BLAISE PASCAL
PT 2019-2020

TD 10 – Électronique

Correction

ALI et rétroaction

Exercices

Exercice 1 : Montage dérivateur

[1 | 1 |]

Il n'y a qu'une rétroaction négative, donc l'ALI fonctionne probablement en régime linéaire. La présence du condensateur incite à travailler en complexes. Les deux tensions intéressantes s et e sont aux extrémités des branches, on utilise donc la loi des nœuds en termes de potentiel à l'entrée ⊖ de l'ALI :

$$\frac{\underline{E}-\underline{V_-}}{1/\mathrm{j}C\omega}+\frac{\underline{S}-\underline{V_-}}{R}=0\,.$$

Comme le fonctionnement est linéaire, alors $\underline{V_-}=\underline{V_+}=0$ donc

$$\mathrm{j}C\omega\,\underline{E}+\frac{\underline{S}}{R}=0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\underline{S}=-\mathrm{j}RC\omega\,\underline{E}\,,}$$

ce qui donne dans le domaine temporel

$$\boxed{s=-RC\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\,.}$$

Exercice 2 : Montage sommateur

[1 | 1 |]

La seule rétroaction est négative, on peut donc supposer que l'ALI fonctionne en régime linéaire.

D'après la loi des nœuds en termes de potentiel, en notant i_1 et i_2 les courants dans les branches d'entrée soumises à v_1 et v_2,

$$i_1+i_2=0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{v_1-v_+}{R}+\frac{v_2-v_+}{R}=0 \qquad \text{d'où} \qquad v_+=\frac{v_1+v_2}{2}\,.$$

Notons v_- le potentiel de l'entrée inverseuse, égal à la tension aux bornes de la résistance représentée verticalement. Les deux résistances de la branche du bas sont parcourues par le même courant, donc

$$\frac{v_-}{v_\mathrm{s}}=\frac{R}{R+R} \qquad \text{soit} \qquad v_\mathrm{s}=2v_-\,.$$

Enfin, comme l'ALI fonctionne de régime linéaire alors $v_+=v_-$ d'où

$$\boxed{v_\mathrm{s}=v_1+v_2\,.}$$

> *Le point important de l'exercice est le choix de la méthode pour exprimer les potentiels. Sur la branche du haut, l'entrée intéressante ⊕ est à une extrémité de la branche d'où le choix de la loi des nœuds, alors que sur la branche du bas l'entrée intéressante ⊖ est au centre de la branche, d'où l'intérêt du pont diviseur.*

Exercice 3 : Intégrateur différentiel

[1 | 2]

La seule rétroaction est négative, on peut donc supposer le régime linéaire. En notation complexe, la loi des nœuds à l'entrée ⊖ donne

$$\frac{\underline{E_1}-\underline{V_-}}{R}+\frac{\underline{S}-\underline{V_-}}{1/\mathrm{j}C\omega}=0$$

Un pont diviseur de tension dans la branche du bas donne

$$\frac{\underline{V_+}}{\underline{E_2}}=\frac{1/\mathrm{j}C\omega}{R+1/\mathrm{j}C\omega}=\frac{1}{1+\mathrm{j}RC\omega}$$

Étienne Thibierge, 10 novembre 2019, www.etienne-thibierge.fr

Or en fonctionnement linéaire on a

$$\underline{V_-} = \underline{V_+} = \frac{1}{1+\mathrm{j}RC\omega}\underline{E_2}\,.$$

En fusionnant les deux équations,

$$\frac{\underline{E_1}}{R} - \frac{1}{R(1+\mathrm{j}RC\omega)}\underline{E_2} + \mathrm{j}C\omega\underline{S} - \frac{\mathrm{j}C\omega}{1+\mathrm{j}RC\omega}\underline{E_2} = 0$$

soit

$$\frac{\underline{E_1}}{\mathrm{j}RC\omega} - \frac{1}{\mathrm{j}RC\omega(1+\mathrm{j}RC\omega)}\underline{E_2} + \underline{S} - \frac{1}{1+\mathrm{j}RC\omega}\underline{E_2} = 0$$

et ainsi

$$\underline{S} = -\frac{\underline{E_1}}{\mathrm{j}RC\omega} + \frac{\underline{E_2}}{\mathrm{j}RC\omega}\left(\frac{1}{1+\mathrm{j}RC\omega} + \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1+\mathrm{j}RC\omega}\right)$$

ce qui donne au final

$$\boxed{\underline{S} = \frac{1}{\mathrm{j}RC\omega}\left(\underline{E_2} - \underline{E_1}\right)\,.}$$

On utilise la correspondance habituelle pour passer dans le domaine temporel,

$$\boxed{s(t) = s(0) + \frac{1}{RC}\int_0^t (e_2 - e_1)\mathrm{d}t\,.}$$

Exercice 4 : Comparateur à hystérésis inverseur décalé [2 | 1 |]

Les notations sont celles de la figure 1.

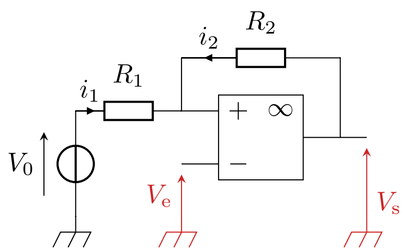

Figure 1 – Notations pour l'étude du comparateur à hystérésis inverseur décalé.

1 On applique la loi des nœuds en termes de potentiel à l'entrée $\oplus$,

$$i_1 + i_2 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{V_0 - V_+}{R_1} + \frac{V_s - V_+}{R_2} = 0$$

d'où on déduit

$$\frac{V_0}{R_1} + \frac{V_s}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)V_+$$

soit en multipliant l'équation par R_1R_2

$$(R_2 + R_1)V_+ = R_2V_0 + R_1V_s$$

et enfin

$$V_+ = \frac{R_1}{R_1+R_2}V_s + \frac{R_2}{R_1+R_2}V_0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{V_+ = \beta V_s + (1-\beta)V_0\,.}$$

2 La seule rétroaction est positive, l'ALI fonctionne donc nécessairement en régime de saturation.

- **Bascule haut $\to$ bas :** supposons l'ALI en saturation haute, $V_s = +V_{sat}$. Il demeure dans cet étant tant que $\varepsilon = V_+ - V_- > 0$. Comme $V_- = V_e$, cela donne $V_e < V_+$ soit

$$\boxed{V_e < \beta V_{sat} + (1-\beta)V_0 = 9\,\mathrm{V}\,.}$$

- **Bascule bas $\to$ haut :** supposons maintenant l'ALI en saturation basse, $V_s = -V_{sat}$. Il y reste tant que $V_e > V_+$, soit

$$\boxed{V_e > -\beta V_{sat} + (1-\beta)V_0 = -1\,\mathrm{V}\,.}$$

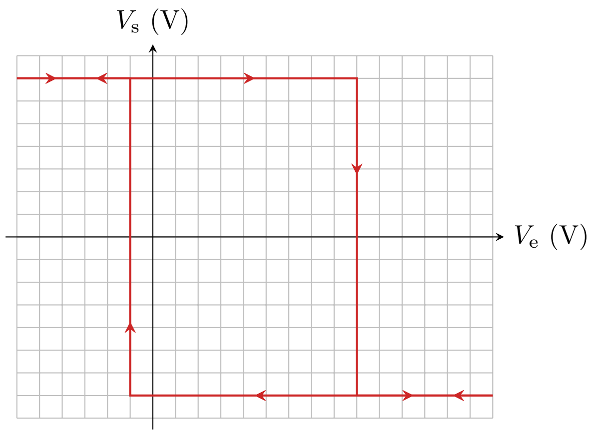

Figure 2 – Cycle du comparateur à hystérésis inverseur décalé.

$\boxed{3}$ Voir figure 2. Les tensions de basculement dépendent de l'état du système, il s'agit donc bien d'un comparateur à hystérésis. Il est qualifié d'« inverseur » car une entrée négative le place en saturation positive et réciproquement, et de « décalé » car son cycle n'est pas symétrique par rapport à $V_e = 0$ mais par rapport à $V_e = (1-\beta)V_0 = 4\,\mathrm{V}$.

$\boxed{4}$ Initialement la tension d'entrée est supérieure aux deux tensions de bascule donc la saturation est forcément négative. On repère ensuite les instants où la tension d'entrée devient inférieure à la tension de basculement basse en décroissant ou supérieure à la tension de basculement haute en croissant, et on en déduit le chronogramme de la tension de sortie figure 3.

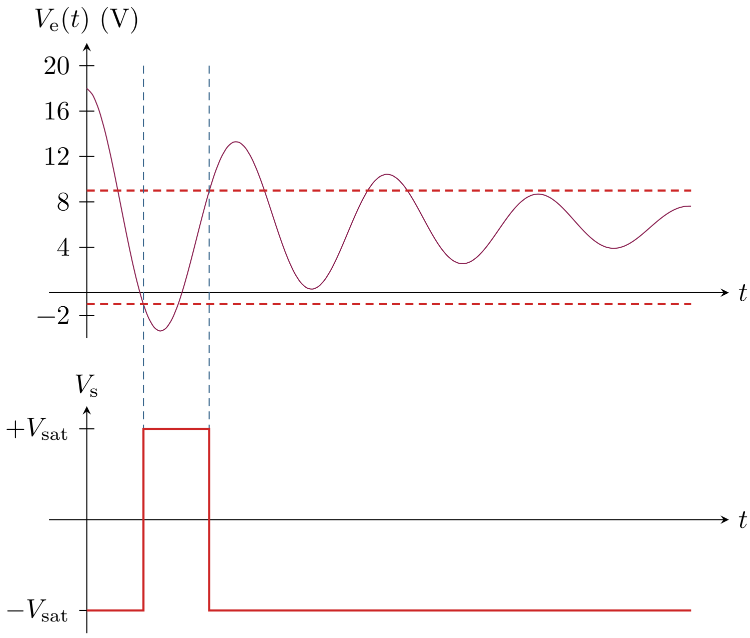

Figure 3 – Construction de la tension de sortie connaissant la tension d'entrée.

Exercice 5 : Simulateur d'inductance [2 | 2]

On utilise les notations de la figure 4. D'après la loi des nœuds,

$$\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2} + \underline{I_3}$$

La résistance $-R_N$ est directement soumise à la tension $\underline{U}$, donc

$$\underline{I_1} = -\frac{\underline{U}}{R_N}\,.$$

De plus, comme l'ALI est en régime linéaire alors $V_- = V_+ = 0$ et on en déduit

$$\underline{I_3} = \frac{\underline{U}}{R}$$

Étienne Thibierge, 10 novembre 2019, www.etienne-thibierge.fr

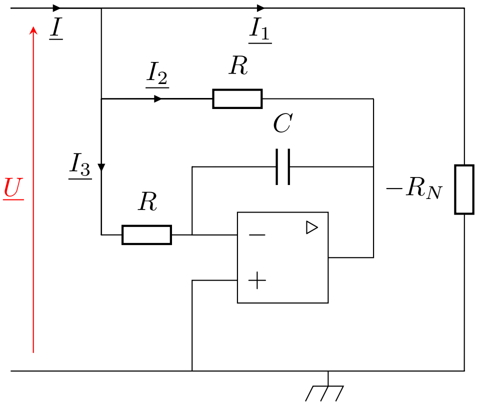

Figure 4 – Notations pour l'étude du simulateur d'inductance.

car la résistance se trouve directement soumise à la tension $\underline{U}$ elle aussi. Enfin, pour exprimer $\underline{I_2}$, on applique la loi des mailles aux deux branches « R » et « RC »,

$$R\underline{I_2} = R\underline{I_3} + \frac{\underline{I_3}}{\mathrm{j}C\omega} \qquad \text{d'où} \qquad \underline{I_2} = \frac{\underline{U}}{R}\left(1 + \frac{1}{\mathrm{j}RC\omega}\right).$$

On en déduit donc

$$\underline{I} = -\frac{\underline{U}}{R_N} + \frac{\underline{U}}{R}\left(1 + \frac{1}{\mathrm{j}RC\omega}\right) + \frac{\underline{U}}{R}$$

d'où

$$\boxed{\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{2}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}R^2C\omega} - \frac{1}{R_N}\,.}$$

> *Contrairement à la majorité des exercices avec ALI, exprimer la tension de sortie n'a aucun intérêt ici, voire est contre-productif car cela introduit une inconnue supplémentaire dans les calculs.*

1 Une inductance pure a une admittance complexe $\underline{Y_L} = 1/\mathrm{j}L\omega$: l'admittance d'entrée du montage prend une telle forme **pour $R_N = R/2$**, et auquel cas

$$\boxed{L_{\text{éq}} = R^2C\,.}$$

Exercice 6 : Oscillateur à résistance négative [2 | 1 |]

1 Il y a une double rétroaction sur les entrées ⊕ et ⊖, ce qui rend possible (mais pas certain) un fonctionnement linéaire.

2 En raisonnant sur la boucle de rétroaction négative,

$$v_s = u - R_N i$$

avec v_s le potentiel de sortie de l'ALI. Par ailleurs, dans la boucle de rétroaction positive, les deux résistances R forment un pont diviseur de tension, donc

$$\frac{v_+}{v_s} = \frac{u}{v_s} = \frac{R}{R+R} = \frac{1}{2} \qquad \text{d'où} \qquad v_s = 2u\,.$$

En combinant,

$$u - R_N i = 2u \qquad \text{soit} \qquad \boxed{u = -R_N i}$$

Comme sont orientés en convention récepteur, on a bien équivalence avec une loi d'Ohm d'une résistance négative.

> *Il est très important de mentionner la convention : la loi d'Ohm d'une résistance « normale » orientée en convention générateur s'écrit elle aussi $u = -Ri$.*

3 L'ALI est idéal donc $i_- = i_+ = 0$. La loi d'Ohm appliquée d'une part à la résistance R_N et d'autre part à la résistance R dessinée horizontalement sur l'énoncé donne

$$u - v_s = R_N i \qquad \text{et} \qquad v_s - u = R i_R\,,$$

ce qui permet d'en déduire

$$\boxed{i_R = -\frac{R_N}{R} i\,.}$$

La différence provient du courant de sortie de l'ALI, qui est inconnu a priori (et qui n'a aucune raison d'être tout le temps nul, et ne peut même jamais l'être dans le montage). Comme le courant de sortie du montage à résistance négative est également i (évident vu le circuit complet), on en déduit qu'une partie du courant part dans le fil connecté à la masse.

> *C'est une remarque très générale : le fait de placer la masse à un endroit d'un circuit à ALI a un effet sur les tensions, mais aussi sur les intensités, la masse peut toujours « faire disparaître » ou « créer » un courant qu'on ne peut pas connaître a priori, et qui n'a aucune raison d'être nul.*

4 En orientant tous les dipôles en convention récepteur, la loi des mailles donne

$$u + u_C + u_L + u_0 = 0$$

Il faut dériver pour utiliser la loi de comportement du condensateur, et on obtient alors

$$-R_N \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{C} + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R_0 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0\,,$$

ce qui devient en réorganisant

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R_0 - R_N}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC} i = 0\,.}$$

La stabilité des solutions dépend du signe de $R_0 - R_N$:
- ▷ si $R_0 > R_N$ alors les solutions sont stables et les oscillations de l'intensité s'amortissent au cours du temps ;
- ▷ si $R_0 = R_N$ alors les oscillations sont harmoniques et leur amplitude demeure constante au cours du temps ;
- ▷ si $R_0 < R_N$ alors les solutions de l'équation sont instables et l'amplitude des oscillations croît au cours du temps ... mais pas indéfiniment : elle finit par saturer lorsque $v_s = \pm V_{\text{sat}}$ auquel cas l'équation différentielle obtenue n'est plus valable car l'ALI passe en régime saturé et le montage change de comportement.

Annales de concours

Exercice 7 : Filtre en peigne de fréquence [oral banque PT | 2 | 2]

1 Considérons en entrée de la ligne le signal

$$\underline{U_\text{S}} = U_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,.$$

En sortie,

$$\underline{U_\text{B}} = \underline{H_\text{L}}\,\underline{U_\text{S}} = U_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\underline{U_\text{B}} = U_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-\tau)}\,.}$$

Ainsi, le signal de sortie est égal au signal d'entrée décalé d'une durée τ : le phénomène physique mis en jeu est donc la propagation du signal dans la ligne à retard, qui nécessité une durée τ.

2 Raisonnons sur l'ALI dessiné à droite du schéma. Par un pont diviseur de tension,

$$\frac{\underline{V_+}}{\underline{U_\text{B}}} = \frac{R_0}{R_0 + R_0} \qquad \text{soit} \qquad \underline{V_+} = \frac{1}{2}\,\underline{U_\text{B}}\,.$$

De même,

$$\frac{\underline{V_-}}{\underline{U_\text{D}}} = \frac{R}{R + \beta R} \qquad \text{soit} \qquad \underline{V_-} = \frac{1}{1+\beta}\underline{U_\text{D}}\,.$$

L'ALI fonctionne en régime linéaire, donc $\underline{V_+} = \underline{V_-}$ soit

$$\frac{1}{2}\underline{U_\text{B}} = \frac{1}{1+\beta}\,\underline{U_\text{D}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\underline{H_\text{B}} = \frac{1+\beta}{2} = \alpha\,.}$$

3 Raisonnons maintenant sur l'ALI représenté à gauche du schéma. D'après la loi des nœuds en termes de potentiel,

$$\frac{\underline{U_\text{E}} - \underline{V_+}}{R} + \frac{\underline{U_\text{D}} - \underline{V_+}}{R} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \underline{V_+} = \frac{\underline{U_\text{E}} + \underline{U_\text{D}}}{2}$$

Par un pont diviseur de tension,

$$\underline{V_-} = \frac{\underline{U_S}}{2}\,.$$

L'ALI fonctionnant en régime linéaire,

$$\frac{\underline{U_E} + \underline{U_D}}{2} = \frac{\underline{U_S}}{2} \qquad \text{soit} \qquad \underline{U_S} = \underline{U_E} + \underline{U_D}\,.$$

Or d'après les questions précédentes,

$$\underline{U_D} = \alpha \underline{U_B} = \alpha\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\underline{U_S}$$

si bien que l'équation devient

$$\left(1 - \alpha\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\right)\underline{U_S} = \underline{U_E}$$

et finalement

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{U_S}}{\underline{U_E}} = \frac{1}{1-\alpha\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}}\,.}$$

4 D'après ce qui précède,

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1-\alpha\cos(\omega\tau) - \mathrm{j}\alpha\sin(\omega\tau)}$$

ce qui donne

$$|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)|^2 = \frac{1}{(1-\alpha\cos(\omega\tau))^2 + (\alpha\sin(\omega\tau))^2} = \frac{1}{1-2\alpha\cos(\omega\tau)+\alpha^2\cos^2(\omega\tau)+\alpha^2\sin^2(\omega\tau)}$$

ce qui se simplifie en

$$|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)|^2 = \frac{1}{1+\alpha^2-2\alpha\cos(\omega\tau)}\,.$$

Le maximum est atteint lorsque $\cos(\omega\tau) = +1$, soit

$$H_{\max}^2 = \frac{1}{1+\alpha^2-2\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{H_{\max} = \frac{1}{1-\alpha}\,.}$$

Le minimum est atteint lorsque $\cos(\omega\tau) = -1$, soit

$$H_{\min}^2 = \frac{1}{1+\alpha^2+2\alpha} = \frac{1}{(1+\alpha)^2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{H_{\min} = \frac{1}{1+\alpha}\,.}$$

Le cosinus étant 2π-périodique, la période Ω du peigne de fréquence est telle que

$$(\omega+\Omega)\tau = \omega\tau + 2\pi \qquad \text{soit} \qquad \Omega\tau = 2\pi \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\Omega = \frac{2\pi}{\tau}\,.}$$

Pour le calcul de la bande passante, commençons par calculer la plus petite pulsation ω_c pour laquelle $|\underline{H}| = H_{\max}/\sqrt{2}$, telle que

$$\frac{1}{1+\alpha^2-2\alpha\cos(\omega_c\tau)} = \frac{1}{2(1-\alpha)^2}$$

On en déduit

$$1+\alpha^2-2\alpha\cos(\omega_c\tau) = 2-4\alpha+2\alpha^2 \qquad \text{soit} \qquad -2\alpha\cos(\omega_c\tau) = 1-4\alpha+\alpha^2 \qquad \text{d'où} \qquad \cos(\omega_c\tau) = \frac{4\alpha-1-\alpha^2}{2\alpha}$$

et ainsi

$$\omega_c = \frac{1}{\tau}\arccos\frac{4\alpha-1-\alpha^2}{2\alpha}\,.$$

On en déduit la bande passante, $\Delta\omega = 2\omega_c$, donnée par

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{2}{\tau}\arccos\frac{4\alpha-1-\alpha^2}{2\alpha}\,.}$$

5 En première approximation, ce filtre laisse passer toutes les harmoniques de fréquence multiples $\Omega/2\pi$ et coupe les autres. Hors le signal d'intérêt est périodique de période T, donc de fréquence $1/T$, si bien que toutes ses composantes de Fourier ont des fréquences multiples de $1/T$. Pour que le filtre transmette ces composantes en éliminant le bruit donc les fréquences sont différentes, il faut avoir

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \qquad \text{soit} \qquad \frac{2\pi/\tau}{2\pi} = \frac{1}{T} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\tau = T\,.}$$

Exercice 8 : Démodulateur à déphasage [oral banque PT | 3 | 2]

1 Un ALI idéal se caractérise par
- ▹ une impédance d'entrée infinie, donc des courants de polarisation nuls ;
- ▹ une impédance de sortie nulle, donc un courant de sortie indépendant de la tension de sortie ;
- ▹ une saturation éventuelle de la tension de sortie ($V_{\mathrm{sat}} \simeq 15\,\mathrm{V}$) et du courant de sortie ($i_{\mathrm{sat}} \simeq 40\,\mathrm{mA}$).

On peut également supposer son gain infini, et un slew rate infini.

L'ALI présent dans le système possède une rétroaction sur sa borne $\ominus$, il fonctionne donc probablement **en régime linéaire**.

2 Par la loi des nœuds en potentiel,

$$\frac{\underline{U_e} - \underline{V_-}}{R} + \frac{\underline{U_1} - \underline{V_-}}{R} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \underline{V_-} = \frac{\underline{U_1} + \underline{U_e}}{2}\,.$$

Par un pont diviseur de tension,

$$\frac{\underline{V_+}}{\underline{U_e}} = \frac{1/\mathrm{j}C_1\omega}{R_1 + 1/\mathrm{j}C_1\omega} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}R_1C_1\omega} \qquad \text{donc} \qquad \underline{V_+} = \frac{1}{1+\mathrm{j}R_1C_1\omega}\underline{U_e}\,.$$

L'ALI fonctionnant en régime linéaire, $\underline{V_-} = \underline{V_+}$, donc

$$\frac{\underline{U_1} + \underline{U_e}}{2} = \frac{1}{1+\mathrm{j}R_1C_1\omega}\underline{U_e} \qquad \text{soit} \qquad \underline{U_1} = \frac{2}{1+\mathrm{j}R_1C_1\omega}\underline{U_e} - \underline{U_e}$$

d'où

$$\boxed{\underline{H_1} = \frac{1 - \mathrm{j}R_1C_1\omega}{1+\mathrm{j}R_1C_1\omega}\,.}$$

La fonction de transfert $\underline{H_1}$ est le quotient de deux nombres complexes conjugués, donc de même module : on en déduit directement

$$\forall \omega, \quad \boxed{\left|\underline{H_1}\right| = 1\,.}$$

L'argument est donné par

$$\arg \underline{H_1} = \arg(1 - \mathrm{j}R_1C_1\omega) - \arg(1 + \mathrm{j}R_1C_1\omega) = \arctan\frac{-R_1C_1\omega}{1} - \arctan\frac{R_1C_1\omega}{1}$$

On en conclut

$$\boxed{\arg \underline{H_1} = -2\arctan(R_1C_1\omega)\,.}$$

3 Comme $\left|\underline{H_1}\right| = 1$, alors u_e et u_1 sont toujours de même amplitude. La condition porte donc sur le déphasage : on cherche ω_0 tel que

$$\arg \underline{H_1}(\omega_0) = -2\arctan(R_1C_1\omega_0) = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{soit} \qquad \arctan(R_1C_1\omega_0) = \frac{\pi}{4}$$

et comme $\tan(\pi/4) = 1$, il vient

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{R_1C_1}\,.}$$

4 La loi de comportement du multiplieur s'écrit ici

$$u_2(t) = K u_e(t)\, u_1(t)\,.$$

Posons $\varphi_1(\omega) = -2\arctan(R_1C_1\omega)$: d'après ce qui précède,

$$u_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi_1)\,.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} u_2(t) &= KA^2\cos(\omega t)\cos(\omega t + \varphi_1) \\ &= \frac{KA^2}{2}\left[\cos(2\omega t + \varphi_1) + \cos(\varphi_1)\right] \end{aligned}$$

$$\boxed{u_2(t) = \frac{KA^2}{2}\cos(\varphi_1) + \frac{KA^2}{2}\cos(2\omega t + \varphi_1)\,.}$$

5 Si $\omega = \omega_0$, alors par définition $\varphi_1 = -\pi/2$ et donc

$$u_2(t) = \frac{KA^2}{2} \cos\left(2\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

La fonction de transfert de l'association R_2, C_2 vaut

$$\underline{H_2} = \frac{1/\mathrm{j}C_2\omega}{R_2 + 1/\mathrm{j}C_2\omega} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}R_2C_2\omega}\,,$$

ce qui donne

$$\left|\underline{H_2}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (R_2C_2\omega)^2}} \qquad \text{et} \qquad \varphi_2 = \arg \underline{H_2} = -\arctan(R_2C_2\omega)\,.$$

On a donc

$$\boxed{u_\mathrm{s}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2R_2C_2\omega_0)^2}} \cos\left(2\omega_0 t - \frac{\pi}{2} - \arctan(2R_2C_2\omega_0)\right)}$$

La tension u_s est harmonique, donc pour qu'elle soit constante il faut que son amplitude soit nulle. Le filtre étant passe-bas, il faut que la pulsation $2\omega_0$ soit bien supérieure à la pulsation de coupure du filtre, soit

$$2\omega_0 \gg \frac{1}{R_2C_2} \qquad \text{soit} \qquad \frac{2}{R_1C_1} \gg \frac{1}{R_2C_2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{C_2 \gg \frac{R_1C_1}{2R_2}\,.}$$

6 Pour la tension d'entrée proposée, le déphasage φ_1 en sortie de l'ALI vaut

$$\varphi_1 = -2\arctan\left[R_1C_1(\omega_0 + \Delta\omega)\right] = -2\arctan\left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)$$

car $R_1C_1\omega_0 = 1$. Par un développement limité autour de $x = 1$, sachant que $\arctan'(x) = 1/(1 + x^2)$,

$$\varphi_1 \simeq -\frac{\pi}{2} - \frac{2}{1 + 1^2}\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\,.$$

Le terme de fréquence double de la tension u_2 sera coupé par le filtre passe-bas, en revanche comme cette fois $\varphi_1 \neq \pi/2$, la tension de sortie sera non nulle, égale à

$$U_\mathrm{s} = \frac{KA^2}{2}\cos(\varphi_1) = \frac{KA^2}{2}\sin\left(-\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)$$

et comme $\Delta\omega \ll \omega_0$, un développement limité donne

$$\boxed{U_\mathrm{s} = -\frac{KA^2}{2}\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\,.}$$

La mesure de $\Delta\omega$ est donc possible à partir de celle de la tension de sortie.

> *Le calcul que je propose ci-dessus me semble bien trop difficile pour être celui attendu lors d'un oral de banque PT ... mais je ne vois pas comment faire autrement pour répondre à la question !*

Exercice 9 : Filtre de Sallen-Key

[oral banque PT | 💡 3 | ⚒ 3]

1 Dans la limite des hautes fréquences, le condensateur est équivalent à un fil donc $V_\oplus = 0$. L'ALI étant idéal, $V_\ominus = V_\oplus$ et comme $\underline{S} = V_\ominus$ (fil) alors

$$\underline{S} = 0 \qquad \text{(limite THF).}$$

Dans la limite des basses fréquences, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. Comme l'ALI est idéal, aucun courant n'entre dans la borne $\oplus$ donc aucun courant ne peut traverser les deux résistances. On a donc $V_\oplus = \underline{E}$, d'où on déduit par le même raisonnement que

$$\underline{S} = \underline{E} \qquad \text{(limite TBF).}$$

Il s'agit donc d'un **filtre passe-bas**.

2 Notons A le nœud commun aux deux résistances et au condensateur. La loi des nœuds en termes de potentiel appliquée à l'entrée $\oplus$ de l'ALI donne

$$\frac{0 - V_\oplus}{1/\mathrm{j}C_2\omega} + \frac{V_A - V_\oplus}{R} = 0\,.$$

Comme $V_\oplus = V_\ominus = \underline{S}$,

$$-\mathrm{j}C_2\omega\,\underline{S} + \frac{V_A - \underline{S}}{R} = 0$$

ou encore

$$V_A = (1 + \mathrm{j}RC\omega)\underline{S}\,. \tag{1}$$

La loi des nœuds en termes de potentiel appliquée maintenant au nœud A donne

$$\frac{\underline{E} - V_A}{R} + \frac{V_\oplus - V_A}{R} + \frac{\underline{S} - V_A}{1/\mathrm{j}C\omega} = 0\,.$$

Comme $V_\oplus = V_\ominus = \underline{S}$,

$$[\underline{E} - V_A] + [\underline{S} - V_A] + \mathrm{j}RC\omega\,[\underline{S} - V_A] = 0\,. \tag{2}$$

En insérant l'équation (1) dans l'équation (2), on obtient

$$[\underline{E} - (1 + \mathrm{j}RC\omega)\underline{S}] + [-\mathrm{j}RC\omega\underline{S}] + \mathrm{j}RC\omega\,[-\mathrm{j}RC\omega\underline{S}] = 0\,,$$

puis

$$\underline{E} - \left(1 + 2\mathrm{j}RC\omega - R^2C^2\omega^2\right)\underline{S} = 0$$

ce qui permet finalement d'aboutir à

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{1}{1 + 2\mathrm{j}RC\omega - R^2C^2\omega^2}\,.}$$

La pulsation caractéristique du filtre est $\omega_0 = 1/RC$.

3 Limite très basse fréquence $\omega \ll \omega_0$:

$$\underline{H} \sim \frac{1}{1} \qquad \text{donc} \qquad G_{\mathrm{dB}} = 20\log|\underline{H}| \sim 0\,.$$

Limite très haute fréquence $\omega \gg \omega_0$:

$$\underline{H} \sim \frac{1}{-R^2C^2\omega^2} \qquad \text{donc} \qquad G_{\mathrm{dB}} \sim -20\log\left(R^2C^2\omega^2\right) = -40\log\omega - 40\log RC\,,$$

ce qui donne une asymptote de pente -40 dB/décade. Enfin, en $\omega = \omega_0$ on a

$$\underline{H} = \frac{1}{2\mathrm{j}} \qquad \text{soit} \qquad G_{\mathrm{dB}} = -20\log 2 = -6\,\mathrm{dB}\,.$$

On en déduit le diagramme de Bode représenté figure 5.

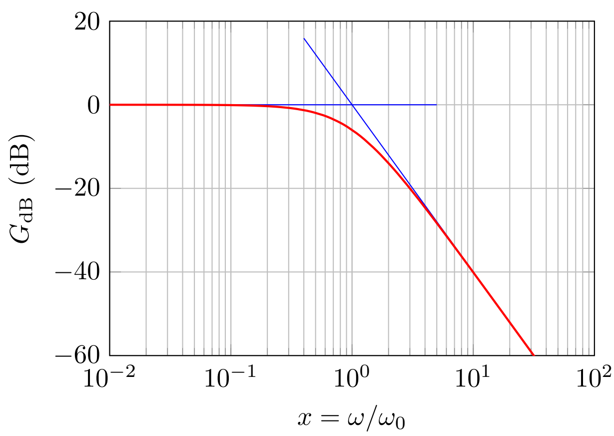

Figure 5 – Diagramme de Bode du filtre de Sallen-Key.

4 Le signal créneau se caractérise par un spectre assez étendu du côté des hautes fréquences.

- ▷ Si la fréquence f du créneau est nettement inférieure à f_0, seule la partie très haute fréquence du spectre est filtrée : le signal de sortie a la même allure que le signal d'entrée hormis au niveau des sauts du créneau, où l'influence des hautes fréquences est prépondérante.
- ▷ Si f est du même ordre que f_0, alors l'allure du signal est nettement modifiée par le filtre mais l'atténuation n'est que moyennement marquée.
- ▷ Si $f \gg f_0$, le signal est modifié et très atténué : il est presque complètement coupé.

Exercice 10 : Amplificateur inverseur, modèle du premier ordre [oral banque PT | 3 | 3]

1 L'ALI étant idéal, le même courant traverse les résistances R_1 et R_2. Ainsi,

$$\frac{V_\mathrm{e} - V_\ominus}{R_1} = \frac{V_\ominus - V_\mathrm{s}}{R_2} \qquad \text{soit} \qquad \frac{V_\mathrm{e}}{R_1} = -\frac{V_\mathrm{s}}{R_2}$$

puisque $V_\ominus = V_\oplus = 0$. Finalement,

$$\boxed{\underline{H} = -\frac{R_2}{R_1}\,.}$$

Le courant d'entrée dans le montage vaut $I_\mathrm{e} = (V_\mathrm{e} - V_\ominus)/R_1 = V_\mathrm{e}/R_1$, d'où

$$\boxed{\underline{Z}_\mathrm{e} = \frac{V_\mathrm{e}}{I_\mathrm{e}} = R_1\,.}$$

2 Le gain statique de l'ALI vaut $\mu_0 \sim 1 \cdot 10^5$. Les fréquences usuelles en électronique peuvent aller jusqu'à 1 MHz, et sont en général très supérieures à la fréquence de coupure de l'ALI.

3 La tension d'entrée ε ne peut plus être supposée nulle. Le courant d'entrée du montage traverse toujours les deux résistances, donc

$$\frac{V_\mathrm{e} - V_\ominus}{R_1} = \frac{V_\ominus - V_\mathrm{s}}{R_2}$$

avec cette fois $V_\ominus = -\varepsilon = -V_\mathrm{s}/\mu$, d'où

$$R_2\left(V_\mathrm{e} + \frac{V_\mathrm{s}}{\mu}\right) = R_1\left(-\frac{V_\mathrm{s}}{\mu} - V_\mathrm{s}\right)$$

$$R_2 V_\mathrm{e} = -R_1\left(\frac{V_\mathrm{s}}{\mu} + V_\mathrm{s}\right) - R_2\frac{V_\mathrm{s}}{\mu}$$

$$R_2 V_\mathrm{e} = -(R_1 + R_2)\frac{V_\mathrm{s}}{\mu} - R_1 V_\mathrm{s}$$

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} V_\mathrm{e} = -\left(\frac{1}{\mu} + \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)$$

$$\frac{V_\mathrm{s}}{V_\mathrm{e}} = \frac{-\dfrac{R_2}{R_1+R_2}}{\dfrac{1}{\mu} + \dfrac{R_1}{R_1+R_2}}$$

$$\frac{V_\mathrm{s}}{V_\mathrm{e}} = \frac{-\dfrac{R_2}{R_1+R_2}}{\dfrac{1}{\mu} + \dfrac{R_1}{R_1+R_2}}$$

$$\frac{V_\mathrm{s}}{V_\mathrm{e}} = \frac{-\dfrac{R_2}{R_1+R_2}}{\dfrac{1}{\mu_0} + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\mu_0\omega_\mathrm{c}} + \dfrac{R_1}{R_1+R_2}}$$

On peut alors identifier la forme canonique,

$$\underline{H'} = \frac{-\dfrac{R_2}{R_1+R_2} \times \dfrac{1}{\dfrac{1}{\mu_0} + \dfrac{R_1}{R_1+R_2}}}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\mu_0\omega_\mathrm{c}} \times \dfrac{1}{\dfrac{1}{\mu_0} + \dfrac{R_1}{R_1+R_2}}}$$

On identifie alors le gain maximal,

$$\underline{H_0} = -\frac{R_2}{R_1+R_2} \times \frac{1}{\dfrac{1}{\mu_0} + \dfrac{R_1}{R_1+R_2}} \simeq -\frac{R_2}{R_1+R_2} \times \frac{1}{\dfrac{R_1}{R_1+R_2}} = -\frac{R_2}{R_1}$$

si $\mu_0 \gg (R_1 + R_2)/R_1$, et la pulsation de coupure

$$\omega_{\mathrm{c}}' = \mu_0 \omega_{\mathrm{c}} \times \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) = \omega_{\mathrm{c}} \times \left(1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2} \right) \simeq \frac{\omega_{\mathrm{c}} \mu_0 R_1}{R_1 + R_2} \,.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ On constate que la rétroaction diminue fortement le gain et élargit la bande passante d'autant.