BLAISE PASCAL
PT 2024-2025

Cours 21 – Électromagnétisme *Version prof*

Ondes électromagnétiques dans le vide

Plan du cours

Au programme

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 5 « Propagation ».

Cette partie, articulée autour des ondes électromagnétiques, est l'occasion d'illustrer l'efficacité du formalisme local des équations de Maxwell en insistant sur les aspects qualitatifs et sur la variété des applications qui en découlent. Le modèle de l'onde plane est présenté dans le cadre de l'espace vide de courant et de charge.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Équations de propagation des champs dans une région vide de charges et de courants.	Établir les équations de propagation à partir des équations de Maxwell.
Onde plane dans l'espace vide de charge et de courant. Onde plane progressive et aspects énergétiques.	Citer les solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension. Décrire la structure d'une onde plane et d'une onde plane progressive dans l'espace vide de charge et de courant.
Onde plane progressive monochromatique.	Expliquer le caractère idéal du modèle de l'onde plane monochromatique. Citer les domaines du spectre des ondes électromagnétiques et leur associer des applications. Exprimer le vecteur de Poynting et l'énergie électromagnétique volumique d'une onde plane progressive monochromatique. Effectuer une étude énergétique dans le cas d'une onde plane progressive.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Polarisation d'une onde plane progressive et monochromatique : polarisation rectiligne. Polariseurs.	Reconnaître une onde plane polarisée rectilignement. **Mettre en évidence une polarisation rectiligne.**

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 4 « Énergie du champ électromagnétique ».

Dans cette partie, on s'intéresse à l'aspect énergétique de l'électromagnétisme. L'accent est mis sur l'utilisation du flux du vecteur de Poynting pour évaluer une puissance rayonnée à travers une surface et sur les bilans d'énergie et de puissance.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Densité volumique d'énergie électromagnétique et vecteur de Poynting : bilan d'énergie.	Utiliser le flux du vecteur de Poynting à travers une surface orientée pour évaluer la puissance rayonnée. Effectuer un bilan d'énergie sous forme locale et intégrale. Interpréter chaque terme de l'équation locale de Poynting, celle-ci étant donnée.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Ces cinq dernières années au concours

- Écrit : épreuve A 2020 et 2022, épreuve de modélisation 2023.
- Oral : régulièrement.

L'objectif de ce chapitre est de comprendre les principaux aspects liés à la propagation des ondes électromagnétiques (OEM) dans le vide, sachant que l'air peut être assimilé au vide électromagnétique en très bonne approximation.

Rappel préalable : qu'est-ce qu'une onde ?

R

On appelle **onde** la propagation de proche en proche d'une perturbation,
associée à un transport d'énergie sans transport de matière à grande distance.

Une onde est dite **mécanique** si elle a besoin d'un milieu matériel pour se propager.

> ***Exemples :*** *les ondes sonores ou les vagues sont des ondes mécaniques, au contraire des OEM.*

Pour qu'il y ait propagation, il faut qu'il y ait couplage entre deux champs : $\vec{E}$ et $\vec{B}$ nous concernant, hauteur d'eau et vitesse d'une particule fluide pour une vague, etc. Pour traduire la propagation, les deux grandeurs couplées doivent dépendre à la fois de l'espace et du temps.

Source des ondes électromagnétiques : (dans une description classique, par opposition à quantique)
- charges fixes ? créé un champ électrostatique

Espace 1

- charges en mouvement uniforme ? c'est un courant, qui créé un champ magnétostatique

Espace 2

$\rightsquigarrow$ source des OEM : charges accélérées

Restriction dans ce chapitre : étude des champs dans une zone vide de charge et de courants, c'est-à-dire qu'on ne se préoccupe pas des mécanismes d'émission.

I - Équation de propagation

L'équation de propagation d'une onde est une équation aux dérivées partielles qui implique les dérivées spatiales et temporelles de la grandeur qui se propage. Elle s'obtient à partir des équations fondamentales : les équations de Maxwell pour une OEM, le PFD pour une onde mécanique.

Rappel : équations de Maxwell dans le vide.

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

I.A - Un peu d'analyse vectorielle pour la route

Formule du double rotationnel :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{A}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{A}) - \vec{\Delta}\vec{A}$$

où intervient l'opérateur **laplacien vectoriel**, qui à un champ vectoriel $\vec{A}$ associe le champ vectoriel $\vec{\Delta}\vec{A}$, donné en coordonnées cartésiennes par

$$\vec{\Delta}\vec{A} = (\Delta A_x)\vec{e}_x + (\Delta A_y)\vec{e}_y + (\Delta A_z)\vec{e}_z$$

où Δ est l'opérateur laplacien scalaire.

L'opérateur laplacien vectoriel s'applique à un champ vectoriel et renvoie un champ vectoriel.

R

Remarque : *en explicitant l'expression en coordonnées cartésiennes et en réorganisant les différents termes,*

$$\begin{aligned}
\vec{\Delta}\vec{A} &= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)\vec{e}_x \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\vec{e}_y \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\vec{e}_z \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z\right) \\
&\quad + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z\right) \\
&\quad + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z\right) \\
\vec{\Delta}\vec{A} &= \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

ce qui explique pourquoi le laplacien vectoriel est en pratique noté indifféremment avec ou sans flèche.

En revanche, l'égalité $\vec{\Delta}\vec{A} = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\vec{A})$ n'est plus vraie : $\vec{A}$ est un champ vectoriel, donc son gradient n'est pas défini (au moins à notre niveau).

I.B - Équation de propagation pour le champ électrique

Méthode : exprimer les deux termes de la formule du double rotationnel avec les équations de Maxwell et les identifier.

D'une part,

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}\right) = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

D !

les dérivées spatiales et temporelles commutent car les variables sont indépendantes.

D'autre part,

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\operatorname{div} \vec{E}\right) - \Delta\vec{E} = \vec{0} - \Delta\vec{E}$$

En conclusion,

$$\Delta\vec{E} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\,.$$

Espace 3

I.C - Équation de propagation pour le champ magnétique

D !

Application 1 : Équation de propagation pour le champ magnétique

Établir l'équation de propagation pour le champ magnétique.

D'une part,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}\right) = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

D'autre part,

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\,\vec{B}\right) - \Delta\vec{B} = \vec{0} - \Delta\vec{B}$$

En conclusion,

$$\Delta\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\,.$$

Espace 4

I.D - Bilan

- **Interprétation physique du terme $\varepsilon_0\mu_0$**

M

Équation aux dimensions associée à l'équation de propagation :

$$\frac{[\vec{E}]}{\mathrm{m}^2} = [\varepsilon_0\mu_0]\frac{[\vec{E}]}{\mathrm{s}^2} \qquad \text{d'où} \qquad [\varepsilon_0\mu_0] = \mathrm{s}^2\cdot\mathrm{m}^{-2}$$

ce qui permet d'identifier une vitesse

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

- **Forme canonique de l'équation de propagation**

Dans le vide, les champs électrique et magnétique vérifient la même équation de propagation, appelée **équation de d'Alembert** ou parfois **équation d'onde**

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \qquad \vec{\Delta}\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

où $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ est la **célérité** ou **vitesse de propagation** de l'OEM.

Remarques diverses :

- L'équation de d'Alembert se retrouve dans une grande variété de phénomènes ondulatoires : par exemple, le champ de pression d'une onde acoustique ou la vibration d'une corde de guitare vérifient également une équation de d'Alembert.
- Par ailleurs, on constate que cette équation est linéaire, ce qui n'est pas une surprise car les équations de Maxwell le sont. En conséquence, toutes les composantes du champ électromagnétique vérifient également l'équation de d'Alembert (où Δ prend cette fois la signification du laplacien scalaire).
- En métrologie, la valeur de c est fixée par définition du mètre ... et n'est donc pas mesurable !
- L'équation de d'Alembert ne nous sera utile que dans les cas de propagation, donc avec dépendance en temps, mais tous les champs statiques calculés dans les chapitres précédents en sont solution également tant que l'on est à l'extérieur de la distribution de charge ou de courant.

- **Généralisation aux milieux matériels**

L'équation de d'Alembert peut se généraliser en première approche aux **milieux transparents**, à condition de remplacer la célérité dans le vide c par la célérité c/n dans le milieu, où n est l'**indice optique du milieu**. Toutefois, même les milieux transparents sont partiellement absorbants : décrire de manière précise cette absorption n'est pas possible avec l'équation de d'Alembert et nécessite une modélisation plus fine du comportement du milieu.

En revanche, la présence d'un champ électromagnétique engendre un courant électrique dans un milieu conducteur : l'équation de d'Alembert n'est plus du tout applicable. Cette situation sera étudiée dans le chapitre suivant.

II - Ondes planes

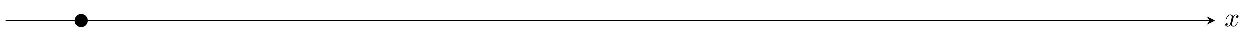
L'équation de d'Alembert admet une grande variété de solutions, qui sont déterminées par les conditions aux limites et les conditions initiales. On s'intéresse dans ce paragraphe à certaines de ces solutions : les ondes planes, auxquelles on va progressivement rajouter des raffinements.

II.A - Modèle des ondes planes

- **Définition par les surfaces d'onde**

On appelle **surface d'onde** une surface continue de l'espace sur laquelle le champ électromagnétique est uniforme à tout instant.

Quelle est la forme des surfaces d'ondes ?



Une onde est dite **plane** si ses surfaces d'ondes sont des plans parallèles, appelés **plans d'onde**, et **sphérique** si ses surfaces d'ondes sont des sphères concentriques.

Une onde sphérique modélise une onde émise depuis une source ponctuelle (p.ex. un point lumineux). Une onde plane modélise p.ex. une telle onde à grande distance de la source : on approxime alors la sphère par son plan tangent.

Des dispositifs particuliers (lentille, etc.) placés sur le trajet de l'onde peuvent modifier sa nature.

- **Définition mathématique**

De quelle(s) variable(s) dépend une onde plane ?

$\vec{E}$ est uniforme dans un plan d'onde, donc il ne dépend que de l'abscisse x du plan d'onde mais ni de y ni de z.

Espace 5

R

Une onde est dite **plane** si elle ne dépend que du temps et d'une dimension spatiale cartésienne :

$$\vec{E}(M,t) = \vec{E}(x,t) \qquad \text{et} \qquad \vec{B}(M,t) = \vec{B}(x,t)\,.$$

(vrai pour toute onde plane)

Simplification de l'équation de d'Alembert pour une onde plane :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}\,.$$

Pour simplifier les écritures, on suppose dans toute la suite de ce paragraphe que le champ électrique garde une direction constante $\vec{e}_\mathrm{p}$ tout au long de la propagation (polarisation rectiligne).

II.B - Rappel de PTSI : Ondes planes progressives

- **Définition**

Une onde plane est dite **progressive** si elle se propage dans un sens bien déterminé, sans étalement ni déformation.

Une onde plane progressive (OPP) correspond à l'image intuitive qu'on se fait d'une onde, par exemple la houle.

> ***Exemples :*** *houle, laser, etc.*

Espace 6

> ***Contre-exemples :***
>
> *Rond dans l'eau : il y a étalement donc pas une onde plane ;*
> *Corde de guitare : il n'y a pas de propagation (onde stationnaire)*
> *Onde acoustique dans une mousse isolante : il y a absorption donc déformation.*

Espace 7

- **Expression mathématique**

R

Mathématiquement, une OPP se propageant dans le sens des x croissants s'écrit

$$\vec{E}(x,t) = f(x-ct)\,\vec{e}_\mathrm{p} = F\left(t - \frac{x}{c}\right)\vec{e}_\mathrm{p}$$

alors qu'une OPP se propageant dans le sens des x décroissants s'écrit

$$\vec{E}(x,t) = g(x+ct)\,\vec{e}_\mathrm{p} = G\left(t + \frac{x}{c}\right)\vec{e}_\mathrm{p}\,.$$

où les fonctions f, F, g et G sont des fonctions **d'une seule** variable.

(vrai uniquement si l'onde plane est progressive)

> ***Rappel de notation :*** *$\vec{e}_\mathrm{p}$ est un vecteur unitaire qui renseigne sur la polarisation de l'onde, c'est-à-dire la direction du champ électrique (cf. plus loin) ... à ne pas confondre avec la direction de propagation ! Même si ce n'est pas toujours le cas, on le suppose pour le moment constant.*

➠ Pour approfondir : Montrons que les ondes planes sont bien des solutions de l'équation de d'Alembert. À titre d'exemple, considérons une onde de la forme $\vec{E}(x,t) = f(x-ct)\,\vec{e}_y$, c'est-à-dire une onde se propageant dans le sens des x croissants et polarisée selon $\vec{e}_y$. Posons $u = x - ct$. Alors,

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}u} \times \frac{\partial u}{\partial x} = f'(u) \times 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\mathrm{d}f'}{\mathrm{d}u} \times \frac{\partial u}{\partial x} = f''(u)\,.$$

Par ailleurs,

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}u} \times \frac{\partial u}{\partial t} = f'(u) \times (-c) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{\mathrm{d}(-c\,f')}{\mathrm{d}u} \times \frac{\partial u}{\partial t} = -cf''(u) \times (-c) = c^2 f''(u)\,.$$

On peut alors vérifier que E_y vérifie l'équation de d'Alembert,

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = f''(u) - \frac{1}{c^2} \times c^2 f''(u) = 0\,.$$

■

- **Représentation graphique d'une OPP**

Pour représenter une OPP, le plus visuel est un film où on voit l'onde avancer ... pas très pratique sur une feuille ☺. On rencontre donc deux types de représentation : M

▷ représentation spatiale (type photo) : on représente toute la corde à un instant t_0 donné (tous les x, un seul $t = t_0$)

▷ représentation temporelle (type chronogramme) : on représente le signal enregistré au cours du temps par un capteur situé à une position x_0 donnée (tous les t, un seul $x = x_0$).

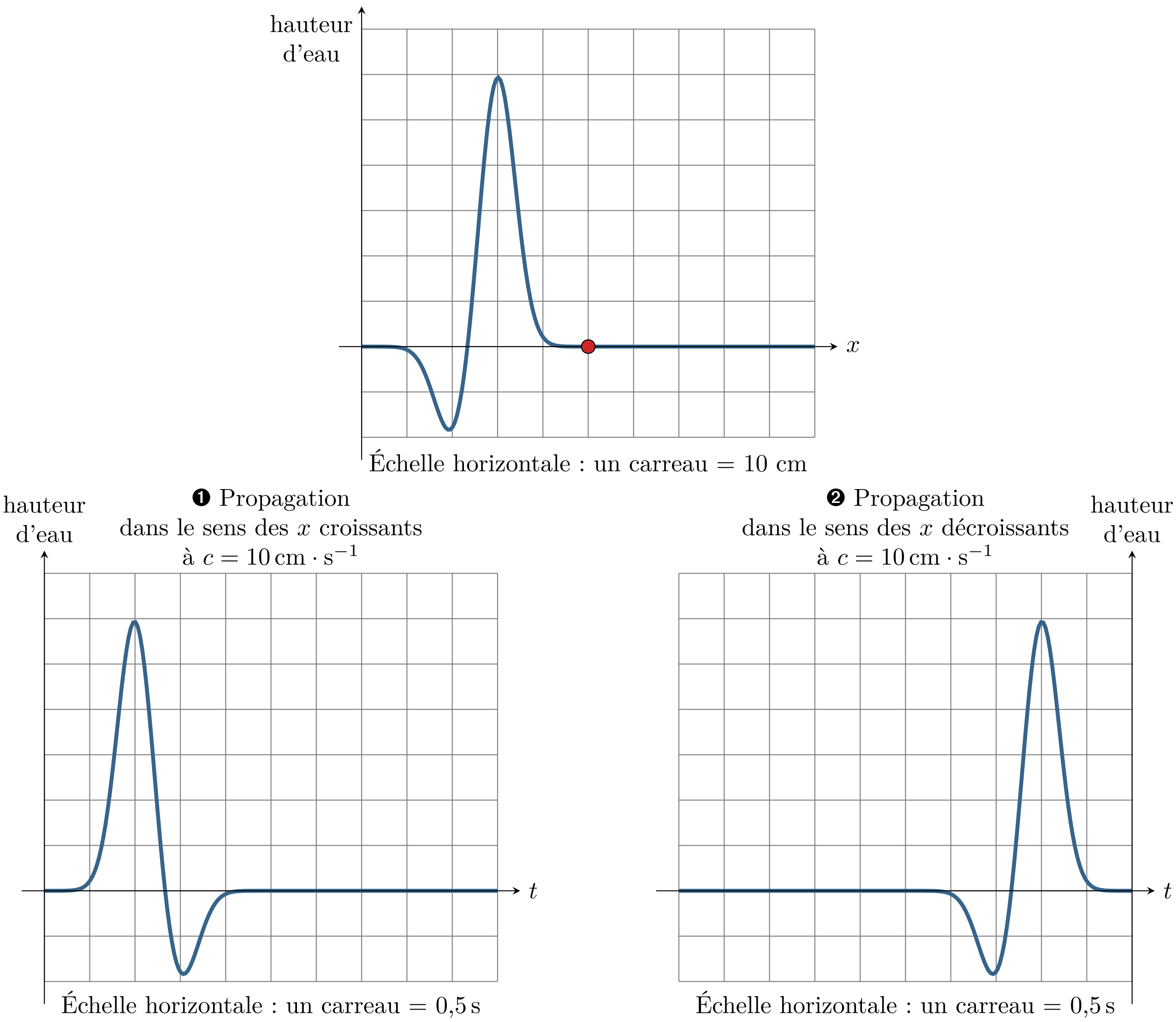


Figure 1 – Représentations d'une onde plane progressive.

Conclusion :

Q

Le lien entre les représentations de type photo et chronogramme d'une même onde dépend du sens de propagation, elles peuvent apparaître inversées l'une par rapport à l'autre.

- **Expression générale d'une onde plane quelconque**

De façon générale, on peut montrer que

Toute onde plane, solution de l'équation de d'Alembert 1d cartésienne, s'écrit comme la superposition de deux OPP se propageant en des sens opposés,

$$\vec{E}(x,t) = f(x-ct)\vec{e}_{\mathrm{p}} + g(x+ct)\vec{e}_{\mathrm{p}}\,.$$

(vrai pour toute onde plane, pas forcément progressive)

➽ **Pour approfondir :** Démontrons ce résultat. Notons $\xi(x,t)$ un champ quelconque d'onde plane, solution de l'équation de d'Alembert, et posons $u = x - ct$ et $v = x + ct$. On a alors

$$\xi(x,t) = \xi(u,v) = \xi\big(u(x,t), v(x,t)\big)\,.$$

Réécrivons l'équation de d'Alembert en termes de ces variables u et v, en reliant entre elles les dérivées. D'abord,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial u} \times \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial \xi}{\partial v} \times \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{=1} = \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \xi}{\partial v}\,.$$

En appliquant la même démarche pour calculer la dérivée seconde,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)\right] \times \frac{\partial u}{\partial x} + \left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}\right] \times \frac{\partial v}{\partial x}\\ &= \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + 2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}\end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Schwartz, qui permet de permuter l'ordre de dérivation par rapport à u et v, qui sont deux variables indépendantes. Un calcul analogue (mais un peu plus fastidieux car les dérivées de u et v par rapport au temps ne valent pas 1 mais $\pm c$) pour la dérivée temporelle conduit à

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} - 2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}\right)$$

Ainsi, l'équation de d'Alembert écrite en fonction de u et v se simplifie grandement et devient

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right) = 0\,.$$

Intégrons alors successivement par rapport aux deux variables. Une première intégration sur u, à v fixé, donne

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = G(v)\,,$$

où G est une fonction de v seulement, c'est-à-dire « une constante partielle par rapport à u ». L'intégration sur v, à u fixé, donne ensuite

$$\xi(u,v) = f(u) + g(v)\,,$$

où $G(v) = g'(v)$, et où f est une fonction de u seulement. En revenant à la définition de u et v,

$$\xi(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)\,,$$

ce qui est bien le résultat souhaité, puisque la seule hypothèse faite sur ξ est la nature d'onde plane. ■

II.C - Ondes planes progressives harmoniques

II.C.1 - Expression mathématique

Une onde plane progressive est dite **harmonique** ou **sinusoïdale** ou **monochromatique** si sa dépendance en temps est sinusoïdale en tout point,

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t \pm kx + \varphi)\vec{e}_\mathrm{p}\,,$$

le signe $\pm$ dépendant de sa direction de propagation.

R !

- **Intérêt physique**

Une OPPH ne peut pas représenter une « vraie » onde : elle n'a ni début ni fin, et existe depuis la nuit des temps et pour toujours et à jamais. Cependant, grâce à l'analyse de Fourier, toute OPP peut s'exprimer comme une somme d'OPPH.

⇝ comme l'équation de d'Alembert est linéaire, si on sait étudier les OPPH alors on peut étudier une OPP quelconque en raisonnant par superposition.

- **Double périodicité**

Une OPPH possède une double périodicité

▹ **périodicité temporelle** (sous-entendu en un point fixé $x = x_0$) : $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

▹ **périodicité spatiale** (sous entendu à un instant donné $t = t_0$) :

période spatiale = longueur d'onde, pulsation spatiale = k, et donc on a $k = 2\pi/\lambda$

Q

Espace 8

- **Représentation complexe d'une OPPH**

Exactement comme en électronique, « passer en complexe » signifie que l'argument du cosinus devient celui d'une exponentielle complexe. Comme il n'y a pas de risque de confusion, on note indifféremment i ou j.

Écriture complexe d'une OPPH :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t \pm kx + \varphi)\vec{e}_\mathrm{p} \qquad \longleftrightarrow \qquad \underline{\vec{E}} = E_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t \pm kx + \varphi)}\vec{e}_\mathrm{p} = \underline{\vec{E}_0}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t \pm kx)}$$

avec $\underline{\vec{E}_0} = E_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\vec{e}_\mathrm{p}$ l'**amplitude complexe** de l'onde.

Réciproquement, le champ électrique réel est la partie réelle du champ complexe,

$$\vec{E}(M,t) = \mathrm{Re}\,\underline{\vec{E}}\,.$$

M !

Attention ! Deux conventions différentes sont possibles pour l'écriture complexe du champ,

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E_0}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t \pm kx)}\vec{e}_\mathrm{p} \qquad \text{ou} \qquad \underline{\vec{E}} = \underline{E_0}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pm kx - \omega t)}\vec{e}_\mathrm{p}$$

Choisir l'une ou l'autre convention ne change pas les résultats physiques (la physique se moque des conventions !) ... mais change les calculs.

⇝ il faut **impérativement** conserver la même convention tout au long du calcul.

II.C.2 - Relation de dispersion

La relation de dispersion est une condition nécessaire pour qu'une OPPH soit solution de l'équation de d'Alembert. Elle s'obtient donc en injectant l'expression de l'OPPH dans l'équation de d'Alembert.

⇝ raisonnement de type « analyse-synthèse ».

Démonstration à partir des champs réels : considérons une OPPH de la forme

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e}_y\,.$$

Dérivée spatiale :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = +kE_0 \sin(\omega t - kx)\vec{e}_y \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k^2 E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e}_y\,.$$

D

Dérivée temporelle :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\omega E_0 \sin(\omega t - kx)\,\vec{e}_y \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 \cos(\omega t - kx)\,\vec{e}_y$$

En insérant dans l'équation de d'Alembert :

$$-k^2 + \frac{1}{c^2}\omega^2 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \omega = kc$$

Espace 9

D

Démonstration à partir des champs complexes : considérons la même OPPH ... mais en représentation complexe,

$$\underline{E}(x,t) = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)}\,\vec{e}_y\,.$$

Dérivée spatiale :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = -\mathrm{i}kE_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)}\,\vec{e}_y \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k^2 E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)}\,\vec{e}_y\,.$$

Dérivée temporelle :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = +\mathrm{i}\omega E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)}\,\vec{e}_y \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)}\,\vec{e}_y$$

ce qui redonne bien le résultat en injectant dans l'équation de d'Alembert.

Espace 10

Généralisation :

R !

Les périodes spatiales et temporelles d'une OPPH sont liées par la **relation de dispersion**,

$$\omega = kc \qquad \text{soit} \qquad f = \frac{c}{\lambda}\,.$$

La relation de dispersion est une conséquence de l'équation de propagation.

(vrai pour toutes les ondes planes harmoniques, qu'elles soient progressives ou stationnaires)

II.C.3 - Vecteur d'onde

R

On appelle **vecteur d'onde** d'une OPPH le vecteur de norme $2\pi/\lambda$ de même direction et même sens que la propagation

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\,\vec{u}\,.$$

$\vec{k}$ est homogène à l'inverse d'une longueur et s'exprime en $\mathrm{rad}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

Attention ! La direction de propagation est définie pour toute onde plane, le sens n'est défini que pour les ondes planes progressives, et la longueur d'onde (donc le vecteur d'onde) n'ont de sens que pour les OPPH !

Par définition, tous les points d'un même plan d'onde sont dans le même état vibratoire, donc le champ électrique ne dépend que de la composante du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la direction de $\vec{k}$, c'est-à-dire de $\vec{k}\cdot\overrightarrow{OM}$.

⇝ cohérent avec le cas simple : $\vec{k} = k\vec{e}_x$ et donc $\vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} = kx$.

Dans le cas général, le champ électrique d'une OPPH s'écrit

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} + \varphi)\vec{e}_\mathrm{p} \qquad \longleftrightarrow \qquad \underline{\vec{E}} = E_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM}+\varphi)}\vec{e}_\mathrm{p} = \underline{\vec{E}_0}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM})}$$

où ω et $||\vec{k}||$ sont reliés par la relation de dispersion.

R

Il n'y a cette fois pas de signe ±, par définition de $\vec{k}$ qui est toujours orienté dans le sens de propagation.

II.C.4 - Spectre des ondes électromagnétiques

Les milieux matériels se comportent de manière assez nettement différente en fonction de la fréquence des ondes électromagnétiques qu'ils reçoivent. Ainsi, beaucoup d'applications n'utilisent qu'une étroite bande de fréquence du spectre des OEM.

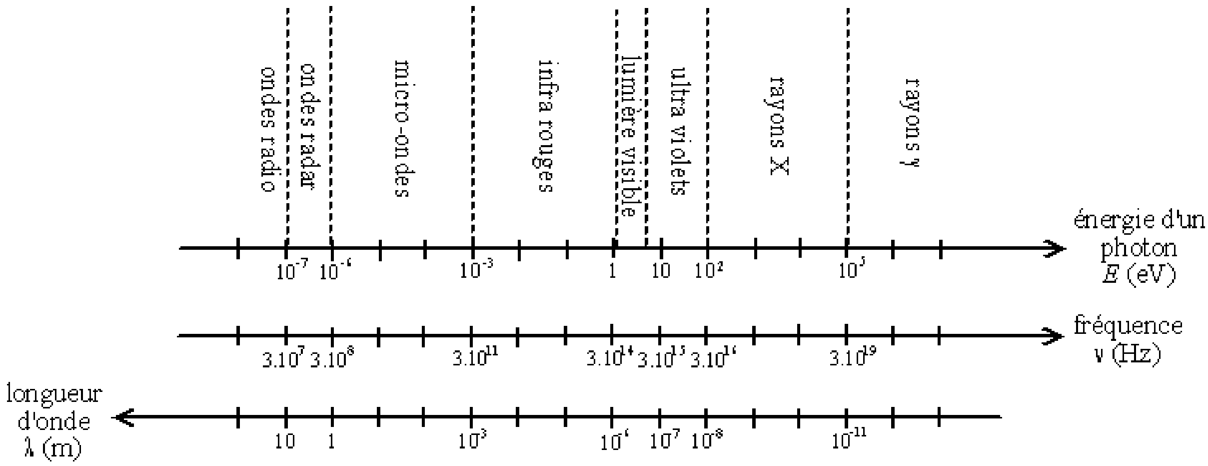


Figure 2 – Spectre électromagnétique. Figure extraite de Wikipédia.

Le domaine des télécommunications fait largement usage des ondes électromagnétiques. Les choix de bande de fréquences affectée aux diverses applications sont d'une part historiques (un nouveau système ne doit pas perturber un dispositif déjà existant), mais résultent également de critères techniques : en particulier, la longueur d'onde joue un rôle critique dans le fonctionnement des systèmes utilisant des antennes. Notons que l'affectation d'une bande de fréquence à un type d'application est du ressort de la loi, car elle est considérée comme un partage du domaine public. Par exemple,

- ▷ le transport des signaux radiophoniques utilise des ondes radio, dont la fréquence porteuse est de l'ordre de la centaine de mégahertz pour la bande FM : la fréquence « 107.7 » de Autoroute Info indique une porteuse de fréquence 107,7 MHz ;
- ▷ la TNT exploite un domaine spectral de fréquences supérieures, comprises entre 470 et 790 MHz ;
- ▷ la téléphonie mobile utilise des ondes de fréquences encore plus élevées, de l'ordre du gigahertz (10^9 Hz), le réseau 5G utilise(ra) par exemple des fréquences allant de 3,46 à 3,80 GHz ;
- ▷ le réseau WiFi repose lui sur l'utilisation de deux bandes de fréquences, la première autour de 2,4 GHz et la deuxième à un peu plus de 5 GHz.

Les rayons X et rayons γ sont qualifiés de rayonnements ionisants, c'est-à-dire à même d'arracher un électron à un atome. L'emploi de rayons X est l'une des principales techniques d'imagerie médicale, également utilisée pour l'étude de la matière à l'échelle atomique (structure cristalline, etc). Les rayons γ sont produits par la désintégration de noyaux radioactifs. Ils sont également exploités en imagerie médicale et en spectroscopie, mais peuvent provoquer de graves lésions (cancers, altération de l'ADN, etc.)

II.D - Relation de structure

La relation de structure est une relation intrinsèque entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$, qui ne fait pas intervenir leurs dérivées, au contraire des équations de Maxwell. Le plus simple pour l'établir est de raisonner en représentation complexe.

- **Opérateurs vectoriels appliqués aux champs complexes**

Le champ complexe s'écrit

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM})}\,\vec{e}_\mathrm{p} = \underline{E_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}\,\vec{e}_\mathrm{p}$$

ce qui permet d'identifier les dérivées :

R D

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = \mathrm{i}\omega\underline{\vec{E}} \qquad \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial x} = -\mathrm{i}k_x\underline{\vec{E}}$$

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial y} = -\mathrm{i}k_y\underline{\vec{E}} \qquad \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial z} = -\mathrm{i}k_z\underline{\vec{E}}$$

ou de façon plus générale $\boxed{\vec{\nabla} \leftrightarrow -\mathrm{i}\,\vec{k}}$.

Espace 11

Attention ! La convention choisie sur la représentation complexe du champ a une importance dans l'écriture des dérivées : elle change le signe. Dans le deuxième cas,

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -\mathrm{i}\omega \qquad \text{et} \qquad \vec{\nabla} \leftrightarrow \mathrm{i}\,\vec{k}$$

⇝ il faut retenir l'idée des résultats, mais les retrouver à chaque fois.

- **Équations de Maxwell complexes**

Rappel : $\operatorname{div}\vec{v} = \vec{\nabla}\cdot\vec{v}$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v} = \vec{\nabla}\wedge\vec{v}$.

$$-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} = 0 \qquad -\mathrm{i}\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = -\mathrm{i}\omega\underline{\vec{B}}$$

$$-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\underline{\vec{B}} = 0 \qquad -\mathrm{i}\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}} = \mathrm{i}\omega\varepsilon_0\mu_0\underline{\vec{E}} = \frac{\mathrm{i}\omega}{c^2}\underline{\vec{E}}$$

D

En représentation complexe, les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent

$$\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} = 0 \qquad \vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = \omega\underline{\vec{B}}$$

$$\vec{k}\cdot\underline{\vec{B}} = 0 \qquad \vec{k}\wedge\underline{\vec{B}} = -\omega\varepsilon_0\mu_0\underline{\vec{E}} = -\frac{\omega}{c^2}\underline{\vec{E}}$$

Ces relations sont indépendantes de la convention choisie pour l'exponentielle complexe.

- **Conséquence : relation de structure**

La pulsation et le vecteur d'onde étant réelles, la relation issue de MF s'écrit à l'identique pour l'onde réelle :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega} = \frac{k\vec{u}\wedge\vec{E}}{kc} = \vec{u}\wedge\frac{\vec{E}}{c}$$

Réciproquement, l'équation de Maxwell-Ampère donne

$$\vec{E} = -\frac{c^2}{\omega}\vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{c^2}{kc}k\vec{u} \wedge \vec{B} = -c\vec{u} \wedge \vec{B}\,.$$

En calculant un double produit vectoriel avec la direction de propagation $\vec{u}$, on montre que cette relation est exactement équivalente à la précédente.

Ces relations étant vraies pour toute OPPH, elle sont également vraies par linéarité pour toute OPP en tant que somme d'OPPH se propageant dans le même sens, donc de même vecteur $\vec{u}$.

Relation de structure d'une OPP :

$$\vec{B} = \vec{u} \wedge \frac{\vec{E}}{c}$$

En particulier, les OPP sont des **ondes transverses** :
les champs sont perpendiculaires à la direction de propagation.
Ils sont également perpendiculaires entre eux.

(vrai pour toute OPP, mais faux pour les sommes d'OPP se propageant en sens différents)

Dans le cas particulier d'une OPPH, cette relation prend la forme

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

R ! D

Nécessité du couplage : Cette relation met en évidence le couplage entre les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ qui ne peuvent aller l'un sans l'autre : il n'existe pas d'onde « électrique » ni d'onde « magnétique », mais seulement des ondes électromagnétiques.

Conséquence géométrique : le trièdre $\vec{u}, \vec{E}, \vec{B}$ est un trièdre direct, i.e. orienté par la règle de la main droite

le dessiner.

Espace 12

Conséquence sur les normes :
$||\vec{B}|| = \frac{||\vec{E}||}{c}$.

Espace 13

III - Polarisation

On appelle **polarisation** d'une OPP la direction du vecteur champ électrique de l'onde.

R

⇝ direction de polarisation est décrite par un vecteur unitaire $\vec{e}_{\mathrm{p}}$, qui peut dépendre du temps.

Direction du champ magnétique :
se détermine avec la relation de structure.

Espace 14

Attention ! Ne pas confondre direction de polarisation et direction de propagation, les deux sont orthogonales.

La polarisation des OEM est source de phénomènes très riches et (donc ?) assez complexes. Elle est reliée aux propriétés quantiques (spin) du photon. Les applications sont très vastes, allant de l'identification de minéraux (les belles couleurs du feldspath et de l'olivine en TP de SVT !) au cinéma 3d. L'œil humain est incapable de percevoir la polarisation, mais certains animaux (abeilles, etc.) le peuvent.

III.A - Exemples d'états de polarisation d'une onde électromagnétique

- **Onde non polarisée**

Une OEM est dite **non polarisée** si la direction de polarisation fluctue rapidement et aléatoirement.
La lumière naturelle est non polarisée.

Le caractère vectoriel de l'OEM est masqué par ces fluctuations rapides : c'est le **modèle scalaire** de la lumière, que nous utiliserons abondamment en optique ondulatoire.

- **Polarisation rectiligne**

Une OEM est dite **polarisée rectilignement** si la direction du vecteur champ électrique est constante.

Bien qu'étant assez rare en pratique, c'est le cas qui conduit aux calculs les plus simples ... et donc celui que vous rencontrerez le plus souvent !

- **D'autres états de polarisation**

Les phénomènes de réflexion sur un miroir, une vitre, à la surface de l'eau, tendent à créer une polarisation rectiligne partielle : la polarisation est globalement rectiligne, mais des fluctuations aléatoires demeurent.

La direction de polarisation $\vec{e}_{\mathrm{p}}$ peut également tourner de façon régulière : on parle alors de polarisation rectiligne ou elliptique.

Animation Java permettant de visualiser une OPPH dans différents états de polarisation. Le champ électrique est représenté en rouge et le champ magnétique en bleu. On peut visualiser facilement le champ électromagnétique en un point en choisissant $N = 2$.

▷ Polarisation rectiligne : choisir E_y/E_x quelconque et un déphasage nul.
▷ Polarisation circulaire : choisir $E_y/E_x = 1$ et un déphasage de 90°.
▷ Polarisation elliptique : choisir par exemple $E_y/E_x = 1$ et un déphasage quelconque.

III.B - Polariseur

On appelle **polariseur** un instrument d'optique permettant de construire
une onde polarisée rectilignement dans une direction choisie, appelée axe passant du polariseur.

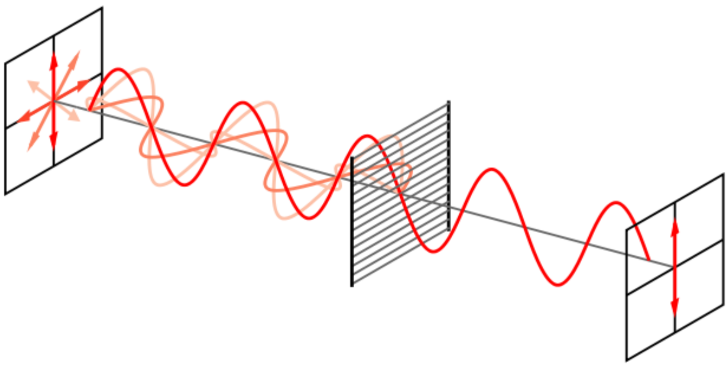


Figure 3 – Principe de fonctionnement d'un polariseur. Figure extraite de Wikipédia.

La lumière naturelle est non polarisée, c'est-à-dire que la direction du champ électrique fluctue aléatoirement et rapidement. Lorsqu'elle arrive sur le polariseur, voir figure 3, l'onde est absorbée si la direction du champ électrique est parallèle aux barreaux de la grille et transmise si elle est perpendiculaire : en sortie du polariseur, l'onde est dans un état de polarisation rectiligne orthogonale à la grille. Ainsi, un polariseur « extrait » la composante polarisée selon son axe passant $\vec{n}$ et bloque la composante orthogonale. Formellement,

$$\boxed{\vec{E}_{\text{sortant}} = (\vec{E}_{\text{entrant}} \cdot \vec{n})\vec{n}\,.}$$

Les polariseurs les plus fréquemment utilisés sont faits en matériaux polymères dont les chaînes moléculaires sont étirées dans une direction privilégiée, jouant un rôle analogue aux barreaux de la grille dans l'exemple ci-dessus.

Animation JAVA permettant de visualiser l'effet d'un polariseur sur une OPPH dans différents états de polarisation. Le champ électrique est représenté en rouge et le champ magnétique en bleu. Elle s'utilise comme la précédente.

III.C - Mise en pratique

Application 2 : Exemples d'ondes planes polarisées rectilignement

M !

Pour les champs électriques ci-dessous, identifier la direction de propagation et la direction de polarisation de l'onde. Exprimer le champ magnétique associé.

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos(\omega t - kx)\,\vec{e}_y \qquad \underline{\vec{E}_2} = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_y\right) \qquad \vec{E}_3 = -E_0 \exp\left(-\frac{(x+ct)^2}{a^2}\right)\vec{e}_z$$

Le champ magnétique se déduit de la relation de structure.

1 Propagation selon $+\vec{e}_x$, polarisation selon $\vec{e}_y$.

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{e}_x \wedge \vec{E} = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kx)\,\vec{e}_z\,.$$

2 Propagation selon $+\vec{e}_z$, polarisation à 45° des vecteurs $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$.

$$\underline{\vec{B}} = \frac{1}{c}\vec{e}_z \wedge \underline{\vec{E}} = \frac{E_0}{c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_y - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_x\right)\,.$$

3 Propagation selon $-\vec{e}_x$, polarisation selon $\vec{e}_z$ (le signe $-$ ne change rien).

$$\vec{B} = -\frac{1}{c}\vec{e}_x \wedge \vec{E} = -\frac{E_0}{c}\exp\left(-\frac{(x+ct)^2}{a^2}\right)\vec{e}_y\,.$$

Espace 15

IV - Transport d'énergie par une onde électromagnétique

IV.A - Densité volumique d'énergie électromagnétique

Considérons par exemple une OPPH dont les champs s'écrivent

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\,\vec{e}_y \qquad \text{et} \qquad \vec{B} = \vec{e}_x \wedge \frac{\vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kx)\,\vec{e}_z\,.$$

Densité volumique d'énergie électromagnétique instantanée :

M

$$u_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \qquad \text{et} \qquad u_\mathrm{m} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2}\cos^2(\omega t - kx) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

d'où on déduit

$$u_\mathrm{em} = \varepsilon_0 {E_0}^2 \cos^2(\omega t - kx)\,.$$

Espace 16

En moyenne temporelle :

R !

$$\langle \cos(\omega t + \varphi)\rangle = \langle \sin(\omega t + \varphi)\rangle = 0 \qquad \text{et} \qquad \left\langle \cos^2(\omega t + \varphi)\right\rangle = \left\langle \sin^2(\omega t + \varphi)\right\rangle = \frac{1}{2}$$

La relation sur le carré se montre en utilisant une relation de linéarisation,

$$\left\langle \cos^2(\omega t + \varphi)\right\rangle = \left\langle \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)}{2}\right\rangle = \frac{1}{2}$$

Densité volumique d'énergie moyenne :

M

$$\langle u_\mathrm{em}\rangle = \varepsilon_0 {E_0}^2 \left\langle \cos^2(\omega t - kx)\right\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 {E_0}^2$$

Espace 17

Généralisation :

Q

La densité volumique d'énergie électromagnétique d'une OPPH est équirépartie entre les formes électrique et magnétique.

La densité volumique d'énergie est strictement positive en tout point, et sa moyenne temporelle est uniforme.

Remarque : *On retrouve le caractère non-physique de l'OPPH : en sommant sur tout l'espace, on trouve qu'elle porte une énergie totale infinie, ce qui est physiquement impossible.*

IV.B - Puissance rayonnée : vecteur de Poynting

Considérons la même OPPH que précédemment,

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e}_y \qquad \text{et} \qquad \vec{B} = \vec{e}_x \wedge \frac{\vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kx)\vec{e}_z\,.$$

Vecteur de Poynting instantané :

$$\vec{\Pi} = \frac{{E_0}^2}{c\mu_0}\cos^2(\omega t - kx)\vec{e}_x$$

M !

En moyenne temporelle :

$$\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 {E_0}^2 c\,\vec{e}_x = \langle u_{\text{em}}\rangle\, c\,\vec{e}_x$$

Une OPPH transporte de l'énergie dans sa direction de propagation.

Q

IV.C - Énergie et représentation complexe

- **Un exemple pour constater le problème**

Considérons le champ $\vec{E}(t) = E_0\cos(\omega t - kx)\vec{e}_y$, soit en complexe $\underline{\vec{E}} = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)}\vec{e}_y$. Le passage dans le sens complexe → réel se fait avec la partie réelle :

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\,\underline{\vec{E}}\,.$$

Calcul du carré :

$$\begin{cases} \underline{E}^2 = {E_0}^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\omega t - kx)} \\ E^2 = {E_0}^2\cos^2(\omega t - kx) \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{Re}(\underline{E}^2) = {E_0}^2\cos(2\omega t - 2kx) \neq E^2$$

⇝ la représentation complexe ne peut pas être utilisée pour calculer le carré de grandeurs.

Cela ne signifie pas qu'elle n'apporte aucune information, mais celles-ci sont limitées aux valeurs moyennes. En effet,

$$\langle E^2\rangle = \frac{{E_0}^2}{2} \qquad \text{et} \qquad \underline{\vec{E}}\cdot\underline{\vec{E}}^* = \left|\underline{\vec{E}}\right|^2 = {E_0}^2$$

Attention ! Les grandeurs énergétiques sont non linéaires,
et ne peuvent pas être calculées à partir des représentations complexes.

Celles-ci ne donnent accès qu'à des valeurs moyennes,

$$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 \qquad \longleftrightarrow \qquad \langle u_e\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\underline{\vec{E}}\cdot\underline{\vec{E}}^*}{2}$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} \qquad \longleftrightarrow \qquad \langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\frac{\underline{\vec{E}}\wedge\underline{\vec{B}}^*}{\mu_0}\right)$$

où l'étoile désigne le complexe conjugué.

R !

Attention ! Ne pas oublier le préfacteur 1/2.