BLAISE PASCAL
PT 2024-2025

TD 21 – Électromagnétisme

Ondes électromagnétiques dans le vide

Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
Difficulté technique et calculatoire ;
Exercice important.

Flasher ou cliquer pour accéder au corrigé

Ceinture		Proposition de parcours d'entraînement
	Ceinture blanche	Applications + exercices 1, 3 et 6
	Ceinture jaune	Applications + exercices 1, 3, 5 et 6
	Ceinture rouge	Applications (★) + exercices 2 à 7
	Ceinture noire	Applications (★) + exercices 2 à 7

Applications de cours

Seuls les étudiants du groupe PT⋆ seront interrogés en colle sur les applications marquées d'une étoile, car elles sont plus techniques et/ou moins essentielles ... mais tous les étudiants sont bien sûr invités à les travailler !

21.1 - Établir l'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide pour le champ électrique ou magnétique, au choix de l'interrogateur. Identifier dimensionnellement la célérité c.

21.2 - Établir la relation de dispersion en utilisant, au choix de l'interrogateur, les champs réels ou les champs complexes.

21.3 - Établir les écritures complexes des équations de Maxwell dans le cas particulier d'une OPPH de la forme

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E_0}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM}\right)}\, \vec{e}_y\,.$$

En déduire la relation de structure.

21.4 - Sur un exemple de champ électrique donné par l'interrogateur (coordonnées cartésiennes uniquement), identifier la direction et le sens de propagation, l'état de polarisation de l'onde, puis en déduire le champ magnétique et le vecteur de Poynting.

Exercice 1 : Onde sphérique

1 | 1

▷ *OPPH ;*
▷ *Vecteur de Poynting.*

On considère un émetteur isotrope d'ondes électromagnétiques que l'on assimile à une source ponctuelle : il peut s'agir d'un émetteur de radio, d'un satellite, d'une étoile qui rayonne, etc. L'onde émise est sphérique, de la forme en coordonnées sphériques

$$\vec{E}(M,t) = E_0(r)\cos(\omega t - kr)\,\vec{e}_\theta \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{\omega}{c}\,.$$

Le milieu de propagation est assimilé au vide.

1 - Par analogie avec une onde plane, identifier le vecteur d'onde $\vec{k}$ de l'onde sphérique.

2 - On admet qu'une telle onde vérifie localement la même relation de structure qu'une onde plane. En déduire l'expression du champ magnétique associé.

3 - Exprimer le vecteur de Poynting et sa moyenne temporelle.

4 - Exprimer la puissance moyenne $\mathcal{P}$ rayonnée à travers une sphère de rayon r. Justifier par un argument physique que cette puissance est indépendante de r. En déduire que $E_0(r) = A/r$ avec A une constante à déterminer.

Exercice 2 : Un exemple d'onde électromagnétique 1 | 3

▷ *OPPH ;*
▷ *Vecteur de Poynting.*

On étudie une onde électromagnétique dont le champ électrique est de la forme

$$\vec{E} = E_x\,\vec{e}_x + E_y\,\vec{e}_y \qquad \text{avec} \qquad E_x = E_0 \exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{K}{3}(2x+2y-z) - \omega t\right)\right] .$$

L'onde se propage dans le vide et sa longueur d'onde est $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$.

1 - Calculer la fréquence de l'onde. Identifier le domaine du spectre électromagnétique auquel elle appartient.

2 - Exprimer le vecteur d'onde $\vec{k}$ en fonction de la constante K, puis calculer la valeur numérique de K.

3 - Établir l'équation cartésienne d'un plan d'onde.

4 - À partir de l'équation de Maxwell-Gauss, exprimer E_y en fonction de E_x.

5 - Exprimer le champ magnétique de cette onde en fonction de E_x et c.

6 - Exprimer la densité moyenne d'énergie électromagnétique associée à cette onde. Commenter.

7 - Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting de cette onde. Commenter.

Exercice 3 : Un exemple d'onde électromagnétique oral banque PT | 2 | 2 |

▷ *Onde non plane ;*
▷ *Vecteur de Poynting.*

Considérons l'onde électromagnétique suivante, se déplaçant dans le vide :

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{j}(kx-\omega t)}\,\vec{e}_z .$$

1 - Est-ce une onde plane ? Est-elle progressive ? Quelle est sa polarisation ?

2 - Établir l'équation de propagation. En déduire une condition pour que l'onde existe.

3 - Déterminer le champ magnétique associé à cette onde.

4 - Définir le vecteur de Poynting. On peut montrer (le calcul n'est pas demandé) qu'il s'écrit en représentation réelle

$$\vec{\Pi} = \frac{k}{\mu_0\omega}{E_0}^2 \sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos^2(kx-\omega t)\,\vec{e}_x + \frac{\pi}{2\mu_0\omega a}{E_0}^2 \sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right)\sin(kx-\omega t)\cos(kx-\omega t)\,\vec{e}_y .$$

Cette onde transporte-t-elle de l'énergie ? Si oui, dans quelle direction ?

Exercice 4 : Formule de Larmor

inspiré écrit Centrale PC | 3 | 2

- *Ondes plane ;*
- *Vecteur de Poynting.*

Considérons une particule P ponctuelle de charge q en mouvement au voisinage d'un point O fixe dans le référentiel $\mathcal{R}_{\text{lab}}$ du laboratoire et choisi comme origine. Cette particule possède une accélération $\vec{a}$ dans $\mathcal{R}_{\text{lab}}$, et de ce fait rayonne un champ électromagnétique. On cherche à déterminer la puissance totale $\mathcal{P}$ rayonnée par cette particule dans tout l'espace.

On se place en un point M repéré en coordonnées sphériques par $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$ se trouvant à une grande distance de O et de P. On suppose que l'accélération $\vec{a}$ de la particule est à tout instant parallèle à (Oz) : $\vec{a} = a\,\vec{e}_z$. On note θ l'angle orienté de $\vec{e}_z$ vers $\vec{e}_r$. À grande distance, le champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ de l'onde rayonnée par la particule s'approxime par

$$\vec{B}(M,t) \simeq -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^3\, r}\,\vec{e}_r \wedge \vec{a}\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Données :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w} \qquad \int_0^\pi \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}.$$

1 - Interpréter physiquement la dépendance en temps intervenant dans l'expression de $\vec{B}(M,t)$.

2 - On admet que l'onde rayonnée en M a localement la structure d'une onde plane. Quelle est sa direction de propagation ? En déduire l'expression du champ électrique $\vec{E}(M,t)$ en fonction de $\vec{B}(M,t)$ puis de a. Identifier l'état de polarisation local de l'onde.

3 - Exprimer le vecteur de Poynting de l'onde rayonnée en fonction de $a(t-r/c)^2$ et θ. Dans quelle direction, par rapport à l'accélération $\vec{a}$ de la particule, s'effectue préférentiellement ce rayonnement ?

4 - En déduire la puissance totale $\mathcal{P}(r,t)$ rayonnée au travers d'une sphère de rayon r par la particule chargée accélérée : le résultat obtenu s'appelle *formule de Larmor*.

5 - Un cas important est celui où la particule oscille de manière sinusoïdale autour de l'origine O. Ce modèle, dit du *dipôle oscillant*, permet par exemple d'expliquer le fonctionnement des antennes, le rayonnement thermique ou la couleur bleue du ciel. Exprimer la puissance moyenne rayonnée en fonction de la pulsation d'oscillation.

Exercice 5 : Mesure de la concentration en CO2 dans l'atmosphère

2 | 2 |

- *OPPH ;*
- *Vecteur de Poynting ;*
- *Bilan d'énergie électromagnétique.*

Le développement de modèles climatiques et l'actualisation de leurs prédictions nécessite des mesures précises de la fraction molaire en CO_2 présent dans l'atmosphère. Celle-ci est usuellement exprimée en parties par millions (ppm) dans l'air sec : une fraction molaire de 413 ppm indique par exemple qu'un million de molécules d'air privé de toute humidité contient en moyenne 413 molécules de CO_2.

Pour ce faire, un échantillon d'air est prélevé, de préférence en relative altitude et loin de toute perturbation humaine, puis refroidi pour condenser toute la vapeur d'eau, avant d'être analysé. Le principe est celui de la spectrophotométrie : un faisceau laser de longueur d'onde 4,26 µm, à laquelle le spectre d'absorption du CO_2 présente un maximum, traverse un échantillon de longueur connue. Comparer les intensités lumineuses avant et après traversée de l'échantillon permet d'en déduire la concentration en CO_2, en nombre de molécules par m^3 d'air. Les capteurs de CO_2 popularisés comme indicateurs de la qualité de l'air lors de la crise du Covid-19, fonctionnent sur le même principe, mais avec des exigences de précision bien moindre.

1 - On modélise le faisceau laser par un cylindre de section S au sein duquel se propage une onde plane progressive monochromatique de polarisation rectiligne selon $\vec{e}_x$. Écrire le champ électrique, le champ magnétique et le vecteur de Poynting de l'onde.

2 - Les capteurs utilisés sont sensibles à l'intensité du faisceau, définie comme une double moyenne spatiale et temporelle du vecteur de Poynting sur toute la section S du faisceau :

$$I = \left\langle \frac{1}{S} \iint_S \vec{\Pi}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \right\rangle.$$

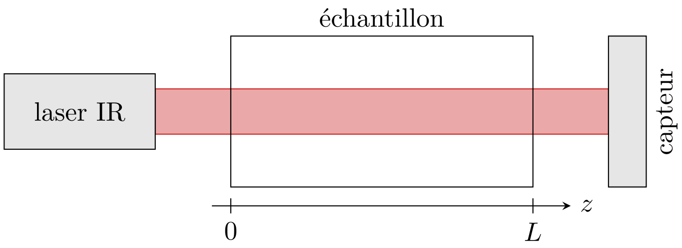

Figure 1 – Schéma de principe du dispositif de mesure de la fraction molaire en CO_2 dans l'atmosphère.

Relier I à l'amplitude du champ électrique de l'onde.

3 - Chaque molécule de CO_2 se trouvant dans le faisceau absorbe en moyenne une puissance p proportionnelle à l'intensité : $p = \sigma I$, où σ est une constante tabulée appelée section efficace d'absorption, dépendant uniquement de la longueur d'onde. En raisonnant sur une tranche infinitésimale du faisceau, montrer que l'intensité vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} + \sigma n I = 0\,,$$

où n est la densité volumique de CO_2, c'est-à-dire le nombre de molécules de CO_2 par unité de volume dans l'échantillon.

4 - On appelle absorbance de l'échantillon le rapport

$$A = \ln \frac{I(z\!=\!0)}{I(z\!=\!L)}\,.$$

Montrer que la connaissance de l'absorbance permet de remonter à n, nombre de molécules de CO_2 par unité de volume.

5 - En pratique, on procède à température et pression parfaitement contrôlées et par comparaison avec des échantillons étalons de concentration connues. Expliquer ces choix expérimentaux.

6 - La figure 2 représente l'évolution temporelle de la fraction molaire en CO_2 mesurée à l'observatoire situé au sommet du volcan de Mauna Loa, à Hawaï. Proposer une interprétation aux tendances observées.

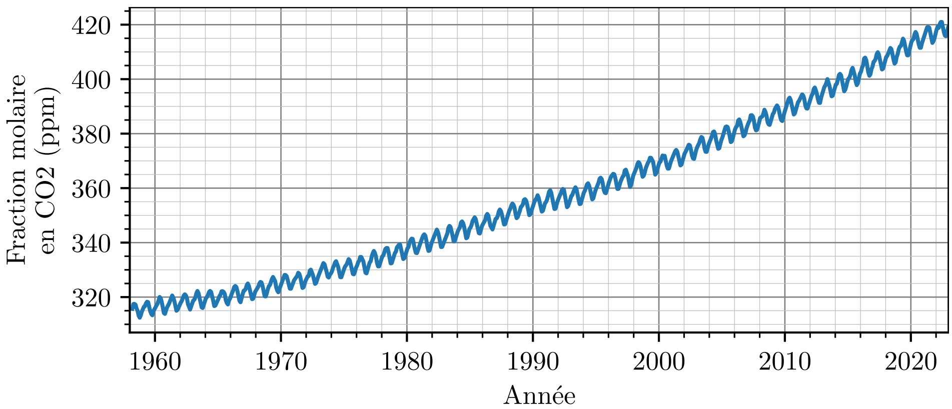

Figure 2 – Fraction molaire en CO_2 mesurée à l'observatoire de Mauna Loa. Les mesures représentées sont des moyennes mensuelles, librement accessibles sur le site du Global Monitoring Laboratory.

Exercice 6 : Loi de Malus

💡 2 | ✂ 1 | ⊛

▷ *Polarisation ;*
▷ *Vecteur de Poynting.*

Sur un banc optique d'axe (Oz), on place successivement une source de lumière monochromatique de longueur d'onde λ ; un premier polariseur (P) d'axe passant $\vec{u}$; un second polariseur (A) d'axe passant $\vec{v}$ appelé analyseur ; et un photodétecteur permettant de mesurer l'intensité de la lumière sortant de l'analyseur.

La lumière dans le dispositif est décrite comme une onde plane progressive harmonique. Les directions passantes $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du polariseur et de l'analyseur forment un angle θ. On note $\vec{u}_\perp$ (resp. $\vec{v}_\perp$) le vecteur unitaire tel que la base $\mathcal{B}_\mathrm{P} = (\vec{u}, \vec{u}_\perp, \vec{e}_z)$ soit orthonormée directe (resp. $\mathcal{B}_\mathrm{A} = (\vec{v}, \vec{v}_\perp, \vec{e}_z)$).

1 - Faire un schéma du montage.

2 - Donner l'expression dans la base $\mathcal{B}_\mathrm{P}$ du champ $\vec{E}_\mathrm{P}$ ayant traversé le polariseur en fonction de z, t et λ.

3 - Exprimer $\vec{E}_\mathrm{P}$ dans la base $\mathcal{B}_\mathrm{A}$. En déduire l'expression du champ $\vec{E}_\mathrm{PA}$ ayant traversé successivement le polariseur et l'analyseur puis celle du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}_\mathrm{PA}$.

L'intensité lumineuse mesurée par le photodétecteur est définie comme étant la valeur moyenne (spatiale et temporelle) du flux du vecteur de Poynting sur toute la surface S du photodétecteur,

$$I = \left\langle \frac{1}{S} \iint_S \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \right\rangle$$

où le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est normal au photodétecteur.

4 - Montrer que l'intensité peut s'écrire sous la forme $I = I_0 \cos^2 \theta$: cette relation est appelée **loi de Malus**.

Exercice 7 : Champs d'un laser — 3 | 1

- ▷ *OPPH ;*
- ▷ *Vecteur de Poynting ;*
- ▷ *Résolution de problème.*

> *Un problème ouvert demande de l'initiative dans le raisonnement mené. Pour aborder un tel exercice, il peut notamment être utile de faire un schéma modèle, d'identifier et nommer les grandeurs pertinentes, de proposer des hypothèses simplificatrices, de décomposer le problème en des sous-problèmes simples, etc. Le candidat peut également être amené à proposer des valeurs numériques raisonnables pour les grandeurs manquantes ... et à l'inverse toutes les valeurs données ne sont pas forcément utiles. Le tout est évidemment à adapter à la situation proposée !*

Déterminer les amplitudes des champs électrique et magnétique créés par la diode laser que nous utilisons en TP.

Document 1 : Extrait de fiche technique

ovio INSTRUMENTS

Diode laser rouge Classe II @635 nm version sur tige bas profil
Ref : 203324

Caractéristiques techniques :

- Puissance : 1 mW (classe 2)
- Extrémité : filetée M20
- Maintien : tige D 10mm - L 130mm
- Dimensions tube : diamètre 25mm / longueur 90mm
- Longueur d'onde : 635 nm
- Type : diode laser
- Diamètre faisceau à 5m : 535 mm
- Divergence : 0.9 mRad
- Faisceau en sortie : 1mm
- Température d'utilisation : 10 à 40°C
- Polarisation : linéaire
- Transformateur (fourni) : 6-9V DC