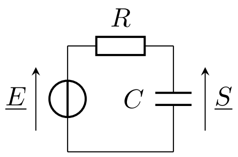
Analyse fréquentielle des systèmes linéaires, phénomènes de résonance

I - Caractériser un système linéaire

Exercice C1 : Fonction de transfert d'un circuit RC série



Considérons le circuit ci-contre, où la sortie est la tension aux bornes du condensateur.

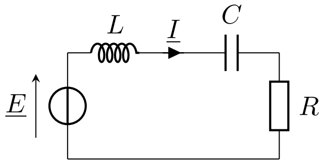
1 - Établir la fonction de transfert du système.

2 - Retrouver par une analyse en circuits équivalents les limites $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$.

3 - Pour une tension d'entrée $e(t) = E_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi_e)$, déterminer l'amplitude S_m et la phase initiale φ_s de la tension de sortie.

II - Analyse fréquentielle du circuit RLC série

Exercice C2 : « Fonction de transfert » en intensité d'un circuit RLC série



Considérons le circuit RLC série en interprétant l'intensité i comme étant la réponse au forçage e.

1 - Que représente physiquement la « fonction de transfert » $\underline{I}/\underline{E}$?

2 - En déduire son expression, d'abord en fonction de R, L et C, puis de $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ et $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

3 - Interpréter les comportements limites en très basse et très haute fréquence.

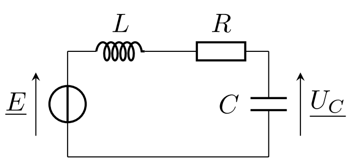
Exercice C3 : Acuité de la résonance en courant d'un RLC série

On introduit les pulsations de coupure réduites $x = \omega_\mathrm{c}/\omega_0$. Montrer que la détermination des pulsations de coupure revient à résoudre l'équation

$$Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1\,.$$

En déduire les deux pulsations de coupure réduites $x_\pm$, puis la largeur en pulsation $\Delta\omega$ de la résonance en fonction de ω_0 et Q.

Exercice C4 : Fonction de transfert en tension d'un circuit RLC série



Considérons le circuit RLC série en interprétant désormais la tension aux bornes du condensateur comme étant la réponse.

Établir l'expression de la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{U_C}/\underline{E}$.

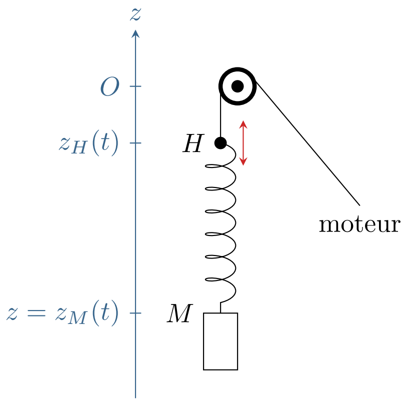
Exercice C5 : Mesurer la pulsation propre et le facteur de qualité

Dans le cas de l'étude en tension, exprimer $\underline{H}(\omega_0)$. En déduire comment mesurer Q et ω_0 à partir de mesures d'amplitude et de déphasage.

Étienne Thibierge, 6 janvier 2018, www.etienne-thibierge.fr

III - Analyse fréquentielle d'un oscillateur mécanique amorti

Exercice C6 : Équation du mouvement d'un oscillateur forcé



Un système de moteur et de poulie permet de faire osciller de façon harmonique le point d'attache du ressort,

$$z_H(t) = H_0 + A\cos(\omega t)\,.$$

Établir l'équation du mouvement de la masse M et l'écrire sous forme canonique. On prendra en compte une force de frottement linéaire.

Exercice C7 : Fonction de transfert d'un oscillateur forcé

En partant de l'équation différentielle avec second membre harmonique $A\cos(\omega t)$, établir l'expression de la fonction de transfert mécanique $\underline{H} = \underline{\xi}/A$ du système. On désigne par $\underline{\xi}$ l'amplitude complexe de $z(t)$.

Quel type de fonction de transfert reconnaît-on ? Conclure.