



# Systèmes linéaires

## Plan du cours

<b>I</b>	<b>Système linéaire, continu et invariant temporellement</b>	<b>2</b>
I.1	Définitions . . . . .	2
I.2	Description temporelle d'un SLCI : équation différentielle . . . . .	3
I.3	Description fréquentielle d'un SLCI : fonction de transfert harmonique. . . . .	4
I.4	Lien entre les descriptions temporelle et fréquentielle . . . . .	6
<b>II</b>	<b>Stabilité</b>	<b>8</b>
II.1	Définition . . . . .	8
II.2	Cas d'un système du premier ordre . . . . .	8
II.3	Cas d'un système du second ordre . . . . .	9
<b>III</b>	<b>Signal de sortie d'un SLCI, filtrage</b>	<b>11</b>
III.1	Décomposition de Fourier . . . . .	11
III.2	Diagramme de Bode . . . . .	12
III.3	Reconstruction du signal de sortie d'un SLCI . . . . .	13

## Au programme

Extrait du programme officiel : partie 2 « Électronique », bloc 1 « Stabilité des systèmes linéaires ».

Le bloc 1 s'intéresse aux propriétés des systèmes linéaires déjà abordés en première année. Les capacités relatives au filtrage et à la décomposition harmonique d'un signal périodique sont révisées sans ajout de nouvelles compétences. L'étude est complétée par une analyse de la stabilité des systèmes du premier et du second ordre en examinant le régime transitoire associé à la relation différentielle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Fonction de transfert d'un système entrée-sortie linéaire continu et invariant.	Transposer la fonction de transfert opérationnelle dans les domaines fréquentiel (fonction de transfert harmonique) ou temporel (relation différentielle).
Stabilité.	Discuter la stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2 d'après les signes des coefficients de la relation différentielle ou de la fonction de transfert.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Extrait du programme officiel : appendice 2 « Outils mathématiques », bloc 2 « Analyse de Fourier ».

Le thème « analyse de Fourier » prolonge l'étude de l'outil « séries de Fourier » abordée en PTSI et réutilisée en classe de PT. [...]

Notions et contenus	Capacités exigibles
Décomposition d'une fonction périodique en série de Fourier.	Utiliser un développement en série de Fourier fourni. Utiliser un raisonnement par superposition.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

## Au concours

- ▷ Écrit : épreuve A 2015, 2016, 2018, 2019, principalement du filtrage au sein de parties d'électronique plus larges.
- ▷ Oral : filtrage régulièrement, le reste plus rarement.

Ce chapitre se résume essentiellement à des révisions, dont l'objectif est de (re)faire le lien entre les descriptions temporelle (équation différentielle) et fréquentielle (fonction de transfert) d'un système.

## I - Système linéaire, continu et invariant temporellement

### I.1 - Définitions

On s'intéresse dans la suite à un système physique pouvant être sollicité par une **grandeur d'entrée**, ou **forçage**, notée  $e(t)$ . La réaction du système se traduit par la modification d'une **grandeur de sortie**, ou **réponse**, notée  $s(t)$ .

*Exemples :*

*Espace 1*

*Remarque : les notions abordées dans ce chapitre se généralisent aux systèmes à plusieurs entrées et/ou sorties sans difficulté conceptuelle mais au prix d'une description matricielle.*

#### a) Différents types de régimes

En fonction *du forçage*  $e(t)$  on distingue :

- ▷ **Régime libre** :

*Espace 2*

- ▷ **Régime forcé** :

*Espace 3*

En fonction *de la réponse*  $s(t)$  on distingue :

- ▷ **Régime permanent**, aussi appelé **régime stationnaire** :

*Espace 4*

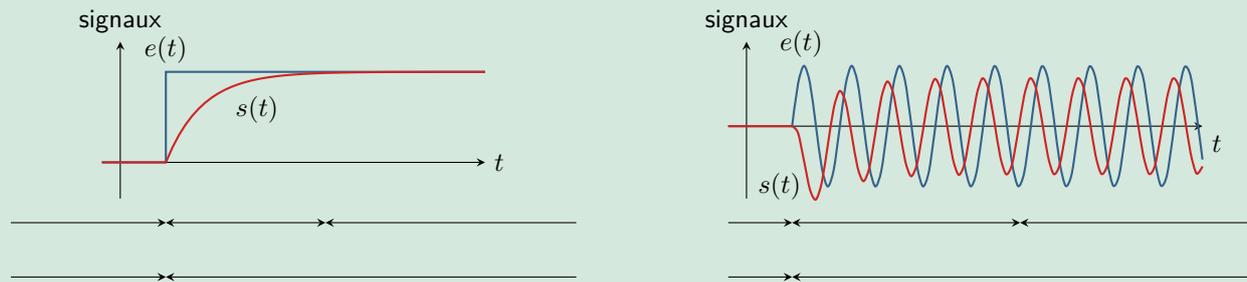
*Remarque : L'abus de langage est fréquent, mais il ne faut pas confondre régime permanent et régime constant. Un régime permanent peut dépendre du temps !*

- ▷ **Régime transitoire** :

*Espace 5*

**Exercice C1 : Identification des régimes**

Légénder les chronogrammes ci-dessous en termes de nature des régimes.



**b) Caractérisation du système**

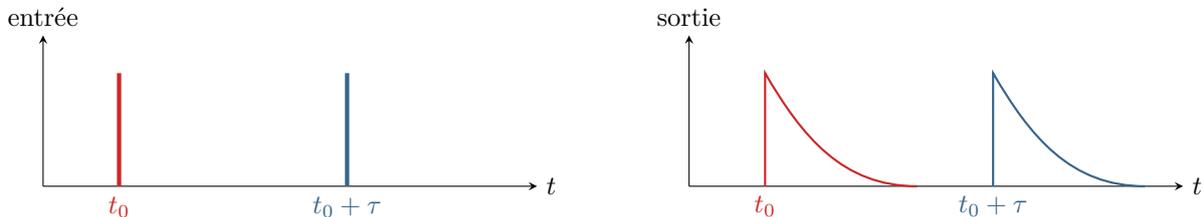


Un système est dit **linéaire** si pour une entrée (un forçage)  $e = e_1 + e_2$  il donne une sortie (une réponse)  $s = s_1 + s_2$  avec  $s_1$  et  $s_2$  les sorties associées aux entrées  $e_1$  et  $e_2$  prises séparément.

*Exemple : C'est le principe des enregistrements de duos ... où les chanteurs enregistrent leur partie séparément avant de superposer leurs voix.*

Un système est dit **continu** lorsqu'il traite des grandeurs analogiques, c'est-à-dire qui varient dans le temps de façon continue en pouvant prendre « n'importe quelle » valeur. Par opposition, on distingue les systèmes **numériques**.

Enfin, un système est dit **invariant temporellement** si ses caractéristiques n'évoluent pas au cours du temps. Traduit mathématiquement, cela signifie que si  $s(t)$  est la réponse à l'entrée  $e(t)$  alors pour tout  $\tau$ ,  $s'(t) = s(t - \tau)$  est la réponse à l'entrée  $e(t - \tau)$ .



*Remarque : Un système réel vieillit, et ne reste donc pas invariant temporellement sur toute sa durée de vie ... ceci dit, cela reste une excellente approximation sur de courtes périodes.*

Les systèmes linéaires, continus, invariant temporellement sont souvent abrégés « SLCI » ou « SLIT » (on oublie le caractère continu), voire parfois « LTI » pour l'anglais *Linear Time Invariant*.

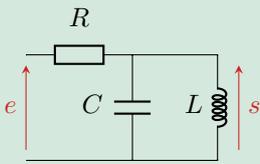
**1.2 - Description temporelle d'un SLCI : équation différentielle**

• **Rappel de méthode**

- Pour établir l'équation différentielle reliant l'entrée et la sortie d'un système électrique :
  - ▷ on utilise en alternance (une étape sur deux) les lois de Kirchoff et les lois de comportement des dipôles ;
  - ▷ à chaque étape, on cherche à remplacer les grandeurs inconnues et sans intérêt par les grandeurs connues et/ou intéressantes ;
  - ▷ il se peut qu'il faille dériver l'équation de travail pour pouvoir y insérer certaines lois de comportement ;
  - ▷ toutes les grandeurs qui apparaissent dans les équations doivent être légendées sur le schéma du circuit.

Pour arriver au résultat espéré en un temps rapide, **on évite absolument** de nommer toutes les tensions et tous les courants possibles puis d'écrire toutes les lois des nœuds et toutes les lois des mailles imaginables !

- **Application**

**Exercice C2 : Exemple d'équation différentielle**


Établir la relation différentielle entre  $s$  et  $e$  dans le circuit ci-contre.

Espace 6

- **Généralisation**



Un système qui vérifie une équation différentielle linéaire à coefficients constants est un SLCI.

En pratique, tous les SLCI que nous rencontrerons vérifieront une équation de ce type ... mais ce n'est pas complètement général.

**Contre-exemple** : l'opérateur dit « de retard pur », défini par  $s(t) = e(t - \tau)$  avec  $\tau > 0$  n'est purement et simplement pas décrit par une équation différentielle.

En revanche, si un SLCI est décrit par une équation différentielle, alors elle est linéaire et à coefficients constants.

### 1.3 - Description fréquentielle d'un SLCI : fonction de transfert harmonique

- **Rappels sur les signaux harmoniques**

Un **signal harmonique**, aussi appelé **signal sinusoïdal** ou **signal monochromatique**, s'écrit

Espace 7

À ce signal est associé sa **représentation complexe**, définie par

Espace 8

Les signaux harmoniques jouent un rôle fondamental dans l'étude des SLCI :



Si le signal d'entrée d'un SLCI est un signal harmonique de pulsation  $\omega$ , alors en régime permanent le signal de sortie est également harmonique de même pulsation  $\omega$ , mais les deux signaux n'ont pas forcément la même amplitude et peuvent être déphasés.

↪ critère expérimental d'identification d'un SLCI.

• **Définition et sens physique de la fonction de transfert**

Calculer une fonction de transfert suppose le régime permanent harmonique.



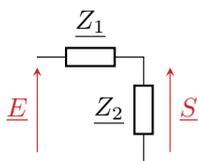
La **fonction de transfert harmonique** d'un SLCI est le rapport des amplitudes complexes des signaux d'entrée et de sortie en fonction de la pulsation,

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}$$

Espace 9

• **Rappel de méthode**

Pour établir la fonction de transfert d'un système électrique :



- ▷ en identifiant des équivalences aux associations série et parallèle, on met le circuit sous la forme ci-contre ;
- ▷ on applique alors un pont diviseur de tension,

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

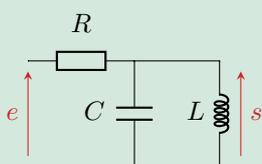
Il est fréquemment demandé de transformer la fonction de transfert pour l'écrire sous forme canonique, auquel cas il est souvent judicieux d'utiliser l'admittance équivalente  $\underline{Y}_2 = 1/\underline{Z}_2$ ,

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \times \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_2} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_2}$$

**Remarque :** Par suite, nous utiliserons également beaucoup la loi des nœuds en termes de potentiel pour établir les fonctions de transfert.

• **Application**

**Exercice C3 : Exemple de fonction de transfert**



Établir la fonction de transfert du circuit ci-contre, et l'écrire sous forme canonique

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

- **Généralisation**



Un système dont la fonction de transfert est le quotient de deux polynômes en  $j\omega$  est un SLCI.

Les mêmes remarques que pour les équations différentielles tiennent toujours, et la fonction de transfert harmonique de l'opérateur de retard pur s'écrit  $e^{-j\omega\tau}$  alors que c'est bien un SLCI.

#### 1.4 - Lien entre les descriptions temporelle et fréquentielle

Comme l'équation différentielle et la fonction de transfert harmonique décrivent le même système, elles ne sont pas indépendantes l'une de l'autre.

Pour donner un formalisme qui s'applique à tous les SLCI, on introduit également la **fonction de transfert opérationnelle** ou transmittance de Laplace  $\mathcal{T}(p)$ , celle que vous utilisez en SI.

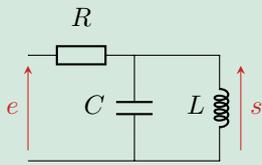


L'équation différentielle, la fonction de transfert harmonique et la fonction de transfert opérationnelle se déduisent les unes des autres par les correspondances

$$\frac{d}{dt} \longleftrightarrow j\omega \longleftrightarrow p.$$

**Remarque :** Ces correspondances sont démontrables, mais la démonstration nécessite des outils mathématiques que nous n'avons pas. La correspondance avec la transmittance de Laplace demande quelques précautions avec les conditions initiales : ici, elles sont (comme souvent en SI) supposées nulles.

### Exercice C4 : De la fonction de transfert à l'équation différentielle



On reprend le circuit ci-contre, où la fonction de transfert a été établie exercice C3 et s'écrit

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega - \frac{jR}{L\omega}}$$

Retrouver l'équation différentielle obtenue exercice C2.

Espace 11

Dans le cas (presque) général, l'équation différentielle et les fonctions de transfert s'écrivent

$$\sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n s}{dt^n} = \sum_{k=0}^K b_k \frac{d^k e}{dt^k} \quad \longleftrightarrow \quad \underline{H}(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^K b_k (j\omega)^k}{\sum_{n=0}^N a_n (j\omega)^n} \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{T}(p) = \frac{\sum_{k=0}^K b_k p^k}{\sum_{n=0}^N a_n p^n}$$

On peut noter que le membre de gauche « sortie » de l'équation différentielle donne le dénominateur de la fonction de transfert, et le membre de droite « entrée » en donne le numérateur.

On peut montrer que la causalité impose d'avoir  $N \geq K$ . Cette valeur est appelée **ordre** du système.

## II - Stabilité

### II.1 - Définition



Un SLCI est dit **stable** si sa réponse à un forçage borné est bornée.

↪ la sortie ne diverge que si l'entrée diverge.

***Remarque :** En pratique, aucun système réel ne peut être infiniment divergent. Un système instable aboutit plutôt sur un état de saturation, où la sortie ne varie plus quoi que fasse l'entrée et où le fonctionnement du système n'est donc plus linéaire.*

La solution d'une équation différentielle de type SLCI du premier ou du second ordre s'écrit comme la somme

- ▷ d'une solution particulière  $s_p(t)$ , de la même forme que le forçage (constant, harmonique, etc.), et qui décrit physiquement le régime permanent ;
- ▷ d'une solution homogène  $s_h(t)$ , dont la forme dépend de l'ordre du système, et qui décrit physiquement le régime transitoire.

↪ si l'entrée est bornée, alors la solution particulière l'est aussi.

↪ l'instabilité est associée à la solution homogène : si le système est stable, alors elle doit rester bornée, et en pratique elle tend presque toujours vers 0 : l'effet du transitoire n'est plus visible si l'on attend suffisamment.



Espace 12

🚫🚫🚫 **Attention !** Ne pas confondre instabilité et résonance.

▷ instabilité :

Espace 13

▷ résonance :

Espace 14

↪ l'instabilité est une notion *temporelle*, la résonance une notion *fréquentielle*.

### II.2 - Cas d'un système du premier ordre

#### • Équation homogène

En toute généralité, elle s'écrit

$$a \frac{ds}{dt} + bs = 0,$$

avec  $a$  et  $b$  quelconques, en particulier du point de vue des signes.

#### • Forme générale des solutions homogènes

Espace 15

La quantité  $\tau = |a/b|$ , homogène à un temps, est appelée **temps caractéristique** ou **temps de réponse** du système. Il renseigne sur la durée du régime transitoire. La pulsation associée  $\omega_c = 1/\tau = |b/a|$  est appelée **pulsation caractéristique** ou **pulsation de coupure** du système.

- Critère de stabilité

Espace 16

- Généralisation



Un SLCI du premier ordre est stable si et seulement si tous les coefficients de l'équation différentielle homogène, ou du dénominateur de la fonction de transfert, sont de même signe.

Si le SLCI est stable, alors l'équation différentielle admet la forme canonique apprise en PTSI :

$$\frac{ds}{dt} + \frac{1}{\tau}s = \text{des choses qui dépendent de } e,$$

où  $\tau$  a la signification discutée plus haut.

## II.3 - Cas d'un système du second ordre

- Équation homogène

En toute généralité, elle s'écrit

$$a \frac{d^2s}{dt^2} + b \frac{ds}{dt} + cs = 0,$$

avec à nouveau trois coefficients quelconques. À cette équation est associé le **polynôme caractéristique**,

$$P(r) = ar^2 + br + c$$

dont le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$  donne la forme de solution homogène.

- Intermède mathématique

Les critères de stabilité vont être simples à exprimer en fonction des racines du polynôme caractéristique, mais pas directement en fonction des coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

↪ pour passer des racines aux coefficients, le plus rapide est de se souvenir qu'un polynôme du second degré peut s'écrire

$$P(X) = a(X^2 - sX + p)$$

avec  $s = -b/a$  la somme des racines et  $p = c/a$  leur produit.

- Discriminant positif

Racines du polynôme caractéristique :

Espace 17

Forme générale des solutions homogènes :

Espace 18

Critère de stabilité en termes des racines :

Espace 19

Traduction en termes des coefficients :

Espace 20

- **Discriminant nul**

Racine (double) du polynôme caractéristique :

Espace 21

Forme générale des solutions homogène :

Espace 22

La quantité  $\tau = 1/|r|$  est appelée **temps caractéristique**, ou **temps de réponse**, du système et renseigne sur la durée du transitoire ; et de même  $\omega_c = |r|$  est la **pulsation caractéristique** du système.

Critère de stabilité en terme de la racine :

Espace 23

Traduction en termes des coefficients :

Espace 24

- **Discriminant négatif**

Racines du polynôme caractéristique :

Espace 25

Forme générale des solutions homogènes :

Espace 26

La quantité  $\omega_p$  est appelée **pseudo-pulsation** du système, et on définit à partir de  $|\mu|$  le temps caractéristique ou de réponse et la pulsation caractéristique ou de coupure.

Critère de stabilité en termes des racines :

Espace 27

Traduction en termes des coefficients :

Espace 28

### • Généralisation



Un SLCI du second ordre est stable si et seulement si tous les coefficients de l'équation différentielle homogène, ou du dénominateur de la fonction de transfert, sont de même signe.

Si le SLCI est stable, alors l'équation différentielle admet la forme canonique apprise en PTSI :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \frac{d^2 s}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \text{des choses qui dépendent de } e,$$

- ▷  $\omega_0$  est la **pulsation propre** du système, elle renseigne à la fois sur la pulsation des oscillations libres et la pulsation de résonance des oscillations forcées du système ;
- ▷  $Q$  est le **facteur de qualité** et  $\xi$  le **facteur d'amortissement** du système, ils renseignent à la fois sur le nombre d'oscillations du système pendant le transitoire et sur l'existence (et la largeur) d'une résonance en régime sinusoïdal forcé.

*Remarque : La similitude des critères de stabilité pour les SLCI d'ordre 1 et 2 donne bien sûr envie de généraliser à tout ordre ... mais il n'en est rien, et le critère sur le signe des coefficients n'est plus valable pour les systèmes d'ordre 3 et plus.*

## III - Signal de sortie d'un SLCI, filtrage

### III.1 - Décomposition de Fourier



Tout signal  $u$  périodique de fréquence  $f$  et de forme quelconque peut se décomposer en une somme de signaux harmoniques de fréquences multiples de  $f$ .

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n) \quad \text{avec} \quad U_n \geq 0 \text{ et } \varphi \in \mathbb{R}$$

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2\pi n f t) \quad \text{avec} \quad A_n \text{ et } B_n \text{ quelconques}$$

Cette écriture est appelée **développement en série de Fourier** ou **décomposition de Fourier** de  $u(t)$ .

L'ensemble des fréquences la décomposition de Fourier de  $u$  définissent son **spectre**.

### • Vocabulaire

- ▷ Terme constant  $U_0$  :

Espace 29

- ▷ Terme  $n = 1$  :

Espace 30

- ▷ Termes  $n > 2$  :

Espace 31.

*Remarque mathématique : On peut généraliser à un signal non périodique, la somme est alors remplacée par une intégrale.*

*Remarque physique : Tout signal réel a de toute façon une durée finie. En le reproduisant par la pensée à l'identique au delà de cette durée, on le transforme mathématiquement en un signal périodique.*

### • Conséquence



Pour étudier la réponse d'un SLCI à un forçage quelconque dépendant du temps, il suffit de connaître la décomposition de Fourier du forçage et la réponse du système à tout forçage harmonique.

La réponse totale s'obtient en additionnant la réponse à chaque composante harmonique du forçage.

↪ c'est le principe de l'**analyse fréquentielle**.

On peut en déduire que le spectre des signaux d'entrée et de sortie d'un SLCI contiennent les mêmes fréquences, ce qui est un critère expérimental d'identification.

### III.2 - Diagramme de Bode

#### • Définition

Le diagramme de Bode d'un SLCI est une (double) représentation graphique de sa fonction de transfert :



Espace 32

La définition du gain est à connaître dans les deux sens :

Espace 33

Plutôt qu'un tracé précis du diagramme de Bode on raisonne souvent sur un **diagramme de Bode asymptotique**, construit à partir des limites basse et haute fréquence.

#### • Rappel de méthode

Pour établir un diagramme de Bode asymptotique et l'allure du diagramme réel :

- ▷ on étudie séparément les limites basse et haute fréquence ;
- ▷ pour chaque limite, on **commence** par calculer la fonction de transfert équivalente en ne conservant que les termes dominants du numérateur et du dénominateur ;
- ▷ **puis ensuite** on en calcule le module et l'argument pour obtenir les équations des asymptotes ;
- ▷ dans le cas d'un deuxième ordre, l'allure du diagramme réel est précisée en calculant explicitement la valeur en  $\omega = \omega_0$ .

🚫🚫🚫 **Attention !** Ne surtout pas inverser l'ordre des étapes sous peine de se heurter à des calculs bien plus compliqués que nécessaire.

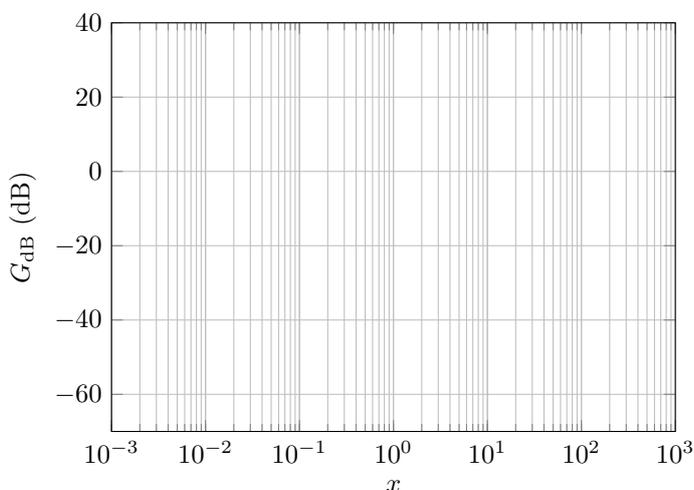
#### • Application

##### Exercice C5 : De la fonction de transfert au diagramme de Bode

On considère la fonction de transfert obtenue exercice C3 et mise sous forme canonique,

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

Tracer le diagramme de Bode en gain pour  $Q = 10$  et  $Q = 0,1$  en fonction de la pulsation réduite  $x = \omega/\omega_0$ .



### III.3 - Reconstruction du signal de sortie d'un SLCI

• **Rappel de méthode**

Pour déterminer le signal de sortie d'un filtre, ou plus généralement d'un SLCI,

▷ On utilise le développement de Fourier du signal d'entrée,

$$e(t) = E_0 + \sum_n E_n \cos(\omega_n t + \varphi_n^{(e)}).$$

▷ En traitant séparément chaque harmonique du signal d'entrée, on détermine avec la fonction de transfert l'amplitude et la phase de chaque harmonique du signal de sortie,

$$S_n = |\underline{H}(\omega_n)| E_n \quad \text{et} \quad \varphi_n^{(s)} = \varphi_n^{(e)} + \arg \underline{H}(\omega_n)$$

▷ Par linéarité, le signal de sortie est la somme (= la superposition) de ces harmoniques que l'on vient de déterminer,

$$s(t) = S_0 + \sum_n S_n \cos(\omega_n t + \varphi_n^{(s)}).$$

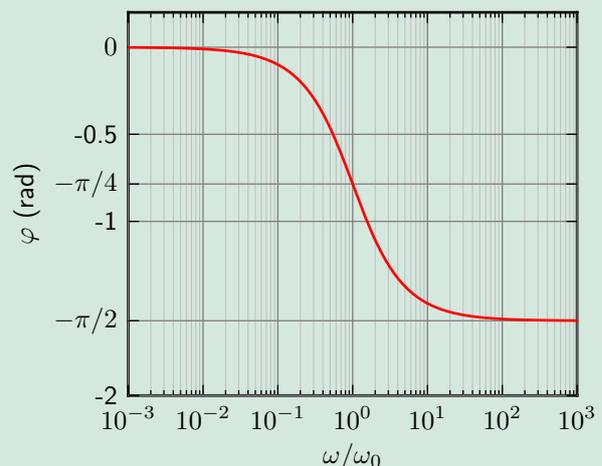
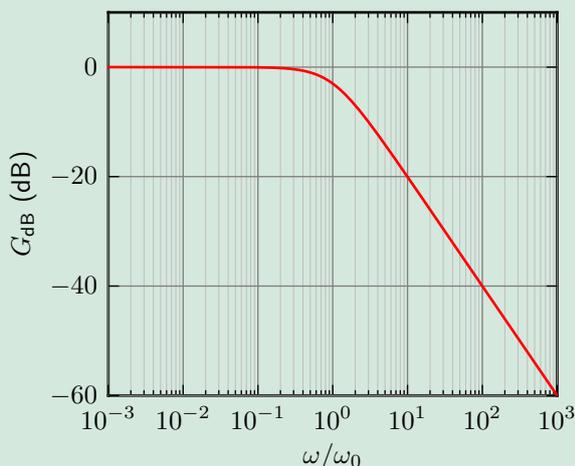
🔴🔴🔴 **Attention !** Il est indispensable de traiter séparément les différentes harmoniques avant de sommer.

Dans d'autres cas, il est plus simple de comparer qualitativement le spectre du signal d'entrée aux fréquences caractéristiques du filtre pour identifier des comportements moyenneur, intégrateur, dérivateur, etc.

• **Application**

**Exercice C6 : Signal de sortie d'un SLCI**

Considérons le filtre dont le diagramme de Bode est donné ci-dessous.



- 1 - Identifier la nature et l'ordre du filtre.
- 2 - On envoie en entrée du filtre le signal  $e(t) = E_1 \cos(\omega_1 t) + E_2 \cos(\omega_2 t) + E_3 \cos(\omega_3 t)$  avec  $\omega_1 = \omega_0/100$ ,  $\omega_2 = \omega_0$  et  $\omega_3 = 100 \omega_0$ . Donner le signal de sortie.
- 3 - On envoie en entrée un signal créneau de pulsation  $\omega_0/1000$ . Prévoir qualitativement l'allure et l'amplitude du signal de sortie.
- 4 - Même question si le signal a une pulsation  $100 \omega_0$ .