



BLAISE PASCAL  
PT 2019-2020

Chapitre 2 – Électronique

# Électronique numérique

## Au programme

Extrait du programme officiel : partie 2 « Électronique », bloc 4 « Électronique numérique ».

Le bloc 4 est exclusivement étudié de manière expérimentale et aborde la question du traitement numérique du signal dans le prolongement du programme de première année. Le professeur introduira les thèmes proposés au fur et à mesure des besoins et en relation avec les autres sujets d'étude. Le phénomène de repliement de spectre est expliqué qualitativement à l'aide d'une analogie stroboscopique, l'objectif étant de mettre en place la condition de Nyquist-Shannon et de réaliser convenablement une acquisition numérique en vue d'une analyse spectrale. Afin de mettre en évidence d'autres effets associés à l'échantillonnage, on réalise de manière comparative un filtre analogique passe-bas et un filtre numérique remplissant la même fonction, ce dernier étant réalisé à l'aide d'une feuille de calcul traitant l'acquisition numérique d'une entrée analogique, un CNA restituant ensuite une sortie analogique. On étudie expérimentalement l'influence de la fréquence d'échantillonnage.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Échantillonnage.	Décrire le mouvement apparent d'un segment tournant observé avec un stroboscope. Expliquer l'influence de la fréquence d'échantillonnage.
Condition de Nyquist-Shannon.	Mettre en évidence le phénomène de repliement de spectre dû à l'échantillonnage lors de l'utilisation d'un oscilloscope numérique ou d'une carte d'acquisition.
Analyse spectrale numérique.	Choisir les paramètres (durée, nombre d'échantillons, fréquence d'échantillonnage) d'une acquisition numérique afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon.
Filtrage numérique.	Réaliser un filtrage numérique passe-bas d'une acquisition, et mettre en évidence la limitation introduite par l'échantillonnage.

En gras, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Extrait du programme officiel de PTSI : partie « Formation expérimentale ».

Notions et contenus	Capacités exigibles
Numérisation d'un signal.	Déterminer le nombre de bits d'une conversion A/N et N/A.
Analyse spectrale.	Effectuer l'analyse spectrale d'un signal périodique à l'aide d'un oscilloscope numérique ou d'une carte d'acquisition. Choisir de façon cohérente la fréquence d'échantillonnage et la durée totale d'acquisition.

En gras, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

---

## Au concours

---

- ▷ Écrit : épreuve A 2019.
- ▷ Oral : occasionnellement.

---

## Plan du cours

---

<b>I</b>	<b>Numérisation d'un signal</b>	<b>3</b>
I.1	Intérêt de la numérisation. . . . .	3
I.2	Structure d'une chaîne d'acquisition et de numérisation . . . . .	3
<b>II</b>	<b>Échantillonnage</b>	<b>5</b>
II.1	Introduction : effet stroboscopique. . . . .	5
II.2	Repliement spectral . . . . .	7
II.3	Critère de Nyquist-Shannon . . . . .	9
II.4	Résolution spectrale et durée d'acquisition . . . . .	10
II.5	Complément : influence de la fenêtre de calcul du spectre . . . . .	10
<b>III</b>	<b>Quantification et résolution</b>	<b>11</b>
III.1	Pas de quantification . . . . .	11
III.2	Complément : bruit de quantification . . . . .	12
<b>IV</b>	<b>Filtrage numérique : exemple du passe-bas du premier ordre</b>	<b>13</b>
IV.1	Algorithme de filtrage . . . . .	13
IV.2	Mise en œuvre . . . . .	14
IV.3	Importance de la fréquence d'échantillonnage . . . . .	14

---

## Synthèse : choix des paramètres d'acquisition d'un signal

---

Les paramètres d'acquisition du signal peuvent être définis directement par des boutons (oscilloscope), par une interface graphique (logiciels type LatisPro) ou par l'intermédiaire d'un script de commande (carte d'acquisition type Arduino).

- ▷ **Fréquence d'échantillonnage :**
  - plus elle est élevée, meilleure sera l'image du signal, mais les données seront d'autant plus lourdes à stocker et à traiter ;
  - elle doit au moins respecter le critère de Shannon ( $f_e > 2f_{\max}$ ), sinon il faut utiliser un filtre anti-repliement ;
  - le traitement numérique du signal échantillonné peut imposer d'autres contraintes.
- ▷ **Durée d'acquisition :**
  - plus elle est élevée, meilleure sera la résolution spectrale du signal, mais les données seront d'autant plus lourdes à stocker et à traiter.
- ▷ **Nombre d'échantillons :** fixé par la fréquence d'échantillonnage et la durée d'acquisition.
- ▷ **Calibre :**
  - plus il est faible, meilleur sera le pas de quantification et donc la résolution (en volt) du signal ... mais s'il est trop faible il y aura saturation pour les valeurs élevées ;
  - il faut donc choisir le calibre immédiatement supérieur à la valeur maximale du signal.

Tout chaîne de transmission d'information passe aujourd'hui par un traitement numérique des signaux. L'objectif de ce chapitre est de comprendre les conditions à respecter pour pouvoir numériser un signal sans perte d'information.



Ce chapitre est abordé sous une forme qui mêle travail personnel, cours et TP. Les différentes parties sont distinguées par les pictogrammes ci-contre.

## I - Numérisation d'un signal

### I.1 - Intérêt de la numérisation



On appelle **signal** une grandeur physique  $X$  porteuse d'information (tension, position, température, etc.) encodée dans ses variations temporelles.

Le signal est dit **analogique** si la grandeur physique  $X(t)$  peut prendre un ensemble continu de valeurs et est définie sur un intervalle de temps continu. Le signal est dit **numérique** si la grandeur physique prend un ensemble discret de valeurs  $X_1, X_2$ , etc. et ne varie qu'à certains instants discrets  $t_1, t_2$ , etc. Les valeurs prises par le signal ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs différentes, généralement une puissance de 2.

**Remarque :** Mathématiquement, un signal analogique est une fonction d'une variable réelle (le temps) à valeurs dans  $\mathbb{R}$  alors qu'un signal numérique est une suite à valeurs dans un ensemble fini.

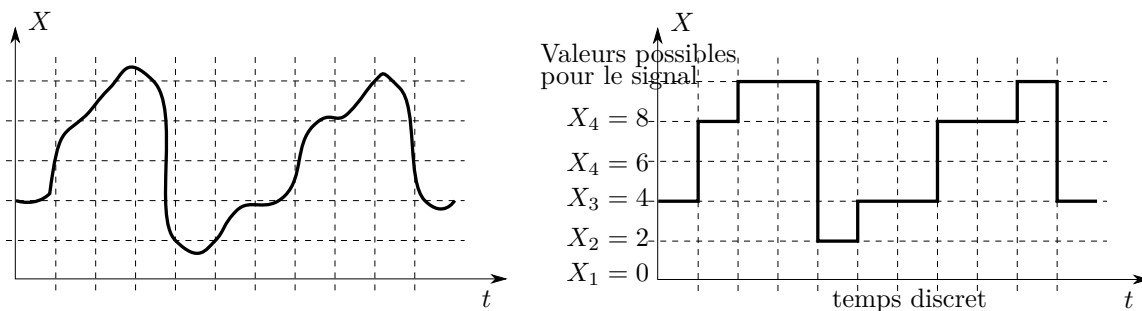


Figure 1 – Signal analogique et signal numérique.

Pourquoi numériser un signal ?

- ▷ pour le stocker : par exemple sur un disque dur d'un ordinateur, une carte SD dans un smartphone, etc.
- ▷ pour faire des calculs : il est infiniment plus simple d'effectuer des opérations sur un signal numérique à l'aide d'un programme informatique plutôt que sur un signal analogique avec des circuits électroniques.

**Exemple :** les oscilloscopes modernes numérisent le signal d'entrée pour pouvoir l'analyser.

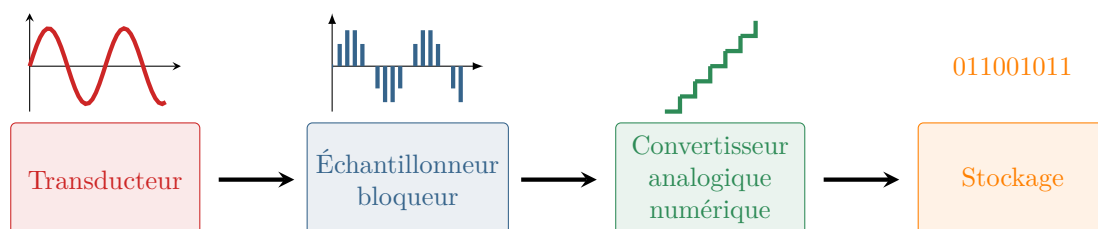
- ▷ pour le transmettre : comme un signal numérisé varie « par paliers », il est moins sensible au bruit lors d'une transmission car même en présence de perturbations aléatoires il sera possible de distinguer les différents paliers.

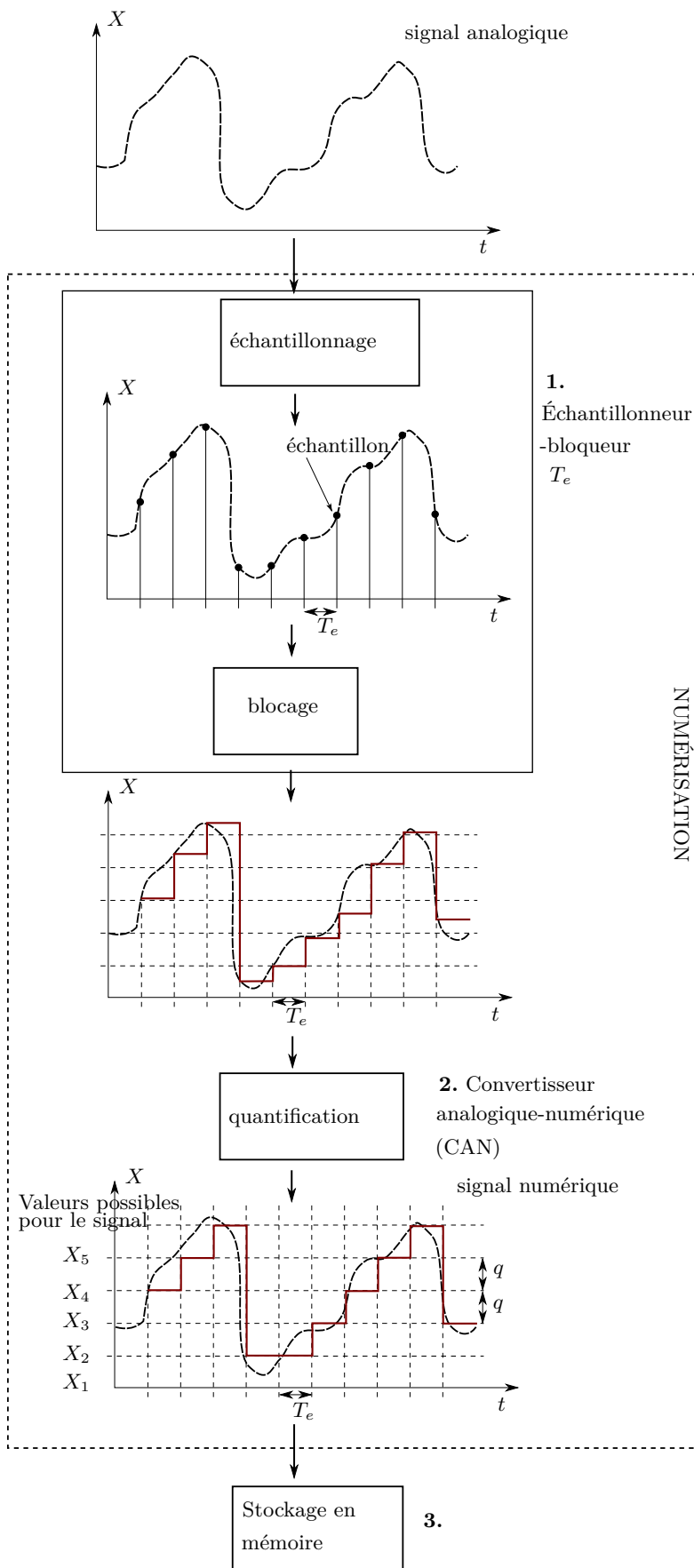
**Exemple :** C'est pour cette raison que la télévision hertzienne a été remplacée par la TNT, télévision numérique terrestre.

### I.2 - Structure d'une chaîne d'acquisition et de numérisation



Une chaîne d'acquisition et de numérisation contient toujours les mêmes éléments, présentés ci-dessous, et dont le rôle est discuté page suivante.





**Bloc 1 : transducteur**

Le signal analogique d'intérêt (température, vitesse, position, etc.) est converti en tension analogique.

**Bloc 2 : échantillonneur-bloqueur**

La tension analogique est envoyée en entrée d'un échantillonneur-bloqueur. Son rôle est de bloquer la valeur de la tension à un niveau constant pendant une durée  $T_e$  appelée **période d'échantillonnage**. La valeur est actualisée tous les  $T_e$ .

**Bloc 3 : convertisseur analogique numérique**

En sortie de l'échantillonneur-bloqueur, la tension est toujours analogique : elle peut prendre n'importe quelle valeur. Comme un système numérique ne peut traiter que des données codées en binaire avec un nombre de bits fini, il faut discrétiser les valeurs prises. C'est le rôle du convertisseur analogique numérique, usuellement abrégé CAN, qui attribue à la tension la valeur binaire permise la plus proche (ou immédiatement inférieure) à sa valeur réelle.

Les cartes d'acquisition, par exemple SY-SAM ou ARDUINO, contiennent les deux blocs échantillonneur-bloqueur et CAN.

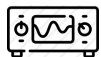
**Bloc 4 : stockage**

Les valeurs de sortie du CAN sont enfin stockées en mémoire pour être affichées ou manipulées.

## II - Échantillonnage

Échantillonner un signal analogique revient à « prélever » sa valeur à certains instant  $t_n$  séparés d'un intervalle de temps régulier  $T_e$  appelé **période d'échantillonnage** : on a donc  $t_n = nT_e$ . On nomme **fréquence d'échantillonnage**  $f_e = 1/T_e$ . Le nombre d'échantillons  $N_e$  est bien sûr relié à la durée totale d'acquisition  $T_a = N_e T_e$ .

### II.1 - Introduction : effet stroboscopique

 Un disque est mis en rotation avec une période  $T_0$  (fréquence  $f_0$ ). Il est éclairé périodiquement par un **stroboscope**, qui émet des flashes lumineux avec une période  $T_e$  (fréquence  $f_e$ ). Un repère est dessiné sur le disque tournant, voir figure 2, dont on étudie le mouvement apparent sous l'effet des flashes.

↪ le signal « analogique » est le mouvement réel du repère, le signal « échantillonné » est le mouvement apparent sous l'effet des flashes du stroboscope.



**Figure 2 – Dispositif expérimental pour l'étude du mouvement stroboscopique.**

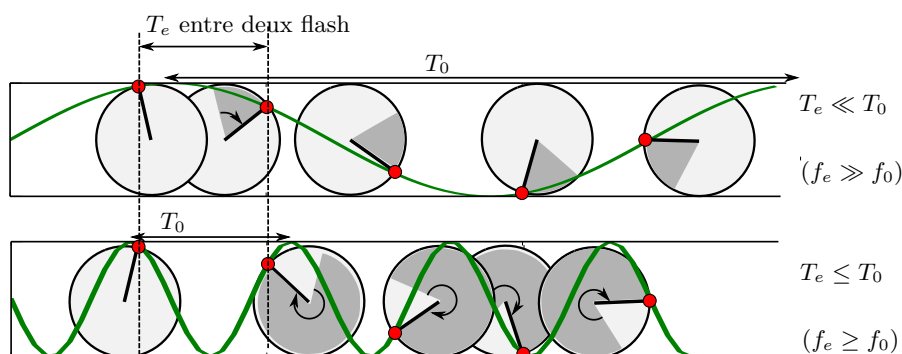
▷ Si  $f_e \gg f_0$  :

*Espace 1*

▷ Si  $f_e$  est légèrement supérieure à  $f_0$  : le repère reçoit un nouveau flash un peu avant d'avoir parcouru un tour complet.

→ Impression visuelle :

*Espace 2*



**Figure 3 – Effet stroboscopique pour  $T_e < T_0$ .**

▷ Si  $f_e = f_0$  : le repère reçoit un nouveau flash alors qu'il a parcouru exactement un tour.

→ Impression visuelle :

*Espace 3*

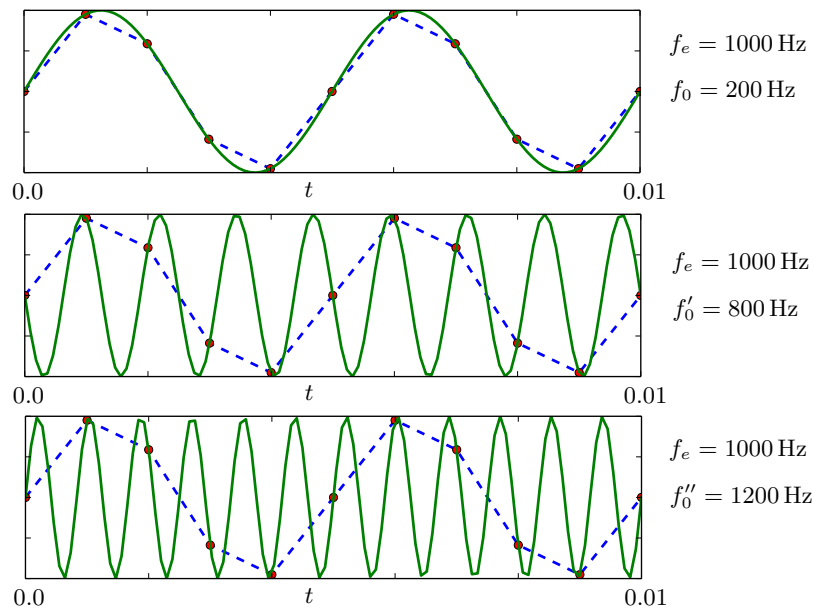
▷ Si  $f_e$  est légèrement inférieure à  $f_0$  : le repère reçoit un nouveau flash un peu après avoir parcouru un tour complet.

→ Impression visuelle :

*Espace 4*

- ▷ Si  $f_e \ll f_0$  : le repère reçoit un nouveau flash alors qu'il a parcouru plusieurs tours complets, voir figure 4.
  - il est impossible de connaître le nombre de tours parcourus entre deux flashes.
  -

Espace 5



**Figure 4 – Effet stroboscopique pour  $T_e > T_0$ .** Le signal analogique est représenté en trait plein, les échantillons par les points et le signal échantillonné en traits pointillés.

*Application : Pourquoi les roues des voitures tournent-elles parfois à l'envers dans les films ?*

Espace 6

• **Conclusion et généralisation**

 L'étude précédente permet de dégager des conclusions très générales sur les phénomènes liés à l'échantillonnage.

Pour que le signal échantillonné soit fidèle au signal analogique, la fréquence d'échantillonnage doit être suffisamment élevée : qualitativement,

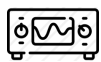
Espace 7


Cependant, plus la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  est élevée plus le nombre d'échantillons  $N_e$  d'un signal de durée totale  $T_a$  fixée est élevé, ce qui peut avoir des conséquences néfastes en termes de temps de calcul ou de volume de stockage des données. De plus, n'importe quel dispositif d'acquisition est limité en fréquence.

↪ il est nécessaire de préciser le critère de fréquence pour qu'il soit vraiment utilisable.

## II.2 - Repliement spectral

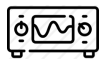
### a) Précaution préalable : calcul des spectres avec LatisPro

 L'algorithme de transformée de Fourier rapide utilisé par LatisPro requiert un nombre de points égal à une puissance de 2. Si jamais ce n'est pas le cas, le logiciel complète de lui-même le signal par des zéros pour calculer le spectre, ce qui a pour effet de modifier artificiellement la fréquence d'échantillonnage. C'est presque toujours sans importance ... sauf ici où l'on cherche à étudier précisément l'influence de cette fréquence.

↪  **Attention !** Dans toute la suite, vous choisirez un nombre total de points égal à 1024 et réglerez la période d'échantillonnage, en laissant la durée totale d'acquisition s'ajuster d'elle-même. Attention, LatisPro ayant parfois tendance à faire le contraire de ce que vous voulez, il faudra fréquemment y revenir.

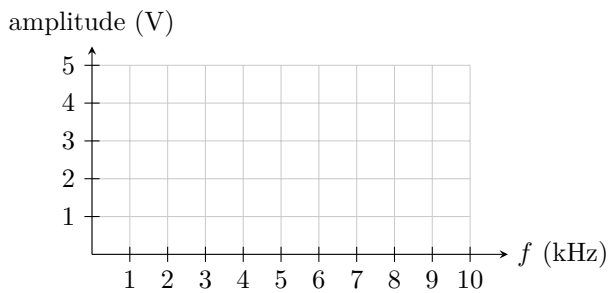
### b) Réplication du spectre

#### • Cas d'un signal harmonique

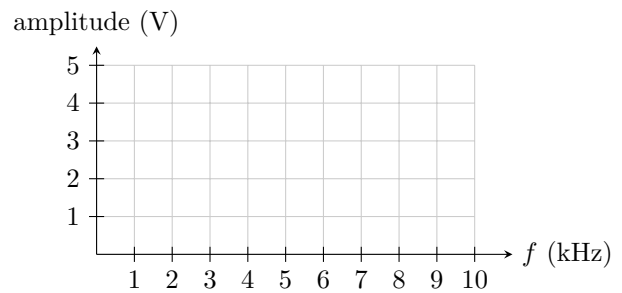
 Produire avec le GBF un signal sinusoïdal d'amplitude environ égale à 4 V et de fréquence  $f_0 = 1$  kHz qui sera modifiée par la suite. Dans un premier temps, l'acquérir avec LatisPro sur 1024 points et avec une période d'échantillonnage  $T_e = 10$   $\mu$ s.

Une fois le logiciel correctement paramétré, modifier la période d'échantillonnage à  $T_e = 100$   $\mu$ s (soit  $f_e = 10$  kHz) puis compléter les graphes ci-dessous, en demandant à LatisPro d'afficher les spectres sur l'intervalle  $[0, f_e]$ .

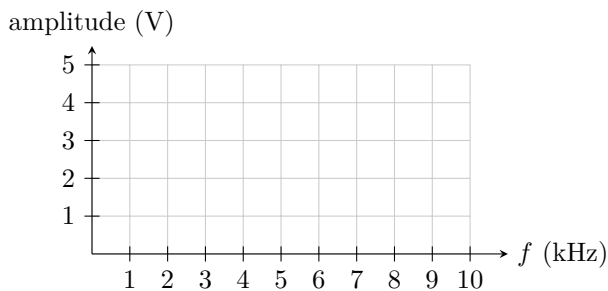
Spectre théorique,  $f_0 = 1$  kHz



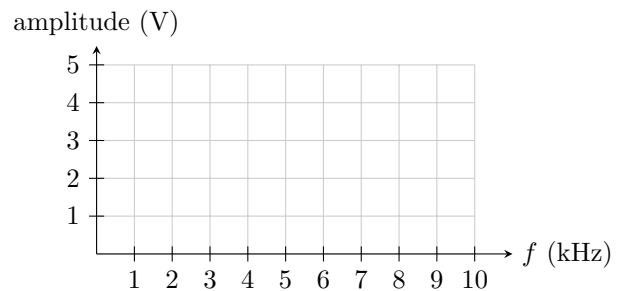
Spectre expérimental,  $f_0 = 1$  kHz



Spectre expérimental,  $f_0 = 2$  kHz

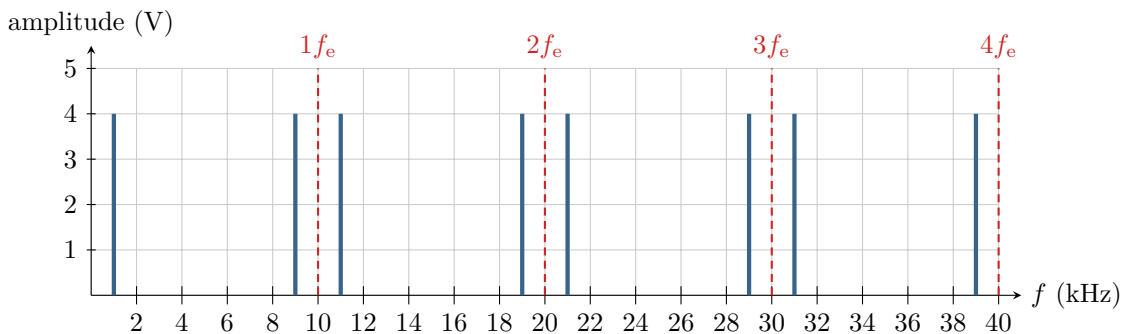


Spectre expérimental,  $f_0 = 4$  kHz



Observations :

Si le logiciel permettait d'afficher le spectre sur des échelles de fréquence plus grandes<sup>1</sup>, on observerait d'autres pics répliqués, répartis périodiquement aux fréquences  $kf_e \pm f_0$ ,  $k$  entier, comme représenté figure 5. Physiquement, ces pics répliqués viennent du fait qu'il n'y a pas qu'un seul signal harmonique qui puisse correspondre à la série d'échantillons, comme discuté à partir de la figure 4. Les fréquences des pics répliqués sont celles de ces autres signaux harmoniques.



**Figure 5 – Spectre d'un signal harmonique échantillonné.** Le signal a pour fréquence  $f_0 = 1$  kHz et il est échantillonné avec la fréquence  $f_e = 10$  kHz.

*Remarque :* On constate un enrichissement spectral entre le signal analogique et le signal échantillonné : l'échantillonnage est une opération non-linéaire.

• Cas général

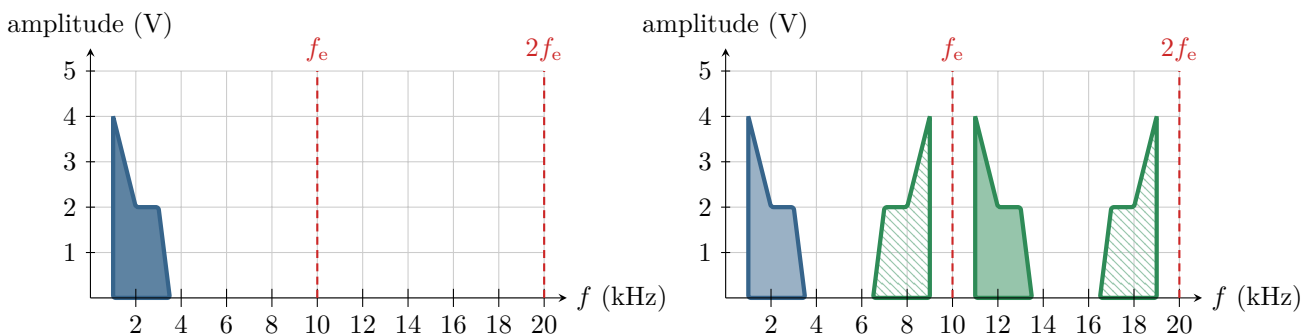
D'après le théorème de Fourier, n'importe quel signal peut s'écrire comme une somme de signaux sinusoïdaux,

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n).$$

Si le signal n'est pas périodique, la somme est à remplacer par une intégrale :

$$s(t) = \int_0^{+\infty} A(f) \cos [2\pi f t + \varphi(f)] df.$$

Chacune des composantes harmoniques subit le même phénomène de réplication lors du processus d'échantillonnage, et il se retrouve donc sur le spectre du signal complet comme représenté figure 6.



**Figure 6 – Spectre d'un signal quelconque échantillonné.** Le signal possède un spectre compris entre 1 et 3,5 kHz et il est échantillonné avec la fréquence  $f_e = 10$  kHz. La figure de gauche représente le spectre du signal analogique, celle de droite le spectre du signal échantillonné, présentant des répliques du spectre.

Espace 9

1. Comme nous le verrons au paragraphe II.4, ce n'est cependant pas un défaut du logiciel mais une limite propre aux signaux échantillonnés.



Une première difficulté posée par ces répliques du spectre se rencontre lors de la reconstruction du signal à partir du signal échantillonné : en raison de la réplication du spectre, le signal reconstruit diffère fortement du signal analogique.

↪ solution simple :

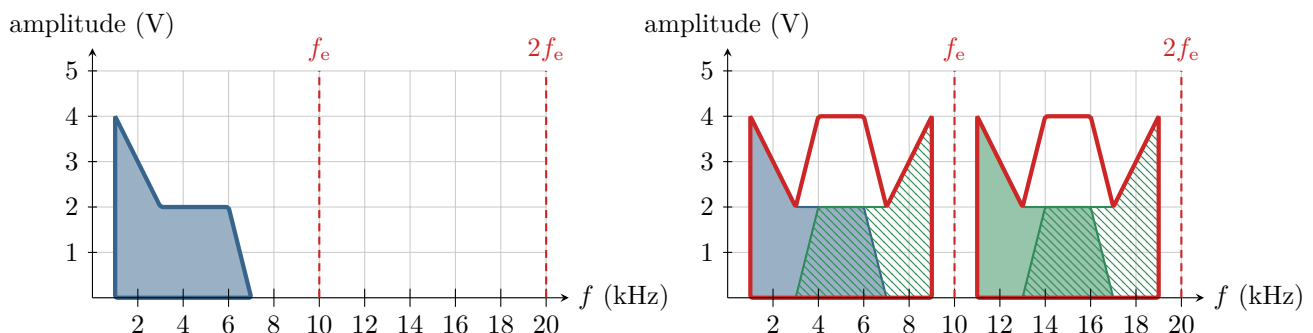
Espace 10

Si le filtre est idéal, le spectre en sortie du passe-bas est identique à celui du signal analogique, et le signal reconstitué est fidèle à l'original.

### c) Repliement spectral

Une seconde difficulté, beaucoup plus embarrassante, intervient lorsque les spectres du signal et de ses répliques se recouvrent, si bien qu'ils ne peuvent plus être distingués : c'est le cas de la figure 7.

↪ le spectre et ses répliques sont impossibles à séparer.



**Figure 7 – Spectre d'un signal quelconque échantillonné en présence de recouvrement spectral.** Le signal possède un spectre compris entre 1 et 7 kHz et il est échantillonné avec la fréquence  $f_e = 10$  kHz. La figure de gauche représente le spectre du signal analogique. La figure de droite représente la construction du spectre du signal échantillonné, en tenant compte du recouvrement spectral.

On appelle **repliement spectral** ou **aliasing** le phénomène de recouvrement du spectre du signal analogique et de ses répliques lors du processus d'échantillonnage. Ce phénomène n'est pas corrigé par filtrage a posteriori et doit être anticipé en amont de l'acquisition.

### II.3 - Critère de Nyquist-Shannon

Pour que le signal numérisé soit fidèle au signal analogique, le repliement de spectre est à éviter absolument. Si le spectre du signal est connu a priori, on peut choisir en conséquence la fréquence d'échantillonnage.

Espace 11

**Critère de Nyquist-Shannon :**

Espace 12


Cependant, les limites intrinsèques des composants (ou des outils de traitement numérique) font qu'il n'est pas toujours possible de respecter le critère de Shannon.

↪ solution pour éviter le repliement de spectre :

Espace 13

Inconvénient : ce n'est pas directement le signal analogique qui est numérisé, et la perte des hautes fréquences du spectre peut entraîner une perte d'informations.

## II.4 - Résolution spectrale et durée d'acquisition

 Rappelons que l'on considère un signal échantillonné à la fréquence  $f_e$ . La durée totale d'acquisition  $T_a$  est relié au nombre d'échantillons par

$$T_a = N_e T_e = \frac{N_e}{f_e}.$$

Comme nous l'avons déjà mentionné aux paragraphes précédents, le spectre du signal échantillonné contient des répliques du spectre du signal analogique réparties périodiquement, avec une période  $f_e$ . L'algorithme de transformée de Fourier rapide, utilisé par tous les logiciels, ne calcule ses valeurs que sur la première période :



Un spectre calculé numériquement ne contient que des fréquences comprises entre 0 et  $f_e$ .

Or ce spectre est calculé à partir d'un signal discrétisé en  $N_e$  points : il est lui-même discrétisé en  $N_e$  points, ce qui limite sa résolution, c'est-à-dire l'écart entre deux fréquences consécutives contenues dans le spectre.



La **résolution** d'un spectre calculé numériquement est gouvernée par la durée d'acquisition,

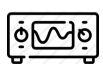
Espace 14

## II.5 - Complément : influence de la fenêtre de calcul du spectre

*Ce paragraphe est donné à titre de complément culturel : y revenir seulement s'il reste du temps en fin de séance.*

L'oscilloscope ou LatisPro n'utilisent pas nécessairement la totalité du signal numérisé pour calculer son spectre mais se restreignent à une portion appelée **fenêtre de calcul**.

**Remarque :** Cette portion de signal peut même parfois être lissée, notamment au niveau des bords, pour éviter certains effets parasites sur le spectre. Ce traitement est appelé **fenêtrage du signal**. L'oscilloscope propose diverses options : fenêtre rectangulaire, de Hamming, etc. Chaque type de fenêtrage affecte le spectre calculé, ce qui présente différents avantages et inconvénients.



Générer avec le GBF un signal sinusoïdal de fréquence  $f_0 = 100$  Hz et l'acquérir sur 1024 points avec une fréquence d'échantillonnage  $f_e = 10$  kHz. Afficher son spectre avec LatisPro.

Changer la fenêtre du signal sur laquelle le spectre est calculé : régler « sélection de période » non plus en mode automatique mais en mode manuel. Sélectionner manuellement la fenêtre au hasard. Faire plusieurs essais.

Quel est l'impact sur le spectre ?

Espace 15

Comment éviter ces pics parasites ?

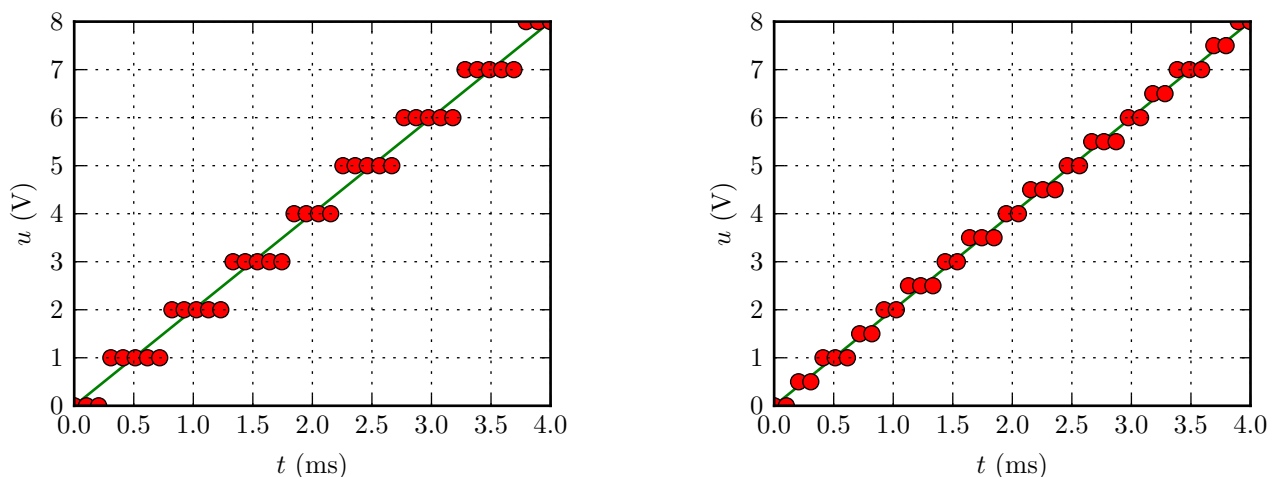
Espace 16

On retiendra que ces pics parasites n'ont pas d'origine physique, et n'ont pas une grande importance : la sélection automatique de la fenêtre de calcul permet en général de les éviter.

### III - Quantification et résolution

#### III.1 - Pas de quantification

Commençons par nous intéresser à l'étape de quantification. On appelle **pas** ou **quantum de quantification** l'écart (en volt) entre deux valeurs binaires successives. L'influence du pas de quantification sur le signal numérisé est représenté figure 8.



**Figure 8 – Deux exemples de numérisation d'une même tension.** Le signal analogique est représenté en trait plein bleu, le signal numérisé par les points verts. Dans les deux cas la période d'échantillonnage est de 0,1 ms. Sur la figure de gauche le pas de quantification vaut 1 V alors qu'il vaut 0,5 V sur la figure de droite.

Le pas de quantification est déterminé par le calibre et la résolution de l'acquisition. Ces deux paramètres sont généralement indépendants l'un de l'autre.

- ▷ Le **calibre**  $C$  donne la gamme de valeurs  $\pm C$  que le signal numérisé est susceptible de prendre. Il doit être supérieur à la valeur maximale du signal analogique, sans quoi le signal numérisé fait apparaître un phénomène de saturation. La valeur  $2C$ , c'est-à-dire la largeur de l'intervalle de valeurs permises, est la **tension de pleine échelle** du CAN.
- ▷ La **résolution**  $N$  indique le nombre de bits sur lequel le signal numérisé est codé :  $2^N$  valeurs sont possibles dans l'intervalle  $[-C, +C]$ , ou autrement dit cet intervalle est divisé en  $2^N - 1$  intervalles de largeur identique.

↪ pas de quantification :

Espace 17

**Exemples :** La résolution d'un CD audio est de 16 bits. Celle d'un pixel d'un appareil numérique reflex (un pixel correspond à une couleur) est de 14 ou 16 bits, mais si elle est comprimée au format jpeg la résolution n'est plus que 8 bits.



En observant un signal triangulaire avec LatisPro, déterminer la résolution de la conversion analogique numérique réalisée par la carte SYSAM. Les acquisitions LatisPro se font avec un calibre de 10 V.

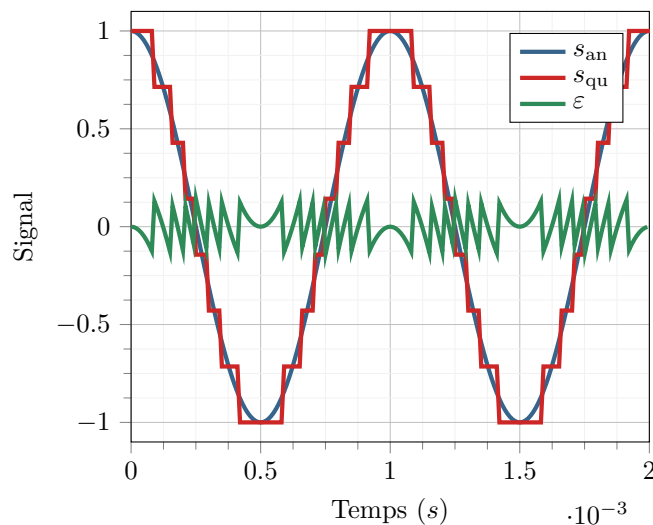
Espace 18

### III.2 - Complément : bruit de quantification

Ce paragraphe est donné à titre de complément culturel : y revenir uniquement s'il reste du temps en fin de séance.



La figure 9 représente le signal analogique  $s_{an}$ , sa version quantifiée  $s_{qu}$  avec une carte d'acquisition de résolution 3 bits, ainsi que l'erreur d'arrondi générée au cours du processus, définie par  $\varepsilon(t) = s_{an}(t) - s_{qu}(t)$  et appelée **bruit de quantification**. L'erreur d'arrondi associée à la quantification a bien sûr une valeur comprise entre  $-p/2$  et  $p/2$  quelle que soit l'amplitude du signal analogique.



**Figure 9 – Bruit de quantification.** Les courbes sont tracées pour une résolution de 3 bits et un calibre de 1 V, ce qui donne un rapport signal sur bruit de  $1,2 \cdot 10^{-2}$ .

L'un des critères d'une bonne acquisition est le rapport signal sur bruit, noté SNR pour « signal to noise ratio » :

$$SNR = \frac{\langle \varepsilon^2 \rangle}{\langle s_{qu}^2 \rangle}$$

Son calcul est un excellent indicateur du bon usage du calibre et de l'influence de la résolution, comme l'indique le tableau à double entrée ci-dessous.

		Calibre		
		1 V	5 V	10 V
Résolution	3 bits	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$2,0 \cdot 10^{-1}$	1,4
	5 bits	$6,5 \cdot 10^{-4}$	$2,2 \cdot 10^{-2}$	$5,3 \cdot 10^{-2}$
	8 bits	$1,0 \cdot 10^{-5}$	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$9,4 \cdot 10^{-4}$

## IV - Filtrage numérique : exemple du passe-bas du premier ordre

L'un des principaux intérêts de la numérisation d'un signal est la simplicité d'un traitement numérique comparé à un traitement analogique : les tâches peuvent être plus complexes et plus facilement modifiables (changer la valeur d'une variable dans un programme est bien plus simple que de changer de composant électronique!). Une fois traité, le signal numérique peut être de nouveau converti en signal analogique par un convertisseur numérique-analogique (CNA). Exactement comme un CAN, un CNA possède un pas de quantification.

À titre d'illustration, nous allons numériser un signal, le filtrer numériquement puis le reconvertir sous forme analogique.

### IV.1 - Algorithme de filtrage



La fonction de transfert d'un filtre passe-bas s'écrit sous forme canonique

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{H}_0}{1 + j\omega/\omega_c}$$

avec  $\underline{H}_0$  le gain statique et  $\omega_c$  la pulsation de coupure. Dans la suite on prendra

$$\underline{H}_0 = 1 \quad \text{et} \quad \omega_c = 1,0 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

ce qui donne une fréquence de coupure  $f_c = 1,6 \text{ kHz}$ .

Pour calculer numériquement le signal de sortie, on pourrait calculer le spectre du signal numérisé et le multiplier par la fonction de transfert. Il est cependant plus simple de travailler directement dans le domaine temporel.

↪ relation différentielle entre  $s$  et  $e$  :

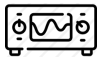
*Espace 19*

Pour transformer cette relation différentielle en une équation sur les échantillons, il faut approximer la dérivée. Le plus simple est d'utiliser le schéma d'Euler explicite, le pas de temps étant égal à la période d'échantillonnage :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{s_{n+1} - s_n}{T_e}$$

On peut alors en déduire une relation de récurrence permettant de calculer  $s_{n+1} = s((n+1)T_e)$  à partir de  $e_n = e(nT_e)$  et  $s_n = s(nT_e)$ , et ainsi de reconstruire point par point le signal (numérisé)  $s$  à partir de  $e$ .

*Espace 20*



Il nous faut maintenant implémenter cet algorithme, ce que nous allons faire sous Latis Pro. Recopier le code ci-dessous (sans les commentaires!) dans une feuille de calcul : onglet « Traitement » puis « Feuille de calcul ». Pour exécuter cette feuille de calcul, il suffit d'appuyer sur la touche F2 (ou « Calcul » puis « Exécuter »), et on peut ensuite afficher la courbe associée.

```

Te = 10.e-6           // Déclare la variable Te (période d'échantillonnage) avec la valeur
                    // de 10 microsecondes. A MODIFIER par la suite.

omegac = 1e4         // Déclare la variable omegac (pulsation de coupure du filtre)
                    // avec la valeur 10 000 rad/s.

A = omegac * Te
B = 1 - omegac * Te

s = Table(0)        // Sert à créer un tableau s, qui sera le signal de sortie
                    // En Python on aurait écrit s = np.zeros(len(EA1))

s[n] = A*EA1[n-1] + B*s[n-1] // Equation de récurrence
                    // A MODIFIER éventuellement selon la voie d'entrée utilisée
                    // En Python, l'équivalent serait :
                    // for n in range(1,len(s)):
                    //     s[n] = A*EA1[n-1] + B*s[n-1]

```

## IV.2 - Mise en œuvre



Acquérir un signal sinusoïdal  $e(t)$  de fréquence  $f_0 = 1$  kHz sur 1024 points avec une période d'échantillonnage  $T_e = 10 \mu\text{s}$ . Le filtrer numériquement et afficher la courbe représentant  $s$ .

Pour restituer le signal filtré sous forme analogique, on utilise le CNA de la carte SYSAM. Il se paramètre dans l'onglet « sortie » de LatisPro (flèche vert foncée située à côté du paramétrage de l'acquisition et de l'affichage des courbes). Le signal indiqué est envoyé sur la borne « sortie DA » de la carte d'acquisition, ou bien périodiquement si le « mode GBF » est activé, ou bien une unique fois si l'on clique sur le bouton « Émettre ».

**⚠ Attention !** La carte d'acquisition ne peut pas délivrer une tension supérieure à 5 V : modifier l'amplitude de l'entrée  $e$  si nécessaire.

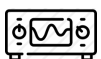
Observer ce signal à l'oscilloscope. Attention, comme l'acquisition est faite sur une durée finie alors le signal de sortie est également émis sur la même durée finie : il faut donc utiliser le mode d'acquisition unique de l'oscilloscope (ou appuyer sur RUN/STOP) pour bloquer l'acquisition.

À l'aide de l'oscilloscope, mesurer la valeur expérimentale de  $|\underline{H}(f = f_0)|$ . Comparer à la valeur attendue.

Vérifier qualitativement et rapidement en changeant la fréquence du signal d'entrée que le système agit bien en filtre passe-bas.

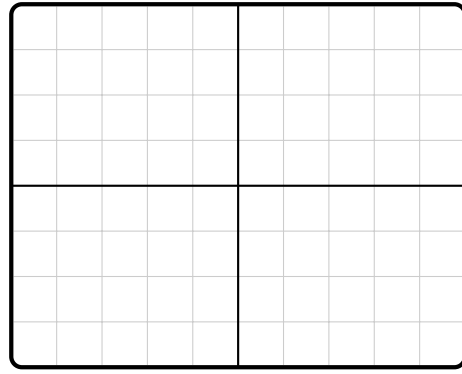
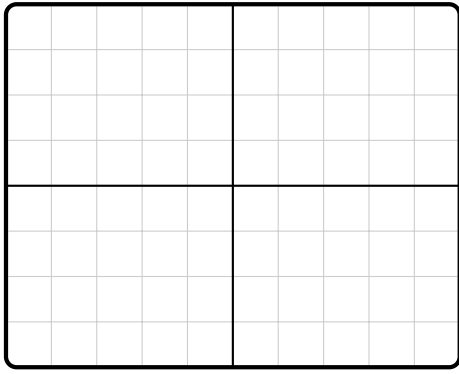
## IV.3 - Importance de la fréquence d'échantillonnage

En plus de la fréquence du signal  $f_0$  et de la fréquence d'échantillonnage  $f_e$ , une troisième fréquence intervient ici : la fréquence de coupure du filtre  $f_c$ . L'objectif de cette dernière partie est de mettre en évidence une contrainte sur la fréquence d'échantillonnage pour que le filtrage numérique soit efficace.



On travaille en conservant la fréquence du signal et la fréquence de coupure du filtre fixées : seule la fréquence d'échantillonnage est modifiée : **n'oubliez pas** de modifier la feuille de calcul en conséquence.

Filtrer le même signal que précédemment pour  $T_e = 10 \mu\text{s}$ , puis  $100 \mu\text{s}$ . Reproduire (page suivante) l'allure du signal observé à l'écran.



Interprétation :

Espace 21



Espace 22