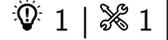


Ondes électromagnétiques dans le vide

Exercice 1 : Onde sphérique



- ▷ OPPH;
- ▷ Vecteur de Poynting.

1 Le vecteur d'onde de l'onde sphérique est donné par $\vec{k} = k\vec{e}_r$.

2 Le champ magnétique est donné par

$$\vec{B} = \vec{e}_r \wedge \frac{\vec{E}}{c} = \frac{E_0(r)}{c} \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\varphi.$$

3 Par définition,

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0(r)^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kr) \vec{e}_r.$$

Sachant que $\langle \cos^2(\omega t - kr) \rangle = 1/2$, on en déduit

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0(r)^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_r.$$

4 La puissance rayonnée au travers d'une sphère de rayon r vaut

$$\mathcal{P} = \iint_{\text{sphère}} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S}.$$

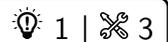
Comme $\langle \vec{\Pi} \rangle$ est uniforme sur la sphère, on en déduit directement

$$\mathcal{P} = \frac{E_0(r)^2}{2\mu_0 c} \times 4\pi r^2 \quad \text{soit} \quad \mathcal{P} = \frac{2\pi r^2 E_0(r)^2}{\mu_0 c}.$$

Comme l'onde se propage dans le vide, elle n'est **ni absorbée ni amplifiée, elle ne fait que s'étaler** dans l'espace : la puissance \mathcal{P} est donc indépendante du rayon de la sphère. On en déduit

$$E_0(r)^2 = \frac{\mu_0 c}{2\pi r^2} \mathcal{P} \quad \text{d'où} \quad E_0(r) = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu_0 c}{2\pi} \mathcal{P}}.$$

Exercice 2 : Un exemple d'onde électromagnétique



- ▷ OPPH;
- ▷ Vecteur de Poynting.

1 D'après la relation de dispersion,

$$f = \frac{c}{\lambda} = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}.$$

Cette onde appartient au domaine **optique**, comme le montre d'ailleurs sa longueur d'onde de 600 nm.

2 Par définition, on peut identifier

$$\exp \left[i \left(\frac{K}{3} (2x + 2y - z) - \omega t \right) \right] = \exp \left[i \left(\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \omega t \right) \right]$$

ce qui donne

$$k_x x + k_y y + k_z z = \frac{K}{3} (2x + 2y - z) \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{k} = \frac{2K}{3} \vec{e}_x + \frac{2K}{3} \vec{e}_y - \frac{K}{3} \vec{e}_z.}$$

On déduit

$$\|\vec{k}\| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = K \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = K \quad \text{d'où} \quad \boxed{K = \frac{2\pi}{\lambda} = 1,0 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}.}$$

3 Par définition, un plan d'onde est une surface sur laquelle le champ électrique est uniforme à tout instant, soit

$$\exp \left[i \left(\frac{K}{3} (2x + 2y - z) - \omega t \right) \right] = \text{cte.}$$

Ainsi, les plans d'onde sont tous les plans parallèles d'équation

$$\boxed{2x + 2y - z = \text{cte.}}$$

4 Compte tenu de la convention de signe dans l'exponentielle, l'équation de Maxwell-Gauss en représentation complexe s'écrit

$$+i \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{soit} \quad k_x E_x + k_y E_y = 0 \quad \text{d'où} \quad E_y = -\frac{k_x}{k_y} E_x$$

Compte tenu de ce qui précède, $k_x = k_y$ donc on en déduit

$$\boxed{E_y = -E_x = -E_0 \exp \left[i \left(\frac{K}{3} (2x + 2y - z) - \omega t \right) \right].}$$

5 D'après la relation de structure appliquée à l'OPPM,

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{K E_x}{3\omega} (2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z) \wedge (\vec{e}_x - \vec{e}_y).$$

En développant le produit vectoriel par la droite,

$$(2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z) \wedge (\vec{e}_x - \vec{e}_y) = (\vec{0} - 2\vec{e}_z - \vec{e}_y) - (2\vec{e}_z + \vec{0} - \vec{e}_x) = -\vec{e}_x - \vec{e}_y - 4\vec{e}_z.$$

On en déduit alors

$$\boxed{\vec{B} = -\frac{K E_x}{3\omega} (\vec{e}_x + \vec{e}_y + 4\vec{e}_z).}$$

6 Avec les champs réels, la densité volumique d'énergie s'écrit

$$w_{\text{em}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

et donc avec les champs complexes

$$\langle w_{\text{em}} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\frac{\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E}^*}{2} + \frac{\vec{B} \cdot \vec{B}^*}{2\mu_0} \right].$$

Compte tenu des expressions précédentes, $\vec{E} = E_x (\vec{e}_x - \vec{e}_y)$ donc

$$\vec{E} \cdot \vec{E}^* = |E_x|^2 (1 + 1) = 2E_0^2$$

$$\text{et } \vec{B} = -\frac{E_x}{3c} (\vec{e}_x + \vec{e}_y + 4\vec{e}_z)$$

$$\vec{B} \cdot \vec{B}^* = \frac{|E_x|^2}{9c^2} (1 + 1 + 16) = \frac{2E_0^2}{c^2}$$

ce qui donne finalement

$$\langle w_{em} \rangle = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E_0^2 + \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \right) \quad \text{soit} \quad \boxed{\langle w_{em} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2}.$$

Elle est **uniforme**, comme attendu pour une OPPM.

7 La moyenne du vecteur de Poynting vaut

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0}.$$

En développant par la gauche, le produit vectoriel donne

$$(\vec{e}_x - \vec{e}_y) \wedge (\vec{e}_x + \vec{e}_y + 4\vec{e}_z) = (\vec{0} + \vec{e}_z - 4\vec{e}_y) - (-\vec{e}_z + \vec{0} + 4\vec{e}_x) = -4\vec{e}_x - 4\vec{e}_y + 2\vec{e}_z.$$

Ainsi,

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = -\frac{1}{2} \frac{|E_x|^2}{3c\mu_0} (-4\vec{e}_x - 4\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) \quad \text{soit} \quad \boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{3c\mu_0} (2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z)}.$$

Le vecteur de Poynting est **colinéaire au vecteur d'onde**, comme attendu pour une OPPM.

Exercice 3 : Un exemple d'onde électromagnétique

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2 | Ⓞ



- ▷ Onde non plane ;
- ▷ Vecteur de Poynting.

1 L'onde dépend de x et y donc elle n'est pas plane, mais elle est progressive selon $+\vec{e}_x$. Polarisation rectiligne selon \vec{e}_z .

2 Exprimons $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E})$ de deux façons différentes. D'une part,

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}) \underset{\text{MF}}{=} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \underset{\text{Schwartz}}{=} -\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}) \underset{\text{MA}}{=} -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

D'autre part,

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{E}) - \overrightarrow{\Delta} \vec{E} \underset{\text{MG}}{=} -\overrightarrow{\Delta} \vec{E}$$

En identifiant, on obtient l'équation de d'Alembert,

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}.$$

On injecte l'onde étudiée dans l'équation de d'Alembert :

$$-k^2 E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(kx-\omega t)} - E_0 \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(kx-\omega t)} + \frac{\omega^2}{c^2} E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(kx-\omega t)} = 0$$

Après nombreuses simplifications, il vient :

$$-k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0.$$

On peut éventuellement aller plus loin : pour qu'il y ait propagation, il faut avoir k réel donc $k^2 > 0$ (si $k^2 < 0$, il y a atténuation de l'onde, cf. effet de peau). Cette condition de positivité devient

$$-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \frac{\omega^2}{c^2} > 0 \quad \text{d'où} \quad \omega > \frac{\pi c}{a}.$$

3 L'onde n'est pas plane donc la relation de structure n'est pas utilisable. Avec l'équation de Maxwell-Faraday,

$$+j\omega \vec{B} = \frac{\pi E_0}{a} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(kx-\omega t)} \vec{e}_x - jk E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(kx-\omega t)} \vec{e}_y,$$

d'où on déduit

$$\vec{B} = \frac{\pi E_0}{j\omega a} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(kx - \omega t)} \vec{e}_x - \frac{k}{\omega} E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(kx - \omega t)} \vec{e}_y$$

4 Par définition,

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$$

On a $\langle \vec{\Pi} \rangle$ selon \vec{e}_x , il y a donc transport d'énergie dans cette direction.

Exercice 4 : Formule de Larmor

inspiré écrit Centrale PC | 💡 2 | ✂ 2



▷ Ondes plane ;
▷ Vecteur de Poynting.

1 L'onde est émise à une distance r du point M , si bien qu'il lui faut une durée r/c pour l'atteindre une fois qu'elle a été émise par la particule.

2 La dépendance en $t - r/c$ laisse entendre qu'elle se propage selon $+\vec{e}_r$. D'après la relation de structure,

$$\vec{B} = \vec{e}_r \wedge \frac{\vec{E}}{c} \quad \text{donc} \quad \vec{e}_r \wedge c\vec{B} = \vec{e}_r \wedge (\vec{e}_r \wedge \vec{E}) = (\vec{E} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{E}$$

Or une OEM plane est une onde transverse, donc $\vec{E} \cdot \vec{e}_r = 0$, et ainsi

$$\vec{E} = -\vec{e}_r \wedge c\vec{B}$$

Pour $\vec{a} = a\vec{e}_z$, sachant que $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_z = -\sin\theta \vec{e}_\varphi$,

$$\vec{B}(M, t) = +\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} a \left(t - \frac{r}{c}\right) \sin\theta \vec{e}_\varphi$$

et comme $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_\theta$ alors

$$\vec{E}(M, t) = +\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} a \left(t - \frac{r}{c}\right) \sin\theta \vec{e}_\theta.$$

L'onde possède localement une polarisation rectiligne selon \vec{e}_θ .

3 Par définition,

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}(M, t) &= \frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)}{\mu_0} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right)^2 \frac{1}{c^5} \sin^2\theta a^2 (\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_\varphi) \end{aligned}$$

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{q^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 r^2 \epsilon_0 c^3} a^2 \vec{e}_r.$$

en utilisant la relation $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$. La présence du facteur $\sin\theta$ montre que la puissance est principalement rayonnée dans la direction $\theta = \pi/2$, c'est-à-dire perpendiculairement à la direction dans laquelle la particule est accélérée.

Rappelons qu'en coordonnées sphériques l'angle θ est restreint à l'intervalle $[0, \pi]$, la direction $\theta = -\pi/2$ n'est donc pas définie.

4 Par définition,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(r, t) &= \oiint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} a^2 \oiint \sin^2\theta \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} a^2 \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a^2 (t - r/c)^2. \end{aligned}$$

5 Dans ces conditions, on peut poser $z(t) = A \cos(\omega t)$ et ainsi

$$a(t) = \ddot{z} = -\omega^2 A \cos(\omega t) \quad \text{donc} \quad \langle a(t - r/c)^2 \rangle = \omega^4 A^2 \langle \cos^2 \left(\omega t - \frac{\omega r}{c} \right) \rangle = \frac{\omega^4 A^2}{2}$$

et ainsi

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{q^2 A^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}.$$

Exercice 5 : Mesure de la concentration en CO₂ dans l'atmosphère



- ▷ OPPH;
- ▷ Vecteur de Poynting;
- ▷ Bilan d'énergie électromagnétique.

1 Le champ électrique de l'onde s'écrit

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x,$$

d'où on déduit le champ magnétique avec la relation de structure,

$$\vec{B}(z, t) = \vec{e}_z \wedge \frac{\vec{E}(z, t)}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

et enfin le vecteur de Poynting

$$\vec{\Pi}(z, t) = \frac{\vec{E}(z, t) \wedge \vec{B}(z, t)}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{e}_z.$$

2 Raisonnons sur une section droite du faisceau de normale \vec{e}_z . Comme le vecteur de Poynting y est uniforme,

$$I = \left\langle \frac{1}{S} \times \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) S \right\rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle$$

soit

$$I = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}.$$

3 Procédons à un bilan d'énergie pour une tranche d'épaisseur dz . En moyenne temporelle, pendant dt , elle reçoit de l'énergie par rayonnement par sa face située en z , elle en cède par celle située en $z + dz$, et une partie de cette énergie est dissipée par absorption. Ainsi,

$$\langle dU_{\text{em}} \rangle = \mathcal{P}_{\text{ray}}(z) dt - \mathcal{P}_{\text{ray}}(z + dz) dt - \mathcal{P}_{\text{abs}} dt \stackrel{\uparrow}{\text{stat}} = 0.$$

La puissance rayonnée est reliée au flux du vecteur de Poynting, donc

$$\mathcal{P}_{\text{ray}}(z) = \left\langle \iint_{\text{face } z} \vec{\Pi}(z) \cdot \vec{dS} \right\rangle = S I(z) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{\text{ray}}(z + dz) = S I(z + dz).$$

La tranche contient $n S dz$ molécules de CO₂, qui absorbent donc en moyenne une puissance

$$\mathcal{P}_{\text{abs}} = n S dz p = \sigma n S dz I.$$

En remplaçant les différents termes, il vient

$$S(I(z) - I(z + dz)) - \sigma n S dz I = 0 \quad \text{soit} \quad -S \frac{dI}{dz} dz - \sigma n S dz I = 0$$

ce qui se met bien sous la forme cherchée

$$\frac{dI}{dz} + \sigma n I = 0.$$

4 Cette équation différentielle se résout en

$$I(z) = I_0 e^{-\sigma n z} \quad \text{avec} \quad I_0 = I(z=0)$$

ce qui permet d'exprimer l'absorbance,

$$A = \ln \frac{I_0}{I_0 e^{-\sigma n L}} = \sigma n L.$$

La longueur de l'échantillon L et la section efficace σ étant connues, l'absorbance est directement proportionnelle à la quantité n que l'on cherche à mesurer.

5 L'équation d'état des gaz parfaits indique que la concentration d'un gaz (nombre de molécules par unité de volume) dépend directement de la température et de la pression, qu'il faut donc parfaitement contrôler pour que les mesures soient fiables. Procéder par étalonnage plutôt que par une mesure absolue permet de s'affranchir de manière robuste de toutes les imperfections du dispositif : réflexions parasites, etc.

6 On constate évidemment une hausse quasi-linéaire (voire un début d'exponentielle ...) due aux émissions humaines de CO_2 par la combustion de charbon, pétrole, gaz, etc. Les oscillations saisonnières sont dues au cycle de la végétation : comme il y a nettement plus de terres émergées dans l'hémisphère Nord, la consommation de CO_2 par photosynthèse est maximale au printemps/été de cet hémisphère,

Exercice 6 : Loi de Malus



\triangleright Polarisation ;
 \triangleright Vecteur de Poynting.

1 Voir figure 1.

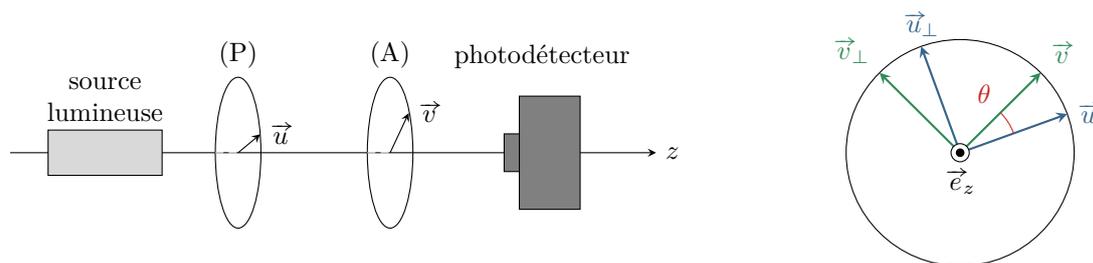


Figure 1 – Étude expérimentale de la loi de Malus.

2 Par définition, en sortie du polariseur, l'onde est polarisée rectilignement selon son axe passant. Ainsi,

$$\vec{E}_P(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k = \frac{2\pi}{\lambda} \\ \omega = kc = \frac{2\pi c}{\lambda} \end{cases},$$

d'où on déduit

$$\vec{E}_P(z, t) = E_0 \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] \vec{u}.$$

Comme l'onde est progressive dans le sens des z croissants, il n'y a pas de surprise à voir apparaître la variable $ct - z$.

3 En s'appuyant sur la figure 1 pour exprimer \vec{u} dans la base \mathcal{B}_A , on obtient

$$\vec{E}_P(z, t) = E_0 \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] (\cos \theta \vec{v} - \sin \theta \vec{v}_\perp).$$

En sortie du polariseur, la composante sur son axe passante est transmise et la composante orthogonale est coupée, d'où

$$\vec{E}_{PA}(z, t) = E_0 \cos \theta \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] \vec{v}.$$

Le champ magnétique s'obtient par la relation de structure,

$$\vec{B}_{PA} = \vec{e}_z \wedge \frac{\vec{E}_{PA}}{c} = \frac{E_0}{c} \cos \theta \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] (\vec{e}_z \wedge \vec{v}),$$

et comme par construction de la base \mathcal{B}_A on a $\vec{e}_z \wedge \vec{v} = \vec{v}_\perp$, alors

$$\vec{B}_{PA}(z, t) = \frac{E_0}{c} \cos \theta \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] \vec{v}_\perp.$$

Enfin,

$$\vec{\Pi}_{PA} = \frac{\vec{E}_{PA} \wedge \vec{B}_{PA}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2 \theta \cos^2 \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] (\vec{v} \wedge \vec{v}_\perp)$$

et ainsi

$$\vec{\Pi}_{PA} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2 \theta \cos^2 \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] \vec{e}_z.$$

4 Par définition de l'intensité lumineuse, en notant z_0 la position du détecteur,

$$I = \left\langle \frac{1}{S} \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{S} \times \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2 \theta \cos^2 \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct - z_0) \right] S \right\rangle$$

car le vecteur de Poynting est uniforme sur toute la surface du détecteur (l'onde est plane) et $d\vec{S} = dS \vec{e}_z$. On en déduit directement

$$I = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2 \theta \left\langle \cos^2 \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct - z_0) \right] \right\rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2 \theta \times \frac{1}{2}$$

ce qui s'écrit bien sous la forme

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad \text{avec} \quad I_0 = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}.$$

Exercice 7 : Champs d'un laser

💡 3 | ✂ 1



- ▷ OPPH;
- ▷ Vecteur de Poynting;
- ▷ Résolution de problème.

On assimile l'air au vide. D'après la relation de structure,

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \vec{u}_z \wedge \frac{\vec{E}}{c} \quad \text{soit} \quad \vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y.$$

Le vecteur de Poynting s'écrit

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z.$$

En modélisant le faisceau laser par un faisceau cylindrique de rayon $a = 1$ mm (diffraction négligeable), la puissance moyenne portée par le faisceau vaut donc

$$\mathcal{P} = \left\langle \|\vec{\Pi}\| \right\rangle \times \pi a^2 = \frac{E_0^2 \pi a^2}{\mu_0 c}.$$

Pour une puissance $\mathcal{P} = 1$ mW, on en déduit

$$E_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{P} \mu_0 c}{\pi a^2}} \simeq 45 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{et} \quad B_0 = \frac{E_0}{c} = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ T}.$$