v = 1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

**1** L'énergie thermique doit forcément traverser les trois couches sans pouvoir les contourner.

$$R_d = 2 \frac{e}{\lambda_v S} + \frac{e}{\lambda_a S}$$



1 Pour un simple vitrage d'épaisseur  $3e$ ,

$$R_s = \frac{3e}{\lambda_v S} \quad \text{d'où} \quad \frac{R_d}{R_s} = \frac{2}{3} + \frac{\lambda_v}{3\lambda_a} \simeq 10$$

Le double vitrage est donc dix fois meilleur, et utilise moins de matériau.

2 On pourrait imaginer augmenter l'épaisseur de la couche d'air ... mais en pratique la convection dans l'air devient très vite limitante, et il vaut mieux augmenter le nombre de couches : c'est le rôle du triple vitrage.

Espace 19

### • Résistances thermiques en parallèle

Deux résistances thermiques  $R_1$  et  $R_2$  sont dites **associées en parallèle** lorsqu'elles sont soumises à la même différence de température, mais a priori traversées par des flux thermiques différents.

En pratique, les matériaux sont juxtaposés, c'est-à-dire installés côte à côte.

La résistance thermique équivalente est alors donnée par

$$\frac{1}{R_{\text{éq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \Leftrightarrow \quad G_{\text{éq}} = G_1 + G_2$$

### Application 6 : Fenêtre dans un mur

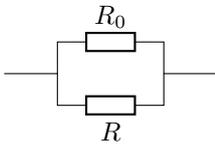
Un mur en béton, de dimensions  $5 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ , de résistance thermique  $R_0 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$  est percé d'une fenêtre carrée de côté  $20 \text{ cm}$  en vitrage simple de résistance thermique  $R = 8 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ .

- 1 - Comment expliquer que la résistance thermique du mur soit plus faible que celle de la fenêtre, alors que le béton est un meilleur isolant thermique que le verre et que le mur est plus épais que la fenêtre ?
- 2 - Dessiner le schéma électrique équivalent et calculer la résistance thermique totale.
- 3 - Quelle proportion des pertes thermiques est imputable à la fenêtre ?

1 Pour une paroi plane,  $R_{\text{th}} = e/\lambda S$  : la surface du mur est beaucoup plus grande que celle de la fenêtre, d'où une résistance thermique plus faible. Qualitativement, « l'énergie a plus de place pour passer ». On retrouve que la résistance thermique n'est pas caractéristique du matériau, mais du système = matériau + géométrie.

2 Il y a le même écart de température de part et d'autre du mur et de la fenêtre, il s'agit donc d'une association parallèle :

$$\frac{1}{R_{\text{tot}}} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \quad \text{soit} \quad R_{\text{tot}} = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}.$$



5  $R_{\text{tot}} < R_0$  donc la fenêtre diminue les performances thermiques du mur. La proportion des pertes due à la fenêtre vaut

$$\frac{\Phi_{\text{fen}}}{\Phi_{\text{tot}}} = \frac{(T_{\text{int}} - T_{\text{ext}})/R}{(T_{\text{int}} - T_{\text{ext}})/R_{\text{tot}}} = \frac{R_{\text{tot}}}{R} = \frac{0.016}{0.08} = 20\%$$

**Remarque :** On comprend ainsi pourquoi il est vivement recommandé de remplacer le simple vitrage par du double vitrage en rénovation thermique ... avec toutefois des précautions à prendre sur la gestion de l'humidité dans les bâtiments anciens.

## III - Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

### III.A - Équation de diffusion à une dimension cartésienne

#### III.A.1 - Démonstration

Considérons par exemple un mur plan d'épaisseur  $e$  dans la direction ( $Ox$ ) et de grandes dimensions dans les directions  $y$  et  $z$  (section  $S$ ). On suppose le problème unidimensionnel dépendant du temps, c'est-à-dire

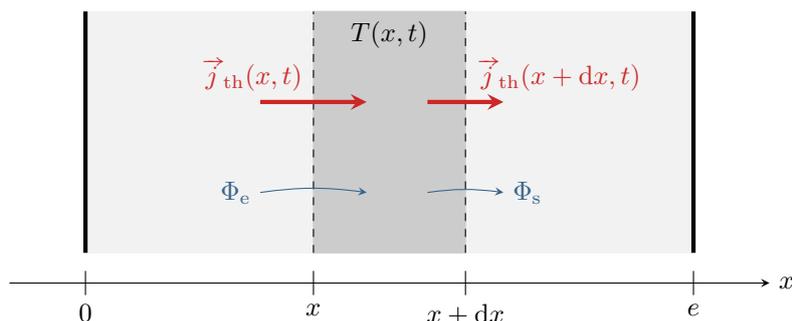
$$T = T(x, t) \quad \text{et} \quad \vec{j} = j_x(x, t) \vec{e}_x.$$

↪ **Objectif :** obtenir une équation aux dérivées partielles portant sur le champ de température.

↪ **Méthode :**

bilan d'enthalpie (↪ température), pour un système mésoscopique (↪ dérivées spatiales), pendant une durée infinitésimale (↪ dérivées temporelles).

Comme  $T$  dépend de  $x$  seulement, on choisira le système mésoscopique dans la direction  $x$  et macroscopique dans les autres directions, c'est-à-dire que l'on raisonnera sur une tranche mésoscopique de mur, comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ .



- **Premier principe**

Le plus simple est d'orienter les flux dans le sens du repère spatial choisi, et de raisonner en termes de flux entrant ou sortant.

▷ par la face située en  $x$  : flux entrant  $\Phi_e = j_x(x)S$

Espace 22

▷ par la face située en  $x + dx$  : flux sortant  $\Phi_s = j_x(x + dx)S$

Espace 23

Premier principe :

$$dH = \cancel{\delta W_i} + \delta Q = \Phi_e dt - \Phi_s dt = [j_x(x, t) - j_x(x + dx, t)] S dt = -\frac{\partial j_x}{\partial x} dx S dt$$

Espace 24

- **Loi de Joule**

Implique la variation de température du système entre l'état initial (instant  $t$ ) et l'état final (instant  $t + dt$ ). Or, la température du système méso est  $T(x, t)$ .

$$dH = H(t + dt) - H(t) = C [T(x, t + dt) - T(x, t)] = \underbrace{\rho S dx c}_{\text{masse}} \frac{\partial T}{\partial t} dt.$$

Espace 25

**Remarque :** pourquoi la température du système est-elle  $T(x, t)$  et pas, par exemple,  $T(x + dx/2, t)$  ?

Comme on ne travaille qu'au premier ordre en  $dx$ , c'est en fait équivalent pour exprimer la variation d'enthalpie : en effet,

$$T\left(x + \frac{dx}{2}, t\right) \simeq T(x, t) + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

donc

$$dH = \rho S dx c \times \frac{\partial}{\partial t} [T(x, t)] \times dt + \underbrace{\rho S dx c \times \frac{dx}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right]}_{\text{second ordre en } dx, \text{ donc négligé}} \times dt$$

- **Bilan d'enthalpie**

$$dH \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} -\frac{\partial j_x}{\partial x} dx S dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} \rho S dx c \frac{\partial T}{\partial t} dt \quad \text{soit} \quad \boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_x}{\partial x}}.$$

Espace 26

Loi de Fourier :

$$\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \quad \text{soit} \quad j_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Espace 27

Conclusion :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = +\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Espace 28

**Remarque :** La même démonstration s'applique pour un cylindre dont les parois latérales sont parfaitement calorifugées : en coordonnées cylindriques, la diffusion se fait seulement dans la direction axiale  $z$ ,

$$\vec{j} = j_z(z, t) \vec{e}_z.$$

On procède alors de même en raisonnant sur une tranche mésoscopique de cylindre d'épaisseur  $dz$ .

### III.A.2 - Forme canonique

À une dimension cartésienne, l'équation de diffusion thermique ou équation de la chaleur s'écrit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

en posant  $D = \frac{\lambda}{\rho c}$  la **diffusivité thermique** du milieu, qui s'exprime en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

La diffusivité d'un matériau compare ses propriétés de conduction de la chaleur (via  $\lambda$ ) et de stockage d'énergie interne (via  $c$ ) : un bon conducteur thermique peut avoir une faible diffusivité si sa capacité thermique massique est élevée, et réciproquement un bon isolant peut avoir une forte diffusivité si  $c$  est faible.

Unité de la diffusivité :

$$[D] \times \frac{\text{K}}{\text{m}^2} = \frac{\text{K}}{\text{s}} \quad \text{d'où} \quad [D] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

Espace 29

#### • Comparaison entre résistance thermique et diffusivité

La diffusivité  $D$  et la résistance thermique  $R_{\text{th}}$  ne contiennent pas les mêmes informations et ne doivent pas être confondues. On rappelle que

$$R_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S} \quad (\text{paroi plane}) \quad \text{et} \quad D = \frac{\lambda}{\rho c}.$$

- ▷ Les deux dépendent de la conductivité thermique  $\lambda$  : un bon conducteur thermique sera caractérisé par une forte diffusivité et des faibles résistances thermiques.
- ▷ La résistance thermique dépend de la géométrie : doubler l'épaisseur d'un mur ne change pas la diffusivité mais double la résistance thermique.
- ▷ La diffusivité implique la capacité thermique massique  $c$  du matériau, c'est-à-dire sa capacité à stocker de l'énergie thermique, au contraire de la résistance thermique.

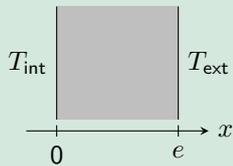
La résistance thermique quantifie la facilité des transferts thermiques au travers d'un *système*, et tient compte non seulement du matériau mais aussi de la géométrie.

La diffusivité thermique compare les propriétés de conduction et de stockage thermique. Elle est *intrinsèque* à un *matériau*, et indépendante d'un système en particulier.

### III.A.3 - Conséquence simple : profil de température en régime stationnaire

Passer par la conservation du flux ou l'équation de la chaleur en régime stationnaire pour obtenir un profil de température stationnaire est physiquement équivalent, en revanche les calculs par l'équation de la chaleur sont bien plus compliqués dès que la géométrie n'est plus cartésienne.

#### Application 7 : Profil de température dans un mur, approche par l'équation de la chaleur

On considère le mur de maison d'épaisseur  $e$  et de section  $S$  schématisé ci-contre. Déterminer le profil de température  $T(x)$  à l'intérieur du mur en régime stationnaire, en supposant un contact thermique parfait avec l'air environnant.

L'équation de la chaleur s'intègre sous la forme

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dT}{dx} = A = \text{cte} \quad \rightsquigarrow \quad T(x) = Ax + B \quad (A, B \text{ cte})$$

Avec les conditions aux limites : d'une part,

$$T(x=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} B \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{=} T_{\text{int}}$$

et d'autre part

$$T(x=e) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} Ae + T_{\text{int}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{=} T_{\text{ext}} \quad \text{d'où} \quad A = \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{e}$$

Finalement, on retrouve l'expression déterminée précédemment, à savoir

$$T(x) = T_{\text{int}} - \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{e}x.$$

### III.A.4 - Autres phénomènes pouvant contribuer aux bilans thermiques

Beaucoup d'exercices consistent à adapter cette démonstration en faisant intervenir d'autres termes dans le transfert thermique :

- ▷ fuites thermiques sur les parois latérales, ce qui ajoute un flux sortant supplémentaire ;
- ▷ production de chaleur interne au système, ce qui ajoute un « flux entrant » supplémentaire : on parle alors de **source thermique** ou **terme source**.  
effet Joule, réaction chimique, réaction nucléaire

Espace 31

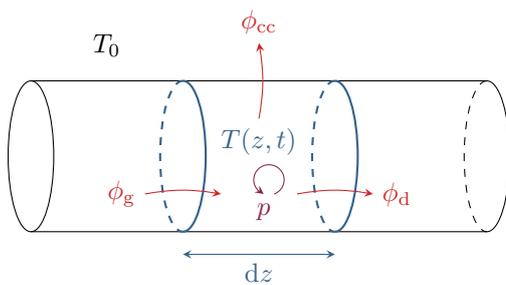
#### Application 8 : Bilan thermique d'un fusible

Un fusible est un élément de sécurité des circuits électriques, qui a pour rôle d'ouvrir le circuit lorsque le courant devient accidentellement trop élevé pendant une certaine durée. On utilise pour cela un alliage métallique dont la température de fusion est nettement inférieure à celle du cuivre.

Considérons un fusible cylindrique de rayon  $a$ , et raisonnons sur un tronçon élémentaire de longueur  $dz$ . Les échanges thermiques de ce tronçon sont de trois types :

- ▷ échange par conduction thermique avec les portions de fusible situées à gauche et à droite ;
- ▷ chauffage par effet Joule avec une puissance volumique  $p = I^2/\gamma S^2$  ( $\gamma$  conductivité électrique) ;
- ▷ refroidissement par sa surface latérale, décrite par la loi de Newton des transferts conducto-convectifs :  $\vec{j}_{cc} = h(T - T_0)\vec{e}_r$ .

Exprimer le transfert thermique échangé pendant une durée  $dt$  pour chaque mode d'échange thermique. En déduire le transfert thermique total.



Transfert thermique par conduction : la surface d'échange est la section  $\pi a^2$  du fusible.

$$\begin{aligned}\delta Q_{\text{cond}} &= \phi_g dt - \phi_d dt \\ &= j_z(z, t) \pi a^2 dt - j_z(z + dz, t) \pi a^2 dt \\ &= -\frac{\partial j_z}{\partial z} \pi a^2 dz dt\end{aligned}$$

Transfert thermique d'effet Joule : la puissance est dissipée dans tout le volume  $\pi a^2 dz$  du tronçon de fusible.

$$\delta Q_{\text{Joule}} = \mathcal{P}_J dt = \frac{I^2}{\gamma \pi^2 a^4} \pi a^2 dz dt$$

Transfert thermique conducto-convectif : la surface d'échange est cette fois la surface latérale  $2\pi a dz$  du fusible.

$$\begin{aligned}\delta Q_{cc} &= \iint \vec{j}_{cc} \cdot dS \vec{e}_r dt \\ &= h(T - T_0) \times 2\pi a dz dt.\end{aligned}$$

Transfert thermique total :

$$\begin{aligned}\delta Q &= \delta Q_{\text{cond}} + \delta Q_{\text{Joule}} - \delta Q_{cc} \\ &= \left( -a \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{I^2}{\gamma \pi^2 a^3} - 2h(T - T_0) \right) \pi a dz dt\end{aligned}$$

### III.B - Équation de diffusion à trois dimensions

On considère maintenant le cas général, où a priori  $\vec{j}_{\text{th}}$  a trois composantes non nulles qui dépendent des trois variables d'espace, mais on suppose qu'il n'y a pas de terme source.

Devinons la forme générale tridimensionnelle du premier principe à partir de l'écriture unidimensionnelle :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_x}{\partial x} \quad \rightsquigarrow \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}_{\text{th}}$$

Cette équation est parfois appelée **équation de continuité**. Elle traduit, de façon très générale, le premier principe pour un système mésoscopique ne recevant pas de travail. Elle peut être utilisée dans n'importe quel système de coordonnées, à condition bien sûr de prendre la bonne expression de la divergence avec un formulaire.

Par définition de l'opérateur laplacien scalaire,  $\Delta T = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} T)$ . Ainsi, en utilisant la loi de Fourier,

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\lambda \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} T) = -\lambda \Delta T \quad \text{donc} \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = +\lambda \Delta T$$

Dans un milieu homogène et isotrope, en l'absence de terme source, l'équation de diffusion prend la forme générale

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T$$

où  $D = \lambda/\rho c$  est la diffusivité thermique du milieu.

► **Pour approfondir** : Cette forme tridimensionnelle peut évidemment s'établir de manière rigoureuse. Considérons un système  $\Sigma$ , définissant un volume de contrôle  $\mathcal{V}$ , délimité par une surface de contrôle  $\mathcal{S}$  orientée vers l'extérieur. Procédons à un bilan d'enthalpie pour  $\Sigma$ , en supposant qu'il n'échange de l'énergie que par conduction thermique au travers de la surface  $\mathcal{S}$ .

▷ **Premier principe** : Puisque  $\mathcal{S}$  est orientée vers l'extérieur, le flux thermique total sortant de  $\Sigma$  s'écrit

$$\Phi_{\text{tot},\mathcal{S}} = \oint_{M \in \mathcal{S}} \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{S}$$

et avec le théorème de Green-Ostrogradski

$$\Phi_{\text{tot},\mathcal{S}} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{j} \, d\tau.$$

Ainsi, le premier principe appliqué à  $\Sigma$  écrit directement en puissance donne

$$\frac{dH}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} -\Phi_{\text{tot},\mathcal{S}} = -\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{j} \, d\tau.$$

▷ **Loi de Joule** : Par ailleurs, l'enthalpie totale de  $\Sigma$  peut s'écrire en termes d'enthalpie massique

$$H = \iiint_{M \in \mathcal{V}} h(M, t) \underbrace{\rho d\tau}_{=dm}.$$

En supposant le système  $\Sigma$  immobile, donc le domaine d'intégration indépendant du temps,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho h(M, t) d\tau = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \frac{\partial h}{\partial t} d\tau.$$

On peut alors utiliser la loi de Joule pour en déduire une deuxième expression de la dérivée temporelle de l'enthalpie,

$$\frac{dH}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} \iiint_{\mathcal{V}} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\tau.$$

▷ **Conclusion** : par identification des deux expressions,

$$\frac{dH}{dt} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\tau = - \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{j} d\tau \quad \text{soit} \quad \iiint_{\mathcal{V}} \left( \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right) d\tau = 0$$

L'intégrale devant être nulle quel que soit le volume de contrôle  $\mathcal{V}$  considéré, c'est donc l'intégrande elle-même qui est nulle. On aboutit alors à l'équation de continuité

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0,$$

qui est bien l'équation que nous avons intuitée qualitativement. ■

### III.C - Résolution numérique de l'équation de diffusion unidimensionnelle

Sauf cas particuliers, l'équation de la chaleur n'admet pas de solution analytique simple : une résolution numérique est donc toute adaptée. Dans toute la suite, on se limite à la résolution de l'équation de la chaleur unidimensionnelle,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

On adopte une méthode issue du schéma d'Euler explicite. L'espace et le temps doivent être discrétisés, on choisit  $N_x$  points dans l'espace, séparés de  $\Delta x$ , et  $N_t$  pas de temps, séparés de  $\Delta t$ .

#### • Méthode des différences finies

Procédons par analogie avec le schéma d'Euler, en écrivant des développements limités issus de la formule de Taylor à l'ordre 2,

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + o(h^2).$$

Application à la température :

$$T(x_j \pm \Delta x, t_i) = T(x_j, t_i) \pm \Delta x \frac{\partial T}{\partial x}(x_j, t_i) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_j, t_i) + o(\Delta x^2)$$

Espace 34

Obtention de la dérivée seconde : en sous-entendant le terme en  $o(\Delta x^2)$ ,

$$T(x_j + \Delta x, t_i) + T(x_j - \Delta x, t_i) = 2T(x_j, t_i) + \Delta x^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_j, t_i)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_j, t_i) = \frac{T(x_j + \Delta x, t_i) + T(x_j - \Delta x, t_i) - 2T(x_j, t_i)}{\Delta x^2}}.$$

M

Relations de récurrence issues du schéma d'Euler explicite :

$$\frac{T(x_j, t_i + \Delta t) - T(x_j, t_i)}{\Delta t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_j, t_i)$$

$$T(x_j, t_i + \Delta t) = T(x_j, t_i) + \Delta t D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_j, t_i)$$

M

### • Validité des résultats

Le schéma d'Euler ne peut donner des résultats pertinents que si le pas de temps vérifie certaines contraintes de petitesse. On admet qu'il en est de même pour la méthode des différences finies, à laquelle s'ajoute un critère supplémentaire : le résultat ne converge que si

$$D \Delta t < \frac{1}{2} \Delta x^2$$

La démonstration mathématique est trop éloignée du programme de physique pour être faite ici.

### • Un exemple d'implémentation en Python

Imaginons étudier le cas très théorique d'une paroi plane, infinie dans les directions  $y$  et  $z$ , initialement de température uniforme, soumise à un échelon de température instantané par sa gauche ( $x < 0$ ), la température à sa droite restant constante.



La température au cours du temps est stockée dans une liste de listes  $T$  :

- ▷  $T[i]$  est une liste donnant  $T(x, t=i\Delta t)$ , c'est-à-dire la température en tout point de l'espace à l'instant  $i\Delta t$  ;
- ▷  $T[i][j]$  est un flottant donnant  $T(x=j\Delta x, t=i\Delta t)$  la température à l'instant  $i\Delta t$  et à la position  $j\Delta x$ .

```

1  ### Conditions aux limites données à gauche et à droite
2  Tg = 30
3  Td = 20

5  ### Initialisation de la liste des températures
6  T = [[None for j in range(Nx)] for i in range(Nt)]
7  T[0] = [20 for j in range(Nx)] # température initiale uniforme

9  for i in range(Nt-1):
10     for j in range(Nx):
11         ### Calcul de la dérivée seconde
12         if j!=0 and j!=Nx-1:
13             der2 = (T[i][j+1] - 2*T[i][j] + T[i][j-1]) / (dx**2)
14         if j == 0:
15             der2 = (T[i][1] - 2*T[i][0] + Tg) / (dx**2)

```

M

```

16 |         if j == Nx-1:
17 |             der2 = (Td - 2*T[i][-1] + T[i][-2]) / (dx**2)
19 |         ### Application du schéma d'Euler
20 |         T[i+1][j] = T[i][j] + dt * D * der2

```

Rôle des lignes 14 à 17 :

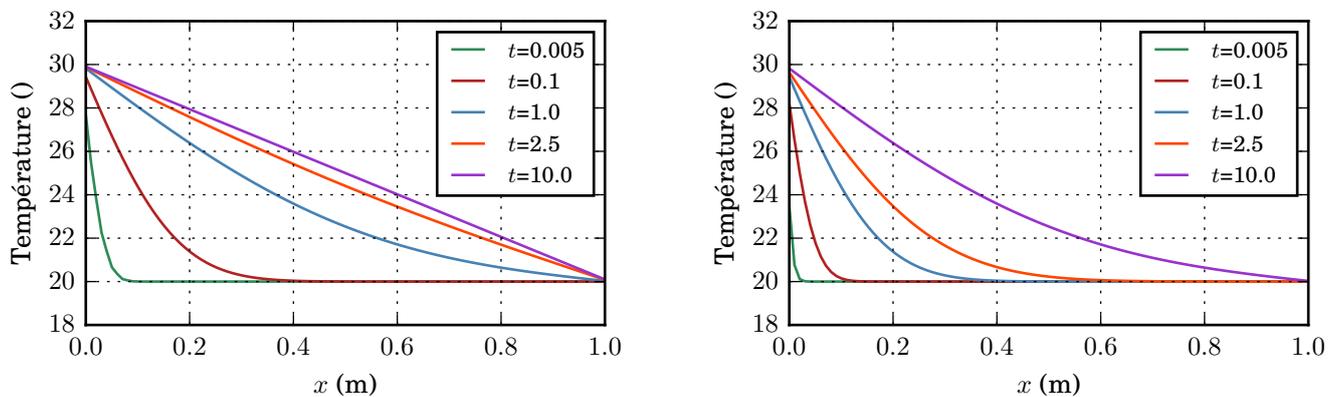
Gestion des effets de bord dans le calcul de la dérivée seconde, pour le point le plus à gauche  $j = 0$ , le point  $j - 1 = -1$  n'existe pas, on utilise alors la condition au limite donnée. Réciproquement pour le point le plus à droite  $j = N_x - 1$ .

Espace 37

### III.D - Temps et distance caractéristiques de diffusion

L'algorithme précédent conduit aux courbes de la figure 1, qui montrent l'avancée progressive d'un front de diffusion jusqu'à atteindre en régime permanent un profil de température linéaire. Ce régime permanent est atteint plus ou moins rapidement selon la valeur de  $D$ .

↪ comment l'anticiper ?



**Figure 1 – Profil de température au sein d'une plaque plane à différents instants.** Figure de gauche :  $D = 0,1 \text{ m}^2/\text{min}$  ; figure de droite :  $D = 0,01 \text{ m}^2/\text{min}$ . Tous les autres paramètres sont identiques dans les deux simulations, en particulier  $\Delta T = 10 \text{ }^\circ\text{C}$ . Les temps sont exprimés en minutes.

La forme canonique d'une équation différentielle fait apparaître un certain nombre de paramètres caractéristiques, qui donnent déjà des informations sur le comportement du système avant même d'avoir résolu l'équation.

#### Exemples :

▷ Circuit RC :  $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau}u_C = \frac{E}{\tau}$

↪  $\tau$  renseigne sur la durée du régime transitoire.

▷ Oscillateur masse ressort :  $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = 0$

↪  $\omega_0$  est la pulsation des oscillations.

Espace 38

Espace 39

Ici le paramètre caractéristique est la diffusivité thermique  $D$ , mais son interprétation est un peu plus subtile car son unité  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  n'est pas simple. On raisonne par analyse dimensionnelle.

### • Temps caractéristique de diffusion

- ▷ *Question* : quelle est la durée caractéristique  $\tau$  d'établissement du régime permanent est-il établi dans la plaque ?
- ▷ *Paramètres* :  $e, D$  et  $\Delta T$

M!

Espace 40

- ▷ *Postulat d'homogénéité* : si  $\tau$  dépend de ces paramètres, alors il existe trois exposants  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  permettant d'écrire une relation homogène entre eux.

$\tau = k e^\alpha D^\beta \Delta T^\gamma$  avec  $k$  une constante sans dimension de l'ordre de l'unité.

Espace 41

- ▷ *Détermination des exposants* :

Équation aux dimensions associée :

$$T = 1 \times L^\alpha \times L^{2\beta} T^{-\beta} \Theta^\gamma$$

Identification :  $\beta = -1, \gamma = 0$  et  $\alpha + 2\beta = 0$  donc  $\alpha = 0$

Espace 42

- ▷ *Conclusion* :

$\tau = k \frac{e^2}{D}$  indépendant de  $\Delta T$

Espace 43

### • Longueur de diffusion

- ▷ *Question* : sur quelle longueur  $\ell$  le front de diffusion a-t-il avancé au bout d'une durée  $\Delta t$  ?

- ▷ *Paramètres* : par analogie avec ce qui précède,  $\ell$  dépend de  $\Delta t$  et  $D$ .

M!

- ▷ *Postulat d'homogénéité* : si  $\ell$  dépend de ces paramètres, alors il existe deux exposants  $\alpha$  et  $\beta$  permettant d'écrire une relation homogène

$$\ell = k \Delta t^\alpha D^\beta$$

où  $k$  est une constante sans dimension de l'ordre de l'unité.

- ▷ *Détermination des exposants* :

Équation aux dimensions associée :

$$L = 1 \times T^\alpha \times L^{2\beta} T^{-\beta}$$

Identification :  $2\beta = 1$ , et  $\alpha - \beta = 0$  donc  $\alpha = \beta = 1/2$

Espace 44

- ▷ *Conclusion* :

$\ell = k \sqrt{D \Delta t}$

Espace 45

- ▷ *Comparaison à la simulation* :

le vérifier avec la simulation, p.ex. pour  $D = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  : on voit bien qu'il faut quadrupler le temps pour doubler l'avancée du front de diffusion.

Espace 46

### • Généralisation

En ordre de grandeur, la diffusion thermique pendant une durée  $\Delta t$  a un effet sur une distance

$$\ell \sim \sqrt{D \Delta t}$$

et réciproquement pour que la diffusion thermique ait un effet sur une distance  $\ell$  il faut attendre une durée

$$\Delta t \sim \frac{\ell^2}{D}$$

Ces résultats sont indépendants des températures mises en jeu.

**Attention !** Ne pas confondre avec la propagation d'une onde pour laquelle on aurait  $\ell = c \Delta t \propto \Delta t$ .

↪ numériquement, pour  $D = 1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  (valeur type métal)

$$\Delta t(1 \text{ cm}) = 10 \text{ s} \quad \Delta t(2 \text{ cm}) = 40 \text{ s} \quad \Delta t(3 \text{ cm}) = 90 \text{ s}$$

Ainsi, dans le cas de la diffusion thermique, tout se passe comme si « parcourir le troisième centimètre » prenait neuf fois plus de temps que « parcourir le premier ».

### Application 9 : Temps et longueur de diffusion

**1** - Un étourdi oublie sa cuillère dans l'eau de cuisson des pâtes. Jusqu'à quelle hauteur le manche va-t-il chauffer pendant la cuisson? Corollaire : risque-t-il de se brûler en la retirant quand les pâtes seront cuites au bout de dix minutes?

*Donnée* : diffusivité du fer  $D \sim 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

**2** - Combien de temps (dans une unité adaptée!) faut-il pour que les variations de température se fassent ressentir dans une cave enterrée à 2 m de profondeur?

*Donnée* : diffusivité du sol  $D \sim 2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

**1** Temps de cuisson des pâtes 600 s, donc

$$\ell = \sqrt{D \times \Delta t} = 10 \text{ cm}$$

donc le manche aura complètement chauffé et il risque de se brûler.

**2**  $\Delta t = \frac{\ell^2}{D} = 2 \cdot 10^7 \text{ s} \simeq 230 \text{ jours} \simeq 7 \text{ mois}$  : une cave est plus fraîche en été qu'en hiver !