BLAISE PASCAL
PT 2024-2025

TD 19 – Thermodynamique

Conduction thermique

Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
Difficulté technique et calculatoire ;
Exercice important.

Flasher ou cliquer pour accéder au corrigé

Ceinture		Proposition de parcours d'entraînement
	Ceinture blanche	Applications + exercices 1 à 5 et 9
	Ceinture jaune	Applications + exercices 1 à 5, puis 8, 9, et 12
	Ceinture rouge	Applications (★) + exercices 1, 2, 5 à 9, 11 et 12
	Ceinture noire	Applications (★) + exercices 5 à 15

Applications de cours

Seuls les étudiants du groupe PT⋆ seront interrogés en colle sur les applications marquées d'une étoile, car elles sont plus techniques et/ou moins essentielles ... mais tous les étudiants sont bien sûr invités à les travailler !

19.1 - Établir le profil de température en régime permanent $T(x)$ dans une plaque plane d'épaisseur e, section S, faite dans un matériau de conductivité thermique λ.

> *La méthode utilisée (conservation du flux ou double intégration de l'équation de la chaleur) est laissée au choix de l'étudiant.*

19.2 - Établir l'expression de la résistance thermique d'une plaque plane d'épaisseur e, section S, faite dans un matériau de conductivité thermique λ.

19.3 - Établir l'équation de la chaleur à une dimension cartésienne.

19.4 - Considérons une plaque plane d'épaisseur e, faite d'un matériau de diffusivité D et soumise à « un échelon » de température ΔT. Au choix de l'interrogateur, exprimer ou bien la durée τ caractéristique du régime transitoire ou bien exprimer l'abscisse x à laquelle avance le front de diffusion au bout d'un temps t, en raisonnant par analyse dimensionnelle. Commenter les résultats.

> ***Élements de réponse :*** *On cherchera les expressions sous la forme $e^\alpha D^\beta \Delta T^\gamma$ ou équivalent. On insistera ensuite sur le fait que les résultats sont indépendants de ΔT ($\gamma = 0$), ce qui n'a rien d'intuitif, et sur la différence fondamentale entre un phénomène diffusif et un phénomène propagatif (ondulatoire) pour lequel on aurait $x = ct$.*

(★) 19.5 - On considère l'espace et le temps discrétisés avec des pas respectifs Δx et Δt. Établir en fonction des températures aux différents points l'expression discrétisée de la dérivée spatiale seconde

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_j, t_i)\,.$$

(★) 19.6 - Compléter le code Python ci-dessous permettant de résoudre l'équation de la chaleur unidimensionnelle par le schéma d'Euler explicite. Les températures sont stockées sous forme d'une liste de listes. On rappelle l'expression de la dérivée seconde discrétisée :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_j, t_i) = \frac{T(x_j + \Delta x, t_i) + T(x_j - \Delta x, t_i) - 2T(x_j, t_i)}{\Delta x^2}\,.$$

Avant toute écriture de code, on commencera par établir les relations de récurrence utiles.

```python
### Conditions aux limites données à gauche et à droite
Tg = 30
Td = 20

### Initialisation de la liste des températures
T = [[None for j in range(Nx)] for i in range(Nt)]
T[0] = [20 for j in range(Nx)]   # température initiale uniforme

### à compléter !
```

Analyses de corrigé

Exercice 1 : Double vitrage 1 | 1 |

▷ *Association de résistances thermiques ;*
▷ *Loi de Newton.*

Cet exercice a pour objectif d'estimer la puissance perdue au travers d'une fenêtre en double vitrage à montant en bois. Cette vitre a pour largeur $L = 80\,\mathrm{cm}$ et pour hauteur $H = 1\,\mathrm{m}$. On adopte pour le vitrage un modèle à trois couches :

- ▷ une première couche de verre, d'épaisseur $e_\mathrm{v} = 4\,\mathrm{mm}$;
- ▷ une couche d'air, d'épaisseur $e_\mathrm{a} = 16\,\mathrm{mm}$;
- ▷ une seconde couche de verre identique à la première.

Le montant en bois a une surface totale $S_\mathrm{b} = 0{,}2\,\mathrm{m}^2$ et une épaisseur $e_\mathrm{b} = 60\,\mathrm{mm}$.

On prend également en compte le phénomène de conducto-convection à l'interface entre la seconde couche de verre et l'air extérieur, décrite par la loi de Newton de coefficient conducto-convectif $h = 10\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$.

Données : conductivités thermiques du verre $\lambda_\mathrm{v} = 1{,}0\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$, de l'air $\lambda_\mathrm{a} = 2{,}7\cdot 10^{-2}\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ et du bois $\lambda_\mathrm{b} = 0{,}15\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$.

1 - Représenter le schéma électrique équivalent à la fenêtre.

2 - Calculer la résistance thermique totale des trois couches constituant le vitrage. En déduire la résistance thermique de la fenêtre.

3 - En plein hiver, la température de l'habitation est $T_\mathrm{int} = 20\,°\mathrm{C}$ et la température extérieure $T_\mathrm{ext} = 5\,°\mathrm{C}$. Quelle est la puissance thermique perdue au travers de la fenêtre ?

4 - Déterminer la température de surface de la fenêtre, côté extérieur.

✎ ***Correction*** — **1 -** *Le schéma équivalent est représenté figure 1.*

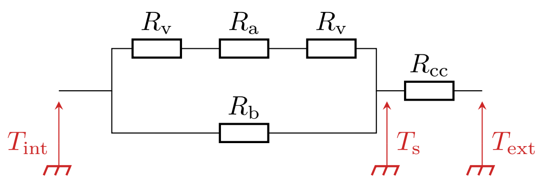


Figure 1 – Schéma électrique équivalent à la fenêtre.

> ***Question d'analyse 1*** *- Justifier que les trois résistances R_v, R_a et R_v sont montées en série.*
>
> ***Question d'analyse 2*** *- Justifier que R_b est montée en parallèle de l'association précédente.*
>
> ***Question d'analyse 3*** *- Justifier le montage en série de R_{cc}.*

2 - *Avec les lois d'association de résistance, le vitrage a pour résistance*

$$R_\mathrm{vit} = 2R_\mathrm{v} + R_a = \frac{2e_\mathrm{v}}{\lambda_\mathrm{v} LH} + \frac{e_a}{\lambda_\mathrm{a} LH} = 0{,}75\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}\,.$$

La fenêtre donc une résistance thermique R_{fen} telle que

$$\frac{1}{R_{fen}} = \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_{vit}} \qquad \text{soit} \qquad R_{fen} = \frac{R_b\,R_{vit}}{R_b + R_{vit}} = 0{,}55\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$$

***Question d'analyse 4** - Expliquer physiquement pourquoi il est logique de trouver $R_{\text{fen}} < R_{\text{vit}}$.*

Enfin, en prenant en compte la conducto-convection,

$$R_{\text{tot}} = R_{\text{fen}} + R_{\text{cc}} = R_{\text{fen}} + \frac{1}{h(S_b + LH)} = 0{,}65\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$$

***Question d'analyse 5** - Rappeler la loi de Newton, et retrouver l'expression de R_{cc}.*

***3 -** D'après la loi d'Ohm thermique,*

$$\mathcal{P} = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{R_{\text{tot}}} = 23\,\mathrm{W}\,.$$

***Question d'analyse 6** - Représenter la puissance $\mathcal{P}$ sur le schéma électrique équivalent. Justifer que l'écart de température doit s'écrire $T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}$ et non pas $T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}$.*

***4 -** Notons T_s la température de surface de la fenêtre, indiquée sur la figure 1. Par un pont diviseur,*

$$\frac{T_{\text{int}} - T_s}{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}} = \frac{R_{\text{fen}}}{R_{\text{tot}}} \qquad \text{d'où} \qquad T_s = T_{\text{int}} - \frac{R_{\text{fen}}}{R_{\text{tot}}}(T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}) = 7{,}3\,°\mathrm{C}\,.$$

***Question d'analyse 7** - Justifier que le pont diviseur s'applique. Refaire le schéma en représentant clairement les « tensions » comme on le ferait en électronique.*

Exercice 2 : Température dans un réacteur piston

2 | 2 |

- *Bilan thermique mésoscopique ;*
- *Terme source ;*
- *Transfert thermique conducto-convectif.*

Un réacteur piston est un type de réacteur chimique cylindrique sans agitation, dans lequel les réactifs sont injectés d'un côté, les produits récupérés de l'autre, et l'écoulement suffisamment lent pour que les différentes tranches de fluide ne se mélangent pas. Ce type de réacteur est par exemple utilisé pour réaliser en flux continu une réaction à la cinétique lente.

Étudions un tel réacteur de rayon a, voir figure 2, dans lequel a lieu une réaction exothermique libérant une puissance volumique α. La conductivité thermique λ du milieu réactionnel est supposée indépendante de l'avancement de la réaction. Le réacteur est refroidi par un écoulement d'eau à température uniforme T_0 tout autour du réacteur, le flux thermique surfacique échangé à l'abscisse z entre le réacteur et le système de refroidissement étant donné par la loi de Newton :

$$\varphi(z) = h(T(z) - T_0)\,.$$

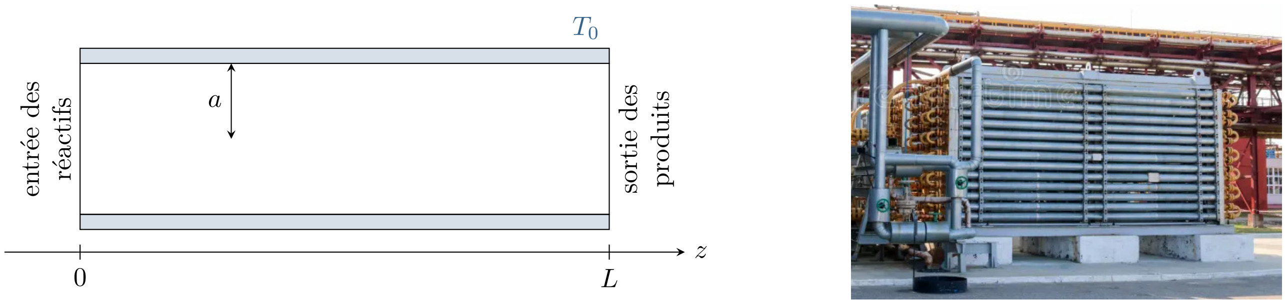


Figure 2 – Schéma du réacteur piston étudié.

1 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la température $T(z)$ en régime permanent.

2 - Identifier une longueur caractéristique ℓ de l'évolution de la température dans le réacteur.

3 - Résoudre cette équation, sachant que les réactifs sont introduits à la température T_0 et en notant T_s leur température de sortie.

✎ ***Correction** — **1 -** Procédons à un bilan d'enthalpie pour la tranche mésoscopique de réacteur comprise entre z et $z + dz$ pendant une durée infinitésimale dt.*

$$dH = j_z(z)\,\pi a^2\,dt - j_z(z+dz)\,\pi a^2\,dt + \alpha\,\pi a^2\,dz\,dt - \varphi(z)\,2\pi a\,dz\,dt = 0\,.$$

Question d'analyse 1 *- Expliquer à quel phénomène correspond chaque terme et justifier les signes.*

Question d'analyse 2 *- Justifier les facteurs géométriques intervenant dans les deux derniers termes du bilan.*

Question d'analyse 3 *- Pourquoi peut-on affirmer que $dH = 0$?*

Ainsi,

$$-\frac{\mathrm{d}j_z}{\mathrm{d}z}\,\pi a^2\,dt + \alpha\pi a^2\,dz\,dt - h(T(z) - T_0)2\pi a\,dz\,dt = 0$$

ce qui se simplifie en

$$-\frac{\mathrm{d}j_z}{\mathrm{d}z}a + \alpha a - 2h(T(z) - T_0) = 0\,.$$

Question d'analyse 4 *- Je me suis trompé en faisant apparaître la dérivée ! Trouve l'erreur ☺*

Avec la loi de Fourier,

$$+\lambda a\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}z^2} + \alpha a - 2h(T(z) - T_0) = 0$$

d'où on déduit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}z^2} - \frac{2h}{a\lambda}T = -\frac{2h}{a\lambda}T_0 - \frac{\alpha}{\lambda}\,.}$$

2 - *Compte tenu de l'équation différentielle, on identifie*

$$\ell = \sqrt{\frac{a\lambda}{2h}}\,.$$

Question d'analyse 5 *- Comment sait-on qu'il faut mettre une racine ?*

3 - *Le polynôme caractéristique de l'équation différentielle s'écrit*

$$r^2 - \frac{1}{\ell^2} = 0 \qquad \text{donc} \qquad r = \pm\frac{1}{\ell}\,.$$

Par conséquent,

$$T(z) = A\,\mathrm{e}^{-z/\ell} + B\,\mathrm{e}^{+z/\ell} + T_0 + \frac{\alpha a}{2h}\,.$$

Question d'analyse 6 *- Pourquoi la solution homogène n'est-elle pas de la forme $A\cos(kz) + B\sin(kz)$?*

Il reste ensuite à terminer le calcul en utilisant les conditions aux limites : je te laisse le faire pour t'entraîner !

Refaire le cours

Exercice 3 : Barre connectée à deux thermostats

1 | 1 |

- *Équation de la chaleur ;*
- *Résistance thermique ;*
- *Bilan d'entropie.*

> *Hormis la dernière question, cet exercice a pour objectif de refaire tous les calculs importants concernant la conduction thermique à une dimension cartésienne : idéal pour retravailler son cours !*

On s'intéresse aux transferts thermiques dans une barre homogène de section S, de longueur L, dont la surface est calorifugée. La barre est faite d'un matériau de conductivité thermique κ, de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c. On note $\vec{u}_x$ le vecteur unitaire colinéaire à l'axe de la barre. Les extrémités $x = 0$ et $x = L$ sont mises en contact thermique parfait avec des thermostats aux températures T_1 et T_2. On admet que le champ de température dans la barre ne dépend que de x et de t.

1 - Établir l'équation de la chaleur. Définir le coefficient de diffusion thermique D.

2 - En supposant la barre initialement à une température uniforme, estimer la durée du régime transitoire. Commenter le résultat. Quelle est l'influence des températures T_1 et T_2 ?

3 - Déterminer le profil de température $T(x)$ en régime permanent. Le tracer.

4 - Montrer que le flux thermique dans la barre ne dépend pas de x. En déduire la résistance thermique R_{th} de la barre.

5 - (Plus difficile et moins important) En appliquant le second principe de la thermodynamique à la barre en régime permanent, montrer que le taux de production d'entropie (quantité d'entropie crée par unité de temps) vaut

$$\frac{\delta S_c}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{R_{\text{th}}} \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1 \, T_2} \,.$$

Commenter le résultat.

Résistances thermiques

Exercice 4 : Isolation d'un pignon

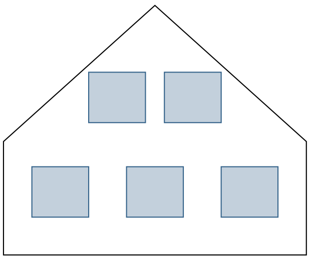
1 | 2 |

- *Association de résistances thermiques ;*
- *Applications numériques sans calculatrice.*

Document 1 : De la nécessité de l'isolation

Le secteur du bâtiment représente 44 % de l'énergie consommée en France, loin devant le secteur des transports (31 %). Chaque année, le secteur du bâtiment émet plus de 123 millions de tonnes de CO_2, près du quart du total national, ce qui en fait l'un des domaines clé dans la lutte contre le réchauffement climatique et la transition énergétique. Pour rendre le bâtiment plus économe en énergie, il faut rénover massivement l'existant et développer des normes plus strictes en termes de consommation d'énergie pour les bâtiments neufs. C'est l'objet de la politique de l'énergie dans les bâtiments.

Extrait du site internet du Ministère de la Transition Écologique et Solidaire



Une famille souhaite isoler le pignon de sa maison. La maçonnerie est en béton ($\lambda_b = 1{,}5\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$), et a une surface (hors fenêtres) $S_m = 50\,\mathrm{m^2}$ et une épaisseur $e_b = 15\,\mathrm{cm}$. Il est percé de cinq fenêtres identiques, toutes de surface $S_f = 2\,\mathrm{m^2}$, faites d'une épaisseur $e_v = 5\,\mathrm{mm}$ de simple vitrage ($\lambda_v = 1{,}25\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$).

L'objectif de l'exercice est de comparer deux solutions d'isolation : ou bien recouvrir l'ensemble du béton cellulaire d'une couche de laine de verre, ou bien installer des fenêtres en double vitrage.

Donnée : $1/2{,}6 = 3{,}8$ et $1/12 = 0{,}08$.

1 - Établir l'expression de la résistance thermique R_{th} d'une paroi plane d'épaisseur e et de surface S. En déduire la résistance R_m du mur en béton et celle R_f d'une fenêtre.

2 - Exprimer la résistance thermique R du pignon non isolé et la calculer numériquement.

3 - La première possibilité est d'isoler la maçonnerie par une couche de laine de verre ($\lambda_{lv} = 4 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$) d'épaisseur $e_{lv} = 10\,\mathrm{cm}$. Exprimer et calculer numériquement la résistance thermique R' du pignon isolé de la sorte.

4 - Le second choix d'isolation consiste à installer du double vitrage, composé de deux lames de verre d'épaisseur $e = 4\,\mathrm{mm}$ entourant une couche d'air d'épaisseur $e' = 12\,\mathrm{mm}$ ($\lambda_{air} = 2{,}5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$), suffisamment fine pour que les mouvements de convection y soient négligeables. Calculer la résistance thermique R'_f d'une fenêtre en double vitrage.

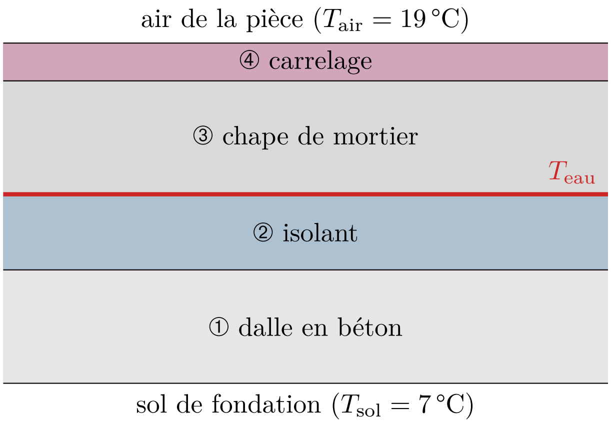
5 - En déduire la résistance thermique R'' du pignon pour lequel toutes les fenêtres auraient été remplacées.

6 - Conclure : quels travaux faut-il envisager en priorité ?

Exercice 5 : Plancher chauffant 2 | 2 |

▷ *Loi de Newton ;*
▷ *Association de résistances thermiques.*

Un plancher chauffant est un système de chauffage des bâtiments par le sol dans lequel l'énergie de chauffage est transmise au plancher via un réseau hydraulique circulant sous le plancher (des systèmes de chauffage électrique existent également). Dans les constructions modernes, bien isolées, la température de l'eau peut être relativement basse, de l'ordre de 25 °C, ce qui rend le plancher chauffant particulièrement adapté aux chauffages écologiques de nouvelle génération comme la géothermie et le chauffage solaire. Cet exercice a pour but d'étudier l'installation schématisée ci-dessous, destinée à chauffer une salle de vie de $40\,\mathrm{m}^2$ au sol. Pour simplifier, on suppose que le réseau hydraulique impose la température $T = T_{\mathrm{eau}}$ à l'interface entre l'isolant et le mortier.



Matériau	Conductivité λ ($\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$)	Épaisseur e (cm)
④ Carrelage	1,3	1
③ Mortier	1,1	3
② Isolant	0,02	2
① Béton	1,4	10

On suppose un contact thermique parfait entre les différents matériaux de la construction. En revanche, les transferts thermiques entre le carrelage et l'air de la pièce sont décrits par la loi de Newton conducto-convective :

$$\vec{j}_{\mathrm{cc}} = h(T_{\mathrm{s}} - T_{\mathrm{air}})\vec{u}$$

avec $h = 10\,\mathrm{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}}$ le coefficient d'échange conducto-convectif, T_{s} la température de surface du carrelage et $\vec{u}$ un vecteur unitaire dirigé du carrelage vers l'air.

1 - Montrer que la loi de Newton se traduit par une résistance thermique d'interface R_{i}, dont on établira l'expression en fonction de h et S.

2 - Donner le schéma électrique équivalent de l'installation. En déduire la résistance thermique totale R entre la « couche » d'eau et l'air de la pièce. La calculer numériquement.

Dans une région au climat est assez doux (comme la Normandie !), une pièce de $40\,\mathrm{m}^2$ bien isolée nécessite en hiver une puissance de chauffe de l'ordre de[1] 1 kW, alors qu'une maison mal isolée consomme quatre fois plus.

3 - En déduire la température T_{eau} à laquelle se trouve l'eau du circuit de chauffage pour chauffer la maison bien isolée.

4 - Les normes d'installation d'un plancher chauffant imposent que la température de surface du carrelage T_{s} n'excède pas 28 °C, ce qui correspond à la température de la plante des pieds. Quelle puissance maximale l'installation peut-elle fournir à l'habitation ? Commenter.

5 - Bien qu'une couche isolante soit placée sous les tuyaux de chauffage, une partie de l'énergie fournie par le plancher chauffant est perdue car cédée aux fondations. Proposer une définition du rendement du plancher chauffant et le calculer.

6 - Le choix du revêtement de sol est essentiel pour une bonne efficacité du plancher chauffant. En particulier, il est déconseillé d'utiliser un parquet en bois (conductivité de l'ordre de $0{,}2\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$). Proposer une explication.

1. Source : `https://particuliers.engie.fr/`

Exercice 6 : Survie d'un cosmonaute en Sibérie

CCINP MP 2022 | 2 | 2

▷ *Association de résistances thermiques ;*
▷ *Bilan thermique.*

Le sujet s'intéresse à l'exploit du russe Alexeï Leonov, premier être humain à avoir réalisé une sortie dans l'espace hors de son véhicule spatial, mission qui s'est avérée chaotique à plus d'un titre : allez voir Wikipédia ou le film « Le piéton » pour en connaître toutes les péripéties ! Lors de retour sur Terre, le vaisseau s'est posé à près de 400 km de l'endroit voulu, en plein cœur de la Sibérie. L'extrait proposé ici s'intéresse à la possibilité de la survie dans un tel milieu.

Un homme nu perd de l'énergie par des phénomènes de convection et de rayonnement avec une puissance surfacique $p_p = \alpha\left(T_h - T_{ext}\right)$ où T_h est la température de surface de la peau de l'homme, T_{ext} est la température du milieu extérieur supposée constante, ce qui permet de considérer α constante aussi égale à $\alpha = 9{,}0\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$. Il y a conduction à travers la peau d'épaisseur $e = 1\ \mathrm{mm}$ et de conductivité thermique $\lambda = 0{,}63\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$. La température du corps humain en dessous du derme est uniforme et égale à $T_{eq} = 310\,\mathrm{K} = 37\,°\mathrm{C}$. On se place en régime permanent. On fait l'hypothèse simplificatrice de planéité locale parce que l'épaisseur e est très inférieure aux rayons de courbure de la peau.

a) Définir la notion de résistance thermique R_{diff} de conduction associée au derme de l'homme nu dont la surface vaut $S = 1{,}5\ \mathrm{m^2}$. Donner son expression en fonction de e, λ et de S. Calculer sa valeur.

b) Définir la résistance de convection-rayonnement R_{cr} de l'homme nu et préciser si elle est en parallèle ou en série avec R_{diff}.

L'organisme de l'homme émet de l'eau par les voies respiratoires, ce qui correspond à une puissance $P_e = 8\ \mathrm{W}$. Le métabolisme lui apporte une puissance P_m.

c) Calculer la puissance P_m qui permettrait à un homme nu de vivre dans un environnement à $T_{ext} = 263\,\mathrm{K}$. Commenter, sachant qu'en général le métabolisme d'un homme normalement nourri peut lui fournir $150\,\mathrm{W}$.

d) En fait, les cosmonautes sont habillés de leur scaphandre qui les recouvrent à 90 %. On considère qu'au niveau de leur combinaison d'épaisseur $e' = 5\,\mathrm{cm}$, il n'y a plus ni convection ni rayonnement mais seulement conduction avec une conductivité égale à $\lambda' = 0{,}05\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$ et qu'on peut négliger le phénomène de diffusion thermique dans le derme. Calculer la résistance équivalente et la puissance P'_m qui permettrait aux cosmonautes de survivre à la température de $-10\ °\mathrm{C}$. Commenter.

Mais la température va descendre jusqu'à - 30 °C la nuit et, fort heureusement, un hélicoptère leur a largué des vêtements adaptés au grand froid et des sauveteurs arrivés en ski ont pu leur construire une cabane pour s'abriter jusqu'à leur départ le lendemain vers une zone où un hélicoptère pouvait se poser.
De retour à Moscou, ce fut la gloire pour nos deux cosmonautes mais ce fut la dernière mission triomphale pour les Soviétiques. Plus tard, Leonov fut le commandant de l'équipe russe de la première collaboration avec les Etats-Unis en 1975 et il a beaucoup œuvré pour ce rapprochement.

Exercice 7 : Igloo

oral banque PT | 2 | 2

▷ *Résistance thermique ;*
▷ *Coordonnées sphériques.*

Quatre explorateurs sur la banquise construisent un igloo de rayon R pour s'abriter du froid. Les murs sont d'épaisseur $e = 50\,\mathrm{cm}$ et chaque explorateur dégage une puissance de $50\,\mathrm{W}$. L'igloo est fait de neige tassée de conductivité thermique $0{,}5\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$. Pour simplifier, on néglige tout transfert thermique par le sol.

1 - Déterminer le flux sortant d'une demi-sphère de rayon $R \leq r \leq R+e$.

2 - Établir l'expression de la résistance thermique de l'igloo.

3 - Les explorateurs ont-ils intérêt à construire un igloo de grande ou petite taille ?

4 - L'igloo a un rayon intérieur de $1\,\mathrm{m}$ et la température externe est de $-10\,°\mathrm{C}$. Déterminer la température interne en régime permanent.

Bilans mésoscopiques

Exercice 8 : Géothermie

2 | 2

▷ *Bilan mésoscopique ;*
▷ *Source thermique ;*
▷ *Coordonnées cartésiennes.*

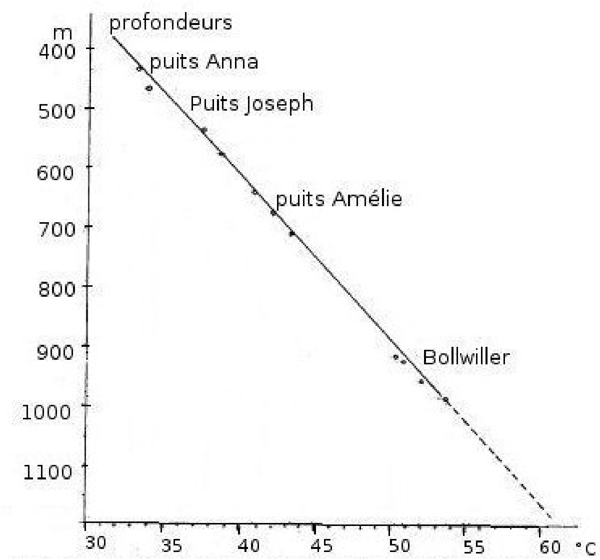


Figure 3 – Température en fonction de la profondeur. La courbe représente la température mesurée au fond de différents puits de mines alsaciens en fonction de leur profondeur.

La croûte continentale terrestre a une épaisseur moyenne de $30\,\mathrm{km}$, limitée par la discontinuité de Moho. Sa conductivité thermique moyenne vaut $\lambda = 2{,}5\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$. Au niveau de la surface, la température vaut en moyenne $T_0 = 13\,°\mathrm{C}$. Les éléments radioactifs présents dans la croûte terrestre libèrent, en se désintégrant, une puissance volumique p supposée uniforme.

On néglige localement la courbure de la Terre et on se place en régime permanent : la température ne dépend que de la profondeur z, mesurée le long d'un axe vertical descendant.

1 - Établir l'équation différentielle régissant le champ de température $T(z)$.

2 - Combien de conditions aux limites sont nécessaires pour la résolution ? Les identifier, en s'aidant notamment de la figure 3.

3 - Procéder à la résolution et représenter graphiquement le profil de température.

4 - Estimer un ordre de grandeur de p sachant que la température au niveau de la discontinuité de Moho est de l'ordre de $600\,°\mathrm{C}$.

5 - Cette puissance libérée par la Terre peut être récupérée : c'est la géothermie. Déterminer le flux géothermique surfacique en Alsace. En déduire l'énergie potentiellement récupérable par géothermie sur un an. On estime pour cette région un potentiel solaire annuel de l'ordre de $1220\,\mathrm{kWh/m^2}$: commenter.

Exercice 9 : Ailette de refroidissement 2 | 2 |

▷ *Bilan mésoscopique ;*
▷ *Transfert thermique conducto-convectif ;*
▷ *Coordonnées cartésiennes.*

Pour améliorer le refroidissement de circuits électroniques ou de moteurs, on y ajoute des ailettes de refroidissement en nombre et forme variés afin d'évacuer de la chaleur vers l'air ambiant par transfert conducto-convectif.

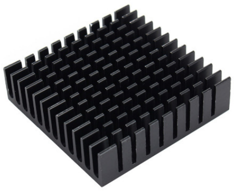


Figure 4 – Ailettes de refroidissement d'un processeur.

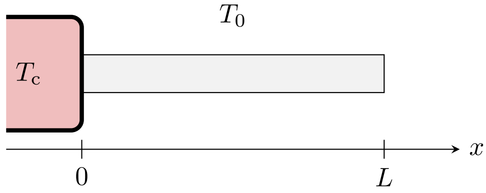


Figure 5 – Schéma de l'ailette étudiée.

On étudie ici une ailette parallélépipédique, de longueur L dans la direction x et de côtés a et b dans les directions y et z, faite d'un matériau de conductivité λ. Cette ailette est accolée au composant à refroidir, de température T_c, et placée dans l'air de température supposée uniforme T_0. Les échanges entre l'ailette et l'air sont modélisés par la loi de Newton : le flux $\mathrm{d}\varphi$ cédé à l'air par un élément de surface $\mathrm{d}S$ de l'ailette s'écrit

$$\mathrm{d}\varphi = h(T - T_0)\,\mathrm{d}S\,.$$

Hypothèses de travail :

▷ le régime est stationnaire ;
▷ la température est uniforme sur une section donnée de l'ailette ;
▷ l'ailette est en contact thermique parfait avec le matériau à refroidir ;
▷ la longueur de l'ailette est assimilée à une longueur infinie.

1 - Montrer que la température vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} - \frac{1}{\delta^2}T = -\frac{1}{\delta^2}T_0\,,$$

avec δ à exprimer en fonction des données. Préciser ce que signifie l'hypothèse d'ailette infinie.

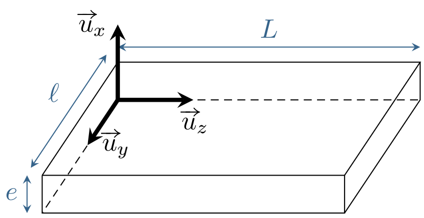
2 - Résoudre cette équation différentielle.

3 - Calculer la puissance thermique totale dissipée par l'ailette.

4 - On observe sur la figure 4 plusieurs ailettes montées les unes à côté des autres. Quel en est l'intérêt par rapport à une seule ailette de plus grandes dimensions ? On pourra comparer la puissance dissipée par N^2 ailettes de dimensions latérales $a \times b$ à celui d'une unique ailette plus grande, de dimensions $Na \times Nb$.

Exercice 10 : Température dans une plaque conductrice oral banque PT | 3 | 2

▷ *Bilan mésoscopique ;*
▷ *Effet Joule ;*
▷ *Transfert thermique conducto-convectif.*



On étudie une plaque d'épaisseur e très inférieure à sa longueur L et sa largeur ℓ. Elle est faite dans un métal de conductivité électrique σ et de conductivité thermique λ. Un courant de densité uniforme $\vec{j} = J_0\,\vec{u}_z$ parcourt la plaque.

1 - Quelle est l'intensité du courant qui traverse la plaque ? Quelle puissance volumique est transmise à la plaque ?

On modélise les transferts thermiques avec l'air par la loi de Newton : en valeur absolue, la plaque échange avec l'air une puissance surfacique

$$P_N = h\,|T_0 - T_{air}|\,,$$

avec T_0 la température de surface de la plaque.

2 - Déterminer T_0 en régime stationnaire.

3 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$.

La résolution de cette équation, non demandée, donne une loi de température

$$T(x) = \frac{{J_0}^2}{\lambda\sigma} x(e-x) + \frac{{J_0}^2 e}{2h\sigma} + T_{\text{air}}\,.$$

4 - Commenter qualitativement l'expression. Représenter le profil de température pour x allant de $-e$ à $2e$.

5 - Exprimer la puissance thermique qui traverse une section de normale $\vec{u}_x$.

Bilans thermiques divers et variés

Exercice 11 : Four industriel — oral banque PT | 2 | 2

- *Transitoire thermique ;*
- *Équation de la chaleur ;*
- *Temps caractéristique de diffusion.*

Cet exercice s'intéresse au chauffage d'une pièce dans un four industriel. La pièce est cubique de côté a, faite d'un matériau de capacité thermique massique c_p, de conductivité thermique λ et de masse volumique ρ. La pièce est posée sur un tapis roulant de longueur L reliant les deux extrémités du four avançant à vitesse constante V_0. La température de l'air à l'intérieur du four est uniformément égale à T_a. Dans le four, la pièce reçoit un flux surfacique $P_\text{s} = h(T_\text{a} - T)$ avec h une constante positive. L'objectif est de déterminer la vitesse V_0 du tapis pour que la pièce atteigne la température de consigne T_c.

1 - On suppose que la température de la pièce est uniforme. Déterminer $T(t)$.

2 - En déduire le temps nécessaire pour atteindre la température de consigne puis la vitesse V_0 en fonction de a.

3 - Établir l'équation de la chaleur à une dimension. En déduire un temps caractéristique de diffusion.

4 - En déduire une condition sur a impliquant λ, h et les températures pour que la température dans la pièce soit uniforme en sortie du four.

Exercice 12 : Bilan thermique d'un astéroïde — oral banque PT | 2 | 2

- *Régime permanent ;*
- *Source thermique ;*
- *Coordonnées sphériques.*

On étudie la température au sein d'un astéroïde modélisé par une sphère de rayon R, de conductivité λ, à l'équilibre thermodynamique. De l'énergie est libérée à l'intérieur de l'astéroïde par radioactivité : pendant un temps $\mathrm{d}t$, chaque élément de volume $\mathrm{d}\tau$ de l'astéroïde reçoit une énergie $\mathcal{P}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t$, $\mathcal{P}$ étant une constante. On raisonne sur une sphère de rayon $r < R$, indéformable et au repos.

1 - De quelles variables dépend la température dans l'astéroïde ?

2 - Calculer la chaleur cédée par la sphère de rayon r par conduction, en fonction notamment de la conductivité λ de l'astéroïde et du rayon r de la sphère.

3 - Calculer la chaleur créée dans la sphère de rayon r par radioactivité.

4 - Énoncer le premier principe de la thermodynamique. En déduire une relation entre ces deux chaleurs.

5 - Exprimer $T(r)$ en fonction de λ, $\mathcal{P}$, r et T_0 la température au centre de l'astéroïde.

L'astéroïde émet à sa surface par rayonnement une puissance surfacique $\mathcal{P}_\text{ray} = \sigma {T_\text{s}}^4$, avec σ une constante et T_s la température de surface.

6 - Déterminer la température T_0 au centre de l'astéroïde en fonction de R, λ, σ et $\mathcal{P}$.

Exercice 13 : Effet de cave

exemple officiel banque PT | 2 | 3

- ▷ *Régime sinusoïdal forcé ;*
- ▷ *Analogie électromagnétique.*

Une cave a été creusée en sous-sol d'une vieille propriété du XIX^e s, dans la vallée de la Loire. Une couche de tuffeau la sépare de la surface terrestre. Cette cave permettait historiquement de conserver les aliments et boissons à l'abri du gel.

Le tuffeau est une pierre tendre dont la masse volumique vaut 1.31 kg/L, sa conductivité thermique 0.41 W/m/K et sa capacité thermique massique est de 1.0 kJ/kg/K.

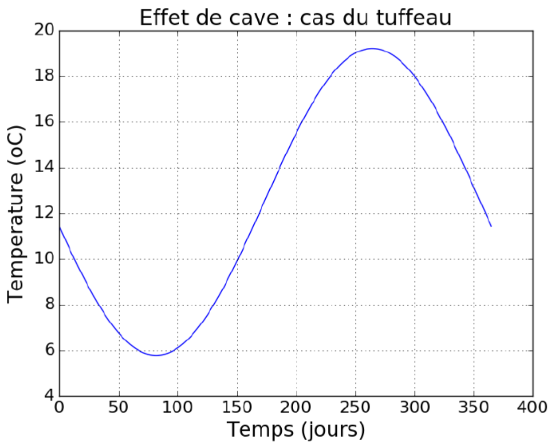
On suppose que la température en surface varie entre -15 ° C au premier janvier ($t = 0$) et 40 ° C au premier juillet sinusoïdalement.

1. Déterminer l'équation différentielle dite de la *chaleur* pour le champ de température $T(x, t)$, $x > 0$ repérant un point dans le sol pris sur un axe descendant. On fera apparaître la diffusivité du tuffeau et on effectuera l'application numérique.
2. Proposer une expression pour $T(x = 0, t)$.
3. En régime forcé, on pose :

$$T(x,t) = T_0 + u(x,t) \;;\; \underline{u}(x,t) = \underline{f}(x)e^{i\omega t}$$

Déterminer l'expression de $u(x, t)$ et par suite de $T(x, t)$, compte tenu des conditions aux limites. On fera apparaître le paramètre $\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\rho c \omega}}$ dont on calculera la valeur.

4. On fournit ci-dessous un relevé de la température dans la cave. Déterminer de deux façons différentes l'épaisseur du sol en tuffeau.



5. Quel phénomène similaire rencontre-t-on dans un autre domaine de la physique ? Expliquer pourquoi certaines caves à Champagne sont enterrées à plusieurs dizaines de mètres.

Exercice 14 : Gel d'un lac oral Centrale PSI | 3 | 3

▷ *Résistance thermique ;*
▷ *Changement d'état.*

> *L'énoncé est issu d'un oral posé à Centrale en PSI ... ceci étant, la même situation a été posée à l'écrit de la banque PT en 2022, avec davantage de questions.*

On étudie la formation d'une couche de glace à la surface d'un lac. La température de l'air en surface est $T_\mathrm{s} = -10\,°\mathrm{C}$ alors que l'eau liquide du lac est à sa température de fusion T_f. On note $e(t)$ l'épaisseur de la couche de glace à l'instant t et on suppose que $e(t=0) = 0$.

1 - Exprimer la densité de courant thermique j_Q dans la couche de glace en régime stationnaire en fonction de e notamment.

2 - On note $\mathrm{d}e$ l'épaisseur de glace formée entre t et $t + \mathrm{d}t$. Exprimer $\mathrm{d}e$ en fonction de j_Q, de l'enthalpie de fusion de la glace ℓ et de sa masse volumique μ. En déduire une équation différentielle vérifiée par $e(t)$.

3 - Résoudre cette équation et déterminer l'épaisseur formée au bout d'une journée, d'une semaine et d'un mois. Commenter.

Données : caractéristiques de la glace.
- ▷ Conductivité thermique : $\lambda = 2{,}1\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$;
- ▷ Masse volumique : $\mu = 917\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$;
- ▷ Enthalpie de fusion : $\ell = 333\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$.

Exercice 15 : Combinaison de plongée oral CCINP PSI | 3 | 2

▷ *Résolution de problème.*

Il y a risque d'hypothermie lorsque la température du corps passe en-dessous de 35 °C.

1 - Déterminer le temps au bout duquel il y a risque d'hypothermie pour un baigneur dans la Manche à 17 °C.

2 - Quelle doit être l'épaisseur d'une combinaison de plongée en néoprène pour éviter l'hypothermie lors d'une baignade infiniment longue ?

Données :
- ▷ capacité thermique massique du corps humain : $c_\mathrm{corps} = 3{,}5\,\mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$;
- ▷ résistance thermique de la peau : $R_\mathrm{peau} = 3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$;
- ▷ conductivité thermique du néoprène : $\lambda_\mathrm{néo} = 0{,}2\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$;
- ▷ puissance produite par le métabolisme : $P_\mathrm{corps} = 100\,\mathrm{W}$;
- ▷ puissance surfacique de perte du corps humain dans l'eau (par convection) : $P_\mathrm{conv} = \alpha(T_\mathrm{ext} - T)$, avec T la température de la peau, T_ext la température de l'eau et $\alpha = 10\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$.