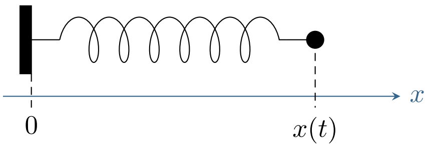
Oscillateur harmonique

I - Oscillateur harmonique mécanique

Exercice C1 : Équation du mouvement d'un oscillateur masse-ressort horizontal

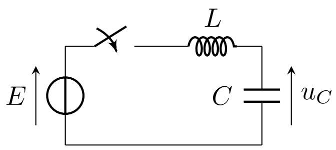


On considère un oscillateur masse-ressort horizontal. Le solide attaché à l'extrémité du ressort est modélisé par un point matériel de masse m. Sa position x est repérée le long d'un axe horizontal orienté comme sur la figure ci-dessous.

Établir l'équation du mouvement, c'est-à-dire l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.

II - Oscillateur harmonique électrique

Exercice C2 : Équation différentielle d'un circuit LC série



Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C après la fermeture de l'interrupteur à $t = 0$. L'écrire sous forme canonique et identifier la pulsation propre du circuit.

III - Résolution de l'équation différentielle

Exercice C3 : Solutions homogènes de l'équation de l'oscillateur harmonique

Les solutions de l'équation homogène d'un oscillateur harmonique s'écrivent sous la forme

$$x(t) = X_\mathrm{m}\cos(\omega_0 t + \varphi) = X_\mathrm{m}\sin(\omega_0 t + \varphi') = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\,.$$

1 - Vérifier par un calcul explicite que la fonction $x(t) = X_\mathrm{m}\cos(\omega_0 t + \varphi)$ est solution de l'équation homogène de l'oscillateur harmonique.

2 - Montrer que la deuxième forme est également solution. Pour cela, indiquer comment passer de la forme en cosinus à la forme en sinus.

3 - Même question pour la troisième forme.

Exercice C4 : Résolution complète d'un oscillateur harmonique mécanique

L'équation du mouvement de l'oscillateur étudié exercice C1 s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 x = {\omega_0}^2 \ell_0 \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

On suppose qu'à l'instant initial le solide est lâché de la position x_0 avec la vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{e}_x$.

1 - Résoudre complètement l'équation différentielle à partir de la forme « en A et B ».

2 - Que devient cette solution dans le cas particulier $x_0 = X_\text{éq}$ et $v_0 = 0$? Interpréter.

3 - Résoudre à nouveau l'équation différentielle, mais en raisonnant cette fois sur la forme « en amplitude et phase initiale ». Pour alléger les calculs, on supposera $v_0 = 0$.

Exercice C5 : Résolution complète d'un oscillateur harmonique électrique

L'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur de l'exercice C2 s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 u_C = {\omega_0}^2 E \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,.$$

On suppose qu'à l'instant $t = 0^-$ le condensateur est déchargé et aucun courant ne traverse le circuit.

1 - Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle.

2 - Exprimer les conditions initiales sous une forme appropriée.

3 - En déduire la solution physique.

4 - Représenter et légender la courbe $u_C(t)$.

IV - Oscillateur harmonique et conservation de l'énergie

Exercice C6 : Énergie mécanique d'un oscillateur masse-ressort

On raisonne sur l'exemple de l'oscillateur mécanique horizontal de l'exercice C1, dont la loi horaire s'écrit

$$x(t) = X_{\text{éq}} + X_{\text{m}} \cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} X_{\text{éq}} = \ell_0 \\ \omega_0 = \sqrt{k/m} \end{cases}$$

1 - Exprimer l'énergie cinétique puis l'énergie potentielle du point matériel en fonction du temps.

2 - Montrer alors que son énergie mécanique est constante. Pourquoi ce résultat n'est-il pas surprenant ?