BLAISE PASCAL
PT 2020-2021

TD 4 – Électronique *Correction*

Systèmes linéaires

Exercice 1 : Circuit RC à deux mailles

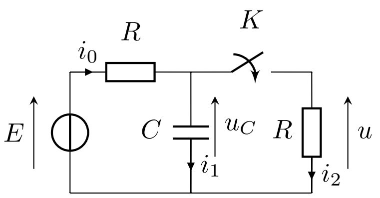
2 | 2

▷ *Équation différentielle du premier ordre.*

> *La solution est nettement plus rédigée que nécessaire, afin de vous guider dans la démarche.*

Trouver l'expression de u passe forcément par l'obtention d'une équation différentielle et sa résolution. La méthode étant très systématique, un exercice plus guidé que celui-là est rare. On note $t = 0$ l'instant de fermeture de l'interrupteur K.

1 Obtention de l'équation différentielle :



Commençons par établir l'équation différentielle vérifiée par u pour $t > 0$, où l'interrupteur est fermé. Comme le circuit compte deux mailles, il faudra utiliser deux lois de Kirchoff, mais l'ordre dans lequel on les utilise importe peu. D'après la loi des mailles et la loi d'Ohm,

$$E = R\,i_0 + u\,.$$

D'après la loi des nœuds,

$$i_0 = i_1 + i_2 = i_0 + \frac{u}{R}$$

Ainsi,

$$E = (R\,i_1 + u) + u\,.$$

En utilisant la loi de comportement du condensateur et le fait qu'à $t > 0$, $u_C = u$ on en déduit l'équation différentielle vérifiée par $u(t > 0)$.

$$\boxed{E = RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 2u \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = \frac{E}{2\tau} \qquad \text{avec } \tau = \frac{RC}{2}\,.}$$

2 Forme générale des solutions :

La forme générale d'une solution de cette équation différentielle est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation avec second membre. Toute solution de l'équation homogène s'écrit sous la forme

$$u_\mathrm{h}(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,,$$

avec A une constante. Pour trouver une solution particulière, on la cherche de même forme que le forçage E qui est constant. On voit sur l'équation différentielle que la fonction constante

$$u_\mathrm{p}(t) = \frac{E}{2}\,.$$

convient, et on peut vérifier par équivalence de circuits que u_p correspond bien au régime permanent asymptotique (dans cette limite, on a un diviseur de tension). Ainsi, toute solution de l'équation différentielle complète s'écrit

$$u(t) = u_\mathrm{h}(t) + u_\mathrm{p}(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{E}{2}\,.$$

où A est une constante. Trouver *la* solution au problème physique qui nous intéresse consiste à trouver A, ce qui se fait par l'intermédiaire d'une condition initiale $u(0^+)$.

3 Détermination d'une condition initiale :

Comme, pour $t > 0$, $u_C = u$ alors à l'instant initial $u(0^+) = u_C(0^+)$. Par conséquent, $u(0^+) = u_C(0^-)$ car la tension aux bornes d'un condensateur est continue. Mais attention : $u(0^+) \neq u(0^-)$ car la tension aux bornes d'un interrupteur ouvert n'est pas nulle ! Déterminons donc $u_C(0^-)$. Remarquons pour cela qu'à $t < 0$, $i_1 = 0$ (condensateur équivalent à un interrupteur ouvert) et $i_2 = 0$ (vrai interrupteur ouvert), et donc d'après la loi des nœuds $i_0 = i_1 + i_2 = 0$. La loi des mailles s'écrit alors à $t = 0^-$

$$E = 0 + u_C(0^-)\,.$$

Finalement, on en déduit la condition initiale cherchée,

$$u(0^+) = E\,.$$

$\boxed{4}$ **Détermination de la constante :**

> *Attention ! Une erreur classique consiste à oublier la solution particulière dans la détermination de A. Rappelons que les conditions initiales impliquent le circuit complet, et se déterminent donc sur la solution complète.*

$$u_C(0^+) \underbrace{=}_{\text{sol}} A + \frac{E}{2} \underbrace{=}_{\text{CI}} E \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{E}{2}\,.$$

$\boxed{5}$ **Conclusion :** On en déduit finalement l'expression cherchée

$$\boxed{u(t) = \frac{E}{2}\left(1 + \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,.}$$

Le chronogramme est représenté figure 1.

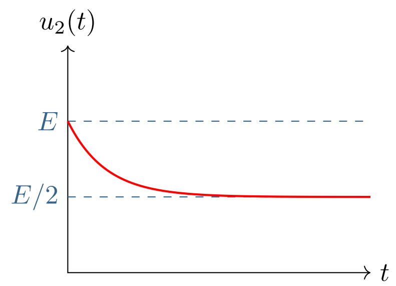


Figure 1 – Chronogramme de la tension $u(t)$.

Exercice 2 : Condensateur alimenté par deux générateurs — oral CCP MP | 2 | 1 |

- ▷ *Équation différentielle du premier ordre ;*
- ▷ *Puissance électrique.*

$\boxed{1}$ Raisonnons avec les notations de la figure 2 pour $t > 0$.

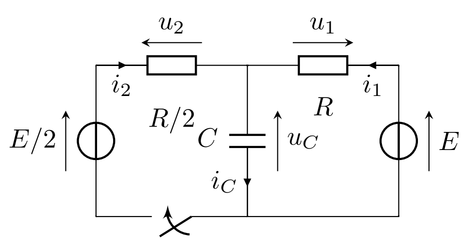


Figure 2 – Condensateur alimenté par deux générateurs.

Loi des nœuds : $i_C = i_1 + i_2$

Lois de comportement : $C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2u_1}{R} + \dfrac{u_2}{R}$

Loi des mailles : $C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 2\,\dfrac{E/2 - u_C}{R} + \dfrac{E - u_C}{R}$

Donc $C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2E}{R} - \dfrac{3}{R}u_C$

Finalement : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{3}{RC}u_C = \dfrac{2E}{RC}\,.}$

2 Pour la résoudre, écrivons l'équation sous forme canonique en posant $\tau = RC/3$,

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C = \frac{2E}{RC}\,.$$

Forme générale des solutions :

▷ Solution particulière : le forçage est constant donc la solution particulière aussi, donc en injectant dans l'équation différentielle

$$0 + \frac{3}{RC}u_\mathrm{p} = \frac{2E}{RC} \qquad \text{d'où} \qquad u_\mathrm{p} = \frac{2}{3}E\,.$$

▷ Solution homogène : $u_\mathrm{h} = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

▷ Conclusion :

$$u_C(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{2}{3}E\,.$$

Condition initiale : À l'instant $t = 0^-$, le régime est permanent continu et le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. D'après la loi des nœuds,

$$i_1(0^-) + i_2(0^-) = i_C(0^-) \qquad \text{soit} \qquad i_1(0^-) + 0 = 0$$

La loi des mailles donne alors

$$u_C(0^-) + Ri_1(0^-) = E \qquad \text{d'où} \qquad u_C(0^-) = E$$

Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, on déduit

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = E\,.$$

Détermination de la constante d'intégration :

$$u_C(0^+) \underbrace{=}_{\text{sol}} A + \frac{2}{3}E \underbrace{=}_{\text{CI}} E \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{E}{3}\,.$$

Conclusion :

$$\boxed{u_C(t) = \frac{E}{3}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{2}{3}E}$$

3 La tension u_C est décroissante. Ainsi, la valeur finale est atteinte à 1 % près à l'instant t_1 tel que

$$u_C(t_1) = \frac{101}{100} \times \frac{2}{3}E\,.$$

Cherchons t_1 :

$$\frac{E}{3}\,\mathrm{e}^{-t_1/\tau} + \frac{2}{3}E = \frac{101}{100} \times \frac{2}{3}E$$

donc $\mathrm{e}^{-t_1/\tau} + 2 = 2 \times \dfrac{101}{100}$

soit $\mathrm{e}^{-t_1/\tau} = 0{,}02$

d'où $\boxed{t_1 = -\tau \ln 0{,}02 = 3{,}9\,\tau\,.}$

> *Le fait de trouver ici environ 4τ n'est pas contradictoire avec le fait qu'il faille un temps 5τ pour réaliser 99 % du transitoire. On s'intéresse ici à la* valeur finale, *mais pas* à l'amplitude de l'échelon *de tension. La condition initiale fait qu'on atteint la valeur finale à 1 % près avant d'avoir réalisé 99 % de l'échelon de tension.*

4 L'énergie dissipée l'est par effet Joule dans les résistances. La puissance dissipée dans la résistance R vaut

$$\mathcal{P}_1 = \frac{u_1^2}{R} = \frac{(E-u_C)^2}{R} = \frac{E^2}{9R}\left(e^{-t/\tau}-1\right)^2 .$$

De même, la puissance dissipée dans la résistance $R/2$ vaut

$$\mathcal{P}_2 = \frac{u_2^2}{R/2} = 2\frac{\left(\dfrac{E}{2}-u_C\right)^2}{R} = 2\frac{E^2}{9R}\left(e^{-t/\tau}-\frac{1}{2}\right)^2 .$$

La puissance totale dissipée vaut donc

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\text{diss}} &= \frac{E^2}{9R}\left(e^{-t/\tau}-1\right)^2 + 2\frac{E^2}{9R}\left(e^{-t/\tau}-\frac{1}{2}\right)^2\\ &= \frac{E^2}{9R}\left[\left(\mathrm{e}^{-2t/\tau}-2\,\mathrm{e}^{-t/\tau}+1\right)+2\left(\mathrm{e}^{-2t/\tau}-\mathrm{e}^{-t/\tau}+\frac{1}{4}\right)\right]\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{diss}} = \frac{E^2}{9R}\left[3\,\mathrm{e}^{-2t/\tau}-4\,\mathrm{e}^{-t/\tau}+\frac{3}{2}\right] .}$$

Lorsque $t\to\infty$, la puissance dissipée tend vers

$$\mathcal{P}_\infty = \frac{E^2}{9R}\times\frac{3}{2} = \frac{E^2}{6R} .$$

Cette valeur correspond à la puissance dissipée par une résistance $3R/2$ alimentée par une tension $E/2$. Cette valeur est logique : en régime continu, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, si bien que les autres dipôles apparaissent montés en série. Les deux générateurs s'associent alors en un seul de fém $E/2$ (attention au sens) et les deux résistances sont équivalentes à $3R/2$.

Exercice 3 : Circuit RL à deux mailles — oral Mines-Télécom PSI | 3 | 2

- *Équation différentielle du premier ordre ;*
- *Recherche de condition initiale.*

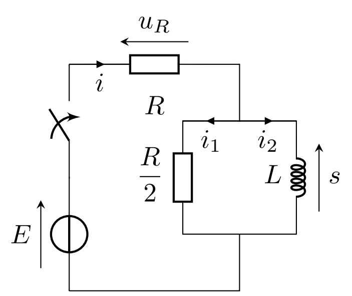


Figure 3 – Notations pour l'étude du circuit RL à deux mailles.

- **Équation différentielle vérifiée par s**

▷ *Première méthode : approche temporelle*

Avec les notations de la figure 3,

Loi des nœuds : $$i = i_1 + i_2$$

Dérivation : $$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

Lois de comportement : $$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L}$$

Loi des mailles : $$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E-s) = \frac{2}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L}$$

$$-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L}$$

$$\frac{3}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L} = 0$$

Finalement : $$\boxed{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{3L}s = 0}$$

ce que l'on peut mettre sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}s = 0 \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{3L}{R}\,.$$

> ***Rappel de méthode :*** *Comme on veut utiliser la loi de comportement de la bobine, mais qu'elle implique une dérivée, alors on dérive l'équation de travail au préalable.*

▷ *Deuxième méthode : approche fréquentielle*

L'association de la bobine et de la résistance $R/2$ a pour admittance équivalente

$$\underline{Y_{\text{éq}}} = \frac{2}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}L\omega}\,.$$

On identifie alors un pont diviseur de tension entre cette admittance équivalente et la résistance R,

$$\frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z_{\text{éq}}}}{\underline{Z_{\text{éq}}} + R} = \frac{1}{1 + R\underline{Y_{\text{éq}}}}$$

d'où on déduit

$$\left(1 + R\underline{Y_{\text{éq}}}\right)\underline{S} = \underline{E} \qquad \text{soit} \qquad 3\underline{S} + \frac{R}{\mathrm{j}L\omega}\underline{S} = \underline{E}\,.$$

Pour pouvoir identifier à une équation différentielle, il faut écrire cette relation sous forme d'un polynôme en $\mathrm{j}\omega$,

$$3\mathrm{j}\omega\,\underline{S} + \frac{R}{L}\underline{S} = \mathrm{j}\omega\underline{E} \qquad \text{d'où} \qquad 3\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}s = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\,.$$

Comme $e = E = \text{cte}$ la dérivée est toujours nulle et on en déduit la forme canonique

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{3L}s = 0\,.}$$

> ***Moralité :*** *L'approche fréquentielle suivie de l'identification est souvent plus simple, mais il faut bien se rappeler simplifier e lorsqu'elle est constante.*

- **Forme générale des solutions**

L'équation est homogène, il n'y a donc pas de solution particulière (ou autrement dit cette solution est nulle). Seule reste la solution homogène, donc

$$s(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,,$$

avec A une constante.

- **Détermination de la condition initiale**

▷ *Étude à l'instant $t = 0^-$:* la seule grandeur continue est i_2 (courant dans une bobine), il n'y a donc qu'elle qu'on détermine. Comme le régime est permanent continu et que la branche contenant le seul générateur du circuit est ouverte, on a directement

$$i_2(0^-) = 0\,.$$

▷ *Étude à l'instant $t = 0^+$:*

Loi des nœuds :	$i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$
Continuité de i_2 :	$i(0^+) = i_1(0^+)$
Lois de comportement :	$\dfrac{u_R(0^+)}{R} = \dfrac{2s(0^+)}{R}$
Loi des mailles :	$\dfrac{E - s(0^+)}{R} = \dfrac{2s(0^+)}{R}$
Donc :	$E = 3s(0^+)$
Finalement :	$\boxed{s(0^+) = \dfrac{E}{3}}\,.$

> **Rappel de méthode :** *Il est* **absolument inutile** *de déterminer à $t = 0^-$ une grandeur qui n'est pas continue, et ce même si c'est la grandeur d'intérêt. Comme elle n'est pas continue, sa valeur à 0^- ne nous renseigne* **pas du tout** *sur sa valeur à 0^+. Ainsi, les seules grandeurs à déterminer à 0^- sont les grandeurs continues : tension aux bornes d'un condensateur et courant dans une bobine.*
> *Rappelons également il n'y a pas de méthode fréquentielle pour déterminer une condition initiale !*

- **Détermination de la constante A**

$$s(0^+) \underbrace{=}_{\text{CI}} \frac{E}{3} \underbrace{=}_{\text{sol}} A \qquad \text{donc} \qquad A = \frac{E}{3}\,.$$

- **Conclusion**

$$\boxed{s(t) = \frac{E}{3}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}\,.$$

La courbe est représentée figure 4.

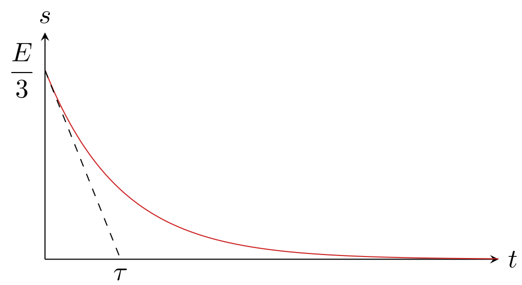
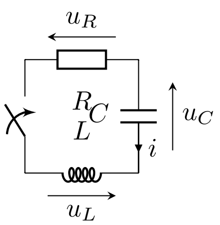


Figure 4 – Courbe représentant la tension s en fonction du temps.

Exercice 4 : RLC série en régime libre

oral CCINP PSI | 1 | 2 |

▷ *Équation différentielle du second ordre ;*
▷ *Montage expérimental.*



Les notations des courants et tensions ne sont pas explicitées sur le schéma par l'énoncé, auquel cas il est sous-entendu que toutes les tensions sont orientées de façon cohérente avec u_C et que les dipôles sont orientés en convention récepteur.

1 L'intensité i est continue car elle traverse une bobine. Ainsi,

$$\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0}$$

car le circuit est ouvert à $t < 0$. De même, la tension u_C est nécessairement continue car aux bornes du condensateur donc

$$\boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0}$$

Enfin, la tension aux bornes de la bobine se déduit de la loi des mailles à l'instant $t = 0^+$ et de la loi d'Ohm,

$$u_R(0^+) + u_C(0^+) + u_L(0^+) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u_L(0^+) = -u_C(0^+) = -U_0\,.}$$

En régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert donc

$$\boxed{i_\infty = 0\,.}$$

La bobine est équivalente à un fil, si bien que

$$\boxed{u_{L,\infty} = 0}$$

et d'après la loi des mailles on en déduit

$$u_{R,\infty} + u_{C,\infty} + u_{L,\infty} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u_{C,\infty} = 0\,.}$$

2 D'après le comportement à $t = 0$, on en déduit que **la grandeur y correspond à l'intensité i**. Un oscilloscope ne peut pas mesurer directement une intensité, il faut donc mesurer une tension qui lui est proportionnelle, c'est-à-dire la tension aux bornes de la résistance. Obtenir la courbe représentant y en fonction de t demande donc **de brancher l'oscilloscope en parallèle de la résistance**.

> *Ici, il n'y a aucun appareil branché sur le secteur type GBF, donc pas de conflit de masse à craindre.*

3 D'après la loi des mailles,

$$u_R + u_C + u_L = 0 \qquad \text{soit} \qquad Ri + u_C + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

en utilisant les lois de comportement. Pour pouvoir relier u_C à i, il est nécessaire dériver,

$$R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = 0\,.$$

Écrivons maintenant cette équation sous forme canonique pour faire apparaître les paramètres cherchés,

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i = 0\,.$$

On identifie alors $1/LC = {\omega_0}^2$ et $R/L = 2m\omega_0$ d'où

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + 2m\omega_0\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 i = 0\,.}$$

4 **Forme générale des solutions :** L'équation différentielle est homogène, il n'y a donc pas de solution particulière à déterminer (une autre formulation possible est de dire qu'elle est nulle). Pour déterminer la forme générale de la solution homogène, trouvons les racines du polynôme caractéristique,

$$r^2 + 2m\omega_0\, r + {\omega_0}^2 = 0\,.$$

Son discriminant vaut

$$4m^2{\omega_0}^2 - 4{\omega_0}^2 = 4{\omega_0}^2(m^2 - 1) < 0$$

car $m < 1$. Ainsi, les racines sont complexes conjuguées et valent

$$r_\pm = -\frac{2m\omega_0}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{4{\omega_0}^2(1-m^2)}}{2} = -m\omega_0 \pm \mathrm{i}\omega_0\sqrt{1-m^2} = -m\omega_0 \pm \mathrm{i}\Omega\,.$$

Comme le discriminant de l'équation caractéristique est négatif alors le régime est pseudo-périodique et les solutions s'écrivent toutes sous la forme

$$i(t) = [A\cos\Omega t + B\sin\Omega t]\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}$$

Conditions initiales : Déterminons maintenant les conditions initiales nécessaires pour trouver les constantes A et B. D'après la question 1,

$$i(0^+) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{1}{L} u_L(0^+) = -\frac{U_0}{L}\,.$$

Constantes d'intégration : Ainsi, la condition initiale sur i donne

$$i(0^+) \underbrace{=}_{\text{sol}} A \underbrace{=}_{\text{CI}} 0\,.$$

En considérant directement $A = 0$ pour calculer la dérivée,

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = B\Omega\cos(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t} - m\omega_0 B\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) \underbrace{=}_{\text{sol}} B\Omega \underbrace{=}_{\text{CI}} -\frac{U_0}{L} \qquad \text{d'où} \qquad B = -\frac{U_0}{L\Omega}\,.$$

Conclusion :

$$\boxed{i(t) = -\frac{U_0}{L\Omega}\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}\,.}$$

L'intensité est pseudo-périodique, et **Ω est sa pseudo-période.** On peut l'évaluer à partir de la pseudo-période T' lisible sur la courbe. Par exemple, $T' = t_2 - t_1$ d'où

$$\boxed{\Omega = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}\,.}$$

$\boxed{5}$ Trouver la position des maxima n'est pas simple du tout à cause de l'amortissement exponentiel, qui complique beaucoup la recherche des zéros de la dérivée. Cependant, compte tenu de la courbe donnée, on peut faire l'approximation que la position des maxima est directement donnée par ceux du sinus car l'amortissement est faible. Ainsi, le k-ième maximum est atteint lorsque

$$\Omega t_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{soit} \qquad t = \frac{3}{4}T' + (k-1)T'$$

avec k un entier. y_1 et y_2 correspondent aux deux premiers maxima, aux instants $t_1 = 3T'/4$ et $t_2 = 7T'/4$. Ainsi,

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\mathrm{e}^{-7m\omega_0 T'/4}}{\mathrm{e}^{-3m\omega_0 T'/4}} = \mathrm{e}^{-m\omega_0 T'}$$

Pour aboutir à une relation encore plus simple (je ne sais pas ce qu'attendait l'examinateur, qui l'aurait précisé au candidat au cour de l'oral) , on peut supposer $m \ll 1$, auquel cas $\Omega \sim \omega_0$ et donc $T' \simeq 2\pi/\omega_0$. Dans ce cas,

$$\boxed{\frac{y_2}{y_1} \simeq \mathrm{e}^{-2\pi m}\,.}$$

Exercice 5 : Obtention d'une équation différentielle 2 | 2

▷ *Représentation complexe.*

Raisonnons à partir de la figure 5.

D'après la loi des nœuds,

$$\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2}$$

et en utilisant les admittances,

$$\frac{1}{R}\underline{U_R} = 2\mathrm{j}C\omega\underline{U'} + \mathrm{j}C\omega\underline{U}\,.$$

Pour limiter les fractions on multiplie directement par R,

$$\underline{U_R} = 2\mathrm{j}\omega\tau\underline{U'} + \mathrm{j}\omega\tau\underline{U}$$

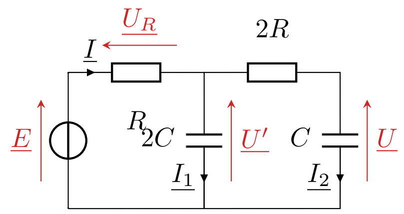


Figure 5 – Schéma des notations.

D'après la loi des mailles dans la maille de droite,

$$\underline{U'} = \underline{U} + 2R\underline{I_2} = \underline{U} + 2\mathrm{j}RC\omega\underline{U}$$

et dans la maille de gauche

$$\underline{U_R} = \underline{E} - \underline{U'} = \underline{E} - \underline{U} - 2\mathrm{j}RC\omega\underline{U}\,.$$

En regroupant et en identifiant $RC = \tau$,

$$\underline{E} - \underline{U} - 2\mathrm{j}\omega\tau\underline{U} = 2\mathrm{j}\omega\tau(\underline{U} + 2\mathrm{j}\omega\tau\underline{U}) + \mathrm{j}\omega\tau\underline{U}$$

soit

$$\underline{E} = \underline{U} + 5\mathrm{j}\omega\tau\underline{U} + 4\tau^2(\mathrm{j}\omega)^2\underline{U}$$

En identifiant les puissances de $\mathrm{j}\omega$ à l'ordre des dérivées pour retourner dans le domaine des représentations réelles, on aboutit à

$$\boxed{e = u + 5\tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 4\tau^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}}$$

ce qui est bien le résultat escompté.

Exercice 6 : Filtre RL

1 | 1 |

▷ *Fonction de transfert ;*
▷ *Diagramme de Bode ;*
▷ *Signal de sortie d'un filtre.*

1 Analyse asymptotique par équivalence :
▷ à très basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil, donc $\underline{S} = 0$;
▷ à très haute fréquence, la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert, donc le courant dans le filtre est nul et on déduit de la loi des mailles $s = e$.
Conclusion : le filtre est a priori **un filtre passe-haut.**

2 Utilisons un pont diviseur de tension en représentation complexe,

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{R + \mathrm{j}L\omega} = \frac{\mathrm{j}\frac{L}{R}\omega}{1 + \mathrm{j}\frac{L}{R}\omega} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\underline{H} = H_0\frac{\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} H_0 = 1 \\ \omega_\mathrm{c} = R/L \end{cases}}$$

3 Simplifions la fonction de transfert dans la limite très basse fréquence $\omega \ll \omega_\mathrm{c}$,

$$\underline{H} \sim \frac{j\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}}{1} \sim j\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}} \qquad \text{donc} \qquad |\underline{H}| = \frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}$$

Ainsi,

$$G_\mathrm{dB}(\omega) = 20\log|\underline{H}| = 20\log x$$

Comme l'axe des abscisses d'un diagramme de Bode est une échelle logarithmique (en d'autres termes l'abscisse est $\log x$), on en déduit directement que **la pente de l'asymptote à basse fréquence est de pente +20 dB/décade** et **qu'elle passe par le point $G_\mathrm{dB} = 0$ en $x = 1$.**

De même dans la limite très haute fréquence $\omega \gg \omega_\mathrm{c}$,

$$\underline{H} \sim \frac{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}}{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}} = 1\,. \qquad \text{d'où} \qquad G_\mathrm{dB}(\omega) = 20\log 1 = 0\,.$$

L'asymptote haute fréquence est donc **une asymptote horizontale**.

L'allure du diagramme de Bode est représentée figure 6.

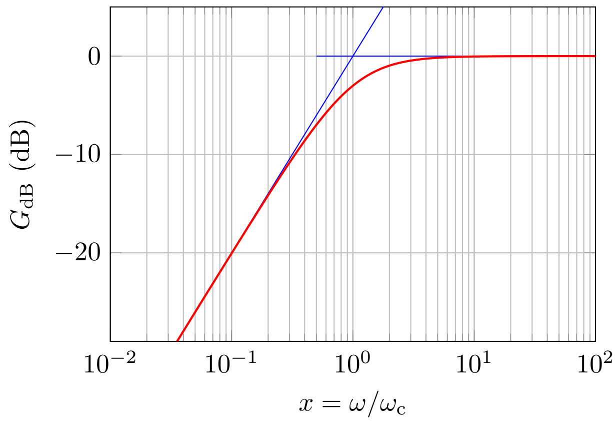


Figure 6 – Diagramme de Bode du filtre RL.

4 Comme les trois harmoniques sont de même amplitude et en phase

$$\boxed{e(t) = E_0 \left[\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) + \cos(2\pi f_3 t)\right]}\,.$$

D'après les valeurs numériques données, la pulsation de coupure du filtre vaut

$$\omega_\mathrm{c} = \frac{R}{L} = 1{,}0 \cdot 10^5\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}} \qquad \text{soit} \qquad f_\mathrm{c} = \frac{\omega_\mathrm{c}}{2\pi} = 16\,\mathrm{kHz}\,.$$

> ***Rappel de cours :*** *Pour un signal d'entrée*
>
> $$e(t) = \sum_n E_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$
>
> *le signal de sortie du filtre s'écrit*
>
> $$s(t) = \sum_n |\underline{H}(\omega_n)|\, E_n \cos\left(\omega_n t + \varphi_n + \arg \underline{H}(\omega_n)\right)$$
>
> *où* $|\underline{H}(\omega_n)| = 10^{G_{\mathrm{dB}}(\omega_n)/20}$ *et* $\arg \underline{H}(\omega_n) = \varphi(\omega_n)$.

Comme $x_1 = f_1/f_\mathrm{c} = 6\cdot 10^{-3}$, la composante associée est très atténuée : le gain n'est même pas représenté sur le diagramme donné. On peut donc négliger sa contribution au signal de sortie. De même, la contribution de fréquence f_2 (soit $x_2 = 6\cdot 10^{-2}$) est atténuée d'environ 22 dB, ce qui correspond à un facteur multiplicatif 1/12. Elle est de plus déphasée d'environ 1,5 rad. Enfin la contribution de fréquence f_3 (soit $x_3 = 6{,}25$) est associée à un gain à peu près nul, signe qu'elle n'est pas atténuée, mais on peut estimer son déphasage à 0,2 rad. Ainsi,

$$\boxed{s(t) = \frac{E_0}{12}\cos\left(2\pi f_2 t + 1{,}5\right) + E_0 \cos(2\pi f_3 t + 0{,}2)\,.}$$

5 La fréquence du signal est bien plus faible que la fréquence de coupure du filtre, qui est dans son domaine asymptotique, décrit par une pente de 20 dB/décade dans le diagramme de Bode. En repassant en représentation temporelle, cela indique que le circuit se comporte en dérivateur,

$$s(t) \propto \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\,.$$

La pente d'un signal triangle étant constante, alternativement positive et négative, le signal dérivé présente des plateaux alternativement positifs et négatifs, ce qui est bien un signal créneau de même fréquence que le signal triangle.

Exercice 7 : Filtre passe-haut d'ordre 2 1 | 1 |

▷ *Fonction de transfert ;*
▷ *Diagramme de Bode.*

1 Analysons qualitativement les régimes asymptotiques.
▷ à très basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil donc $\underline{S} = 0$;
▷ à très haute fréquence la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert, ce qui empêche tout courant de parcourir le circuit. Comme par le condensateur est équivalent à un fil, on déduit de la loi des mailles $\underline{S} = \underline{E}$.
Conclusion : il s'agit bien d'un **filtre passe-haut**.

2 D'après la relation du pont diviseur de tension,

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \mathrm{j}L\omega} = \frac{\mathrm{j}\dfrac{L}{R}\omega}{1 + \dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega} + \mathrm{j}\dfrac{L}{R}\omega}$$

Pour faire apparaître la forme souhaitée, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $1 = \omega_0/\omega_0$, ce qui permet d'écrire

$$\underline{H} = \frac{\mathrm{j}\dfrac{L\omega_0}{R}x}{1 + \dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega_0 x} + \mathrm{j}\dfrac{L\omega_0}{R}x}$$

Comme pour ce circuit RLC série $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ et $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, on en identifie

$$\frac{L\omega_0}{R} = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = Q \qquad \text{et} \qquad RC\omega_0 = \frac{RC}{\sqrt{LC}} = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Q}\,.$$

ce qui permet enfin de faire apparaître la forme souhaitée,

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\mathrm{j}Qx}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \frac{1}{x}\right)}}$$

3 Simplifions la fonction de transfert dans les deux limites asymptotiques. À très basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$ ou $x \ll 1$),

$$\underline{H} \sim \frac{\mathrm{j}Qx}{-\mathrm{j}Q/x} \sim -x^2 \qquad \text{donc} \qquad G_{\mathrm{dB}} \sim 20\log x^2 = 40\log x$$

La pente de l'asymptote très basse fréquence est donc de +40 dB/décade. De même, dans la limite très haute fréquence $x \gg 1$,

$$\underline{H} \sim \frac{\mathrm{j}Qx}{\mathrm{j}Qx} \sim 1 \qquad \text{donc} \qquad G_{\mathrm{dB}} \sim 0$$

L'asymptote très haute fréquence est donc horizontale. Le diagramme de Bode asymptotique et le diagramme de Bode réel (tracé pour $Q = 1/2 < 1/\sqrt{2}$) sont représentés figure 7.

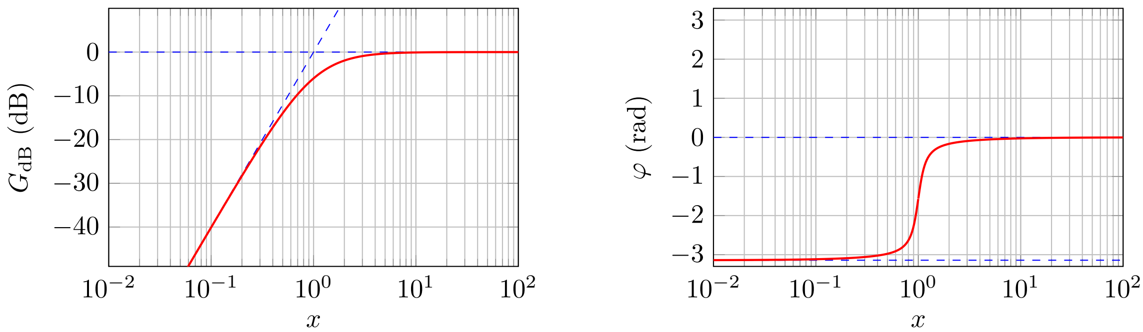


Figure 7 – Diagramme de Bode du filtre RLC passe-haut d'ordre 2. Tracé pour $Q = 1/2$, diagramme de Bode en phase ajouté pour information.

4 Le comportement intégrateur ou dérivateur d'un filtre se traduit en termes de diagramme de Bode par une asymptote de pente ±20 dB/décade, ce qui n'est pas le cas ici : **il n'existe aucun domaine de fréquence dans lequel ce filtre a un comportement d'intégrateur ou de dérivateur**.

Exercice 8 : Filtre RLC

oral banque PT | 3 | 1

▷ *Fonction de transfert ;*
▷ *Diagramme de Bode ;*
▷ *Signal de sortie d'un filtre.*

1 Dans la limite très basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil et C à un interrupteur ouvert, donc l'intensité dans la branche est nulle, et ainsi $v_s = 0 + 0$. Dans la limite très haute fréquence, C est équivalent à un fil donc on a directement $v_s = v_e$.

⇝ le filtre est un passe-haut.

2 Diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z_{RL}}}{\underline{Z_{RL}} + \underline{Z_C}} = \frac{R + \mathrm{j}L\omega}{R + \mathrm{j}L\omega + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}}\,.$$

Pour passer à la forme canonique, on multiplie en haut et en bas par $\mathrm{j}C\omega$,

$$\underline{H} = \frac{\mathrm{j}RC\omega - LC\omega^2}{1 + \mathrm{j}RC\omega - LC\omega^2}\,.$$

> *On identifie l'opération à faire en comparant la forme canonique à l'expression que l'on a : le dénominateur n'est pas fractionnaire.*
>
> *Pour avancer, on peut proposer à l'examinateur d'identifier directement ω_0 et Q car il s'agit d'un RLC série, donc d'un circuit de référence. S'il refuse, il faut alors faire le calcul ...*

Par identification du dénominateur avec la forme canonique, on en déduit

$$-LC\omega^2 = -x^2 = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,.}$$

et

$$\mathrm{j}RC\omega = \frac{\mathrm{j}x}{Q} = \frac{\mathrm{j}\omega}{Q\omega_0} \qquad \text{soit} \qquad Q = \frac{1}{RC\omega_0} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,.}$$

3 En très basse fréquence,

$$\underline{H} \sim \frac{\dfrac{\mathrm{j}x}{Q}}{1} = \frac{\mathrm{j}x}{Q} \qquad \text{d'où} \qquad G_{\mathrm{dB}} \sim 20\log x - 20\log Q\,,$$

la pente est donc de +20 dB/décade.

En très haute fréquence,

$$\underline{H} \sim \frac{-x^2}{-x^2} = 1 \qquad \text{d'où} \qquad G_{\mathrm{dB}} = 0$$

ce qui est conforme avec **une asymptote horizontale.**

Avec l'ordonnée à l'origine de l'asymptote TBF ($x = 10^0 = 1$), $G_{\mathrm{dB}} = -20\log Q = -20\,\mathrm{dB}$, on déduit $\log Q = 1$ soit $Q = 10$. On peut aussi utiliser le fait que $G_{\mathrm{TBF}} = 0$ lorsque $x = Q$, ou encore exprimer la valeur exacte de $|\underline{H}(x{=}1)|$ en fonction de Q.

> *Bien que le filtre soit d'ordre 2, il n'a pas d'asymptote de pente ±40 dB/décade : cela n'a rien de contradictoire, et vient ici du fait qu'on mesure la sortie aux bornes d'une association de dipôles.*

4 La question n'est pas simple : changer R modifie la valeur de Q, mais cela a un impact énorme sur le diagramme de Bode, d'une part via l'intermédiaire de l'ordonnée à l'origine de l'asymptote basse fréquence et d'autre part car elle contraint l'existence ou non d'une résonance. Une illustration est donnée sur la figure 8.

Le signal carré est la dérivée du signal triangulaire. Le facteur de qualité du filtre est donc tel que tout le spectre du signal soit dans le domaine très basse fréquence du filtre : comme la pente de l'asymptote est de +20 dB/décade, il se comporte en dérivateur.

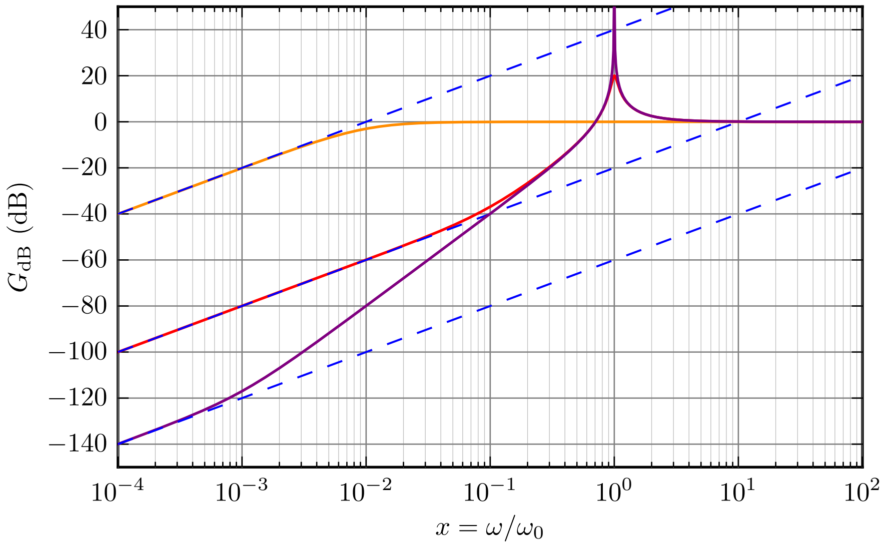


Figure 8 – Diagrammes de Bode asymptotique d'un filtre RLC. Les trois diagrammes sont tracés pour la même fonction de transfert, la même pulsation propre, seule la valeur du facteur de qualité est modifiée : elle vaut 0,01 pour la courbe orange, 10 pour la courbe rouge (cas de l'énoncé) et 1000 pour la courbe violette. Version couleur sur le site de la classe.

Si l'on observe des impulsions, cela signifie que les variations brusques du signal, associées aux hautes fréquences, sont sensiblement mieux transmises que les variations lentes, associées aux basses fréquences et qui décrivent son allure globale. Le facteur de qualité est donc tel que les basses fréquence du spectre soient coupées et les hautes fréquences transmises.

Par exemple, si la fréquence fondamentale du signal est telle que $x = 1 \cdot 10^{-3}$, alors la première situation pourrait correspondre à la courbe rouge de la figure 8, et la deuxième à la courbe orange.

Exercice 9 : Modélisation d'un récepteur radio — oral banque PT | 💡 1 | ✂ 1

▷ *Fonction de transfert ;*
▷ *Caractéristiques d'un filtre, gabarit.*

$\boxed{1}$ Le récepteur doit réaliser un **filtrage passe-bande**. La tension de sortie doit donc être mesurée **aux bornes de la résistance**, voir figure 9. En effet,

▷ dans la limite très basse fréquence, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert donc $\underline{I} = 0$ donc d'après la loi d'Ohm $\underline{S} = 0$;
▷ dans la limite très haute fréquence, c'est cette fois la bobine qui est équivalente à un interrupteur ouvert donc on a de même $\underline{S} = 0$.

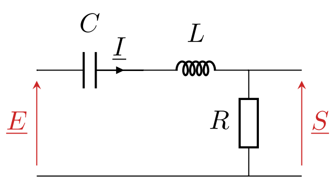


Figure 9 – Modèle de récepteur radio.

$\boxed{2}$ Le condensateur et la bobine montés en série sont équivalents à une impédance

$$\underline{Z_{LC}} = \mathrm{j}L\omega + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}\,.$$

En identifiant un pont diviseur de tension,

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{R}{R + \underline{Z_{LC}}} = \frac{1}{1 + \dfrac{\underline{Z_{LC}}}{R}}$$

soit en remplaçant

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + \dfrac{\mathrm{j}L\omega}{R} + \dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega}}\,.}$$

3 Un critère possible serait que la fréquence centrale f_0 du passe-bande doit être incluse dans la bande de fréquence que l'on cherche à capter. En utilisant les résultats connus sur le RLC série,

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\,,$$

et ainsi

$$f_0 > f_1 = 150\,\mathrm{kHz} \qquad \text{donc} \qquad 2\pi\sqrt{LC} < \frac{1}{f_1} \qquad \text{d'où} \qquad C < \frac{1}{4\pi^2 {f_1}^2 L} = 9{,}8\cdot 10^{-10}\,\mathrm{F}$$

et de même

$$f_0 < f_2 = 300\,\mathrm{kHz} \qquad \text{donc} \qquad 2\pi\sqrt{LC} > \frac{1}{f_2} \qquad \text{d'où} \qquad C > \frac{1}{4\pi^2 {f_2}^2 L} = 2{,}4\cdot 10^{-10}\,\mathrm{F}\,.$$

Ainsi,

$$\boxed{0{,}24\,\mathrm{nF} < C < 0{,}98\,\mathrm{nF}\,.}$$

Exercice 10 : Étude d'un filtre — oral CCINP MP | 3 | 2

▷ *Comportement asymptotique d'un filtre ;*
▷ *Signal de sortie d'un filtre.*

1 • **Limite très basse fréquence :** les deux condensateurs équivalent à des interrupteurs ouverts, seules demeurent les résistances, d'où par un pont diviseur de tension

$$\underline{H} \underset{\mathrm{TBF}}{\sim} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{1 + \dfrac{R_1}{R_2}}\,,$$

et ainsi

$$G_{\mathrm{dB}} = 20\log|\underline{H}| = -20\log 1 + \frac{R_1}{R_2}\,.$$

Comme le gain basse fréquence vaut $-20\,\mathrm{dB}$, on en déduit

$$1 + \frac{R_1}{R_2} = 10 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{R_2 = \frac{R_1}{9} = 10\,\mathrm{k\Omega}\,.}$$

• **Limite très haute fréquence :** l'admittance de chaque bloc RC parallèle s'écrit

$$\underline{Y}_{RC} = \mathrm{j}C\omega + \frac{1}{R} \simeq \mathrm{j}C\omega\,.$$

Les deux blocs se comportent donc chacun comme le condensateur, la résistance joue un rôle négligeable.

> *Utiliser « comme toujours » l'équivalence entre un condensateur et un fil pose ici problème, car cela donnerait $u_s = 0$, en contradiction avec le diagramme de Bode. En réalité, cette approximation $\underline{Z}_C \simeq 0$ signifie que l'impédance du condensateur est très faible devant l'autre impédance du pont diviseur ... mais comme ici cette deuxième impédance est aussi un condensateur, aucune des deux n'est négligeable.*

Par un pont diviseur de tension,

$$\underline{H} \underset{\mathrm{THF}}{\sim} \frac{1/\mathrm{j}C_2\omega}{1/\mathrm{j}C_1\omega + 1/\mathrm{j}C_2\omega} = \frac{1}{1 + \dfrac{C_2}{C_1}}\,,$$

et de même

$$G_{\mathrm{dB}} = -20\log\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right)\,.$$

Comme le gain haute fréquence vaut $-80\,\mathrm{dB}$, on en déduit

$$1+\frac{C_2}{C_1}=10^4 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{C_2 \simeq 10^4 \times C_1 = 100\,\mathrm{\mu F}\,.}$$

2 Entre 100 Hz et 100 kHz, le gain du filtre diminue de 60 dB en trois décades, ce qui donne une pente de $-20\,\mathrm{dB}$/décade caractéristique d'un **comportement intégrateur**.

3 Le signal d'entrée est ainsi la somme de deux signaux harmoniques de fréquences $2f$ et $4f$ ($f = 1\,\mathrm{kHz}$), soit en volts,

$$u_\mathrm{e}(t) = 6\cos(4\pi f t) + 4\cos(8\pi f t)\,.$$

> *Il s'agit donc d'un signal sans fondamental.*

Pour ces fréquences le filtre se comporte en intégrateur. Sa fonction de transfert asymptotique prend donc la forme

$$\underline{H} = \frac{H_0}{\mathrm{j}f/f_0}$$

On constate graphiquement que si $f = f_0$ ($\log(f/f_0) = 0$) alors $G_\mathrm{dB} = 0$ donc $H_0 = 1$. Ainsi,

$$\underline{s} = f_0\frac{\underline{e}}{\mathrm{j}f} = 2\pi f_0 \frac{\underline{e}}{\mathrm{j}\omega} \qquad \text{d'où} \qquad s(t) = 2\pi f_0 \int e(t')\,\mathrm{d}t'\,.$$

On obtient donc, en volts

$$u_\mathrm{s}(t) = 6 \times \frac{2\pi f_0}{4\pi f}\sin(4\pi f t) + 4 \times \frac{2\pi f_0}{8\pi f}\sin(8\pi f t)$$

et comme $f_0/f = 1 \cdot 10^{-2}$ il vient finalement

$$\boxed{u_\mathrm{s}(t) = 3\cdot 10^{-2}\sin(4\pi f t) + 1 \cdot 10^{-2}\sin(8\pi f t)\,.}$$

4 En se référant au seul diagramme asymptotique (ce qui est discutable car les déphasages sont non négligeables), on a pour la première harmonique

$$G_\mathrm{dB}(f_1) = -20\,\mathrm{dB} \qquad \text{soit} \qquad |\underline{H}(f_1)| = 10^{-20/20} = \frac{1}{10}$$

et pour la deuxième

$$|\underline{H}(f_2)| = 10^{-80/20} = \frac{1}{10\,000}\,.$$

La seconde harmonique contribue de manière négligeable au signal de sortie, d'où

$$\boxed{u_\mathrm{s}(t) = 1\cos(2\pi f_1 t) \qquad \text{(en volts).}}$$

Exercice 11 : Signal de sortie d'un filtre — adapté oral banque PT | 3 | 2

- *Analyse de Fourier ;*
- *Diagramme de Bode ;*
- *Signal de sortie d'un filtre.*

Attention ! Les deux voies de l'oscilloscope ne sont pas représentées à la même échelle !

1 Le signal créneau a une **amplitude de 2,5 V**, une **période de 1 ms** soit une **fréquence de 1 kHz** et une **valeur moyenne nulle**.

2 On constate sur le chronogramme que le signal créneau est impair, $v_\mathrm{e}(-t) = -v_\mathrm{e}(t)$, soit en termes de développement de Fourier

$$-\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(2\pi k f t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(2\pi k f t) = -\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(2\pi k f t) - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(2\pi k f t)$$

soit à tout instant

$$2\sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(2\pi k f t) = 0$$

ce qui ne peut être vérifié que si

$$\boxed{\forall k, \quad B_k = 0\,.}$$

> *En termes mathématiques, on utilise le fait que les fonctions sinusoïdales constituent une famille libre. Physiquement, un signal est constamment nul si et seulement si toutes les harmoniques de ce signal sont d'amplitude nulles.*

3 Le diagramme de Bode du filtre est celui d'un filtre passe-bande dont la fréquence centrale est $f_0 = 3\,\mathrm{kHz}$.

4 Si on modélise le signal de sortie par une unique sinusoïde, on lit graphiquement que celle-ci aurait une période égale à un tiers de la période du créneau, soit une **fréquence $3f = 3\,\mathrm{kHz}$**, et une amplitude que l'on peut estimer **égale à 1 V**, en tenant compte de l'échelle différente. Cette sinusoïde correspond à l'harmonique de rang $k = 3$ du signal d'entrée.

5 Les deux harmoniques « candidates » sont celles dont la fréquence est la plus proche de la fréquence centrale du filtre, car ce seront les moins atténuées par le filtre : les deux harmoniques envisageables sont donc le fondamental $k = 1$ et l'harmonique de rang $k = 5$.

6 On constate graphiquement que la « sinusoïde » envisagée précédemment a une amplitude qui varie à la même fréquence que le créneau. La deuxième harmonique à considérer serait donc le fondamental $k = 1$ du créneau. Retrouvons ce résultat à partir du diagramme de Bode.

- pour le fondamental $k = 1$: $f = 1\,\mathrm{kHz}$ donc $G_{\mathrm{dB}} = -22\,\mathrm{dB}$, si bien que dans le signal de sortie l'harmonique a une amplitude
$$A_{1,\mathrm{s}} = |\underline{H}(1\,\mathrm{kHz})|\, A_{1,\mathrm{e}} = 10^{-22/20}\frac{4A}{\pi}\,.$$
- pour l'harmonique $k = 5$: $f = 5\,\mathrm{kHz}$, donc $G_{\mathrm{dB}} = -15\,\mathrm{dB}$, si bien que dans le signal de sortie l'harmonique a une amplitude
$$A_{5,\mathrm{s}} = |\underline{H}(1\,\mathrm{kHz})|\, A_{5,\mathrm{e}} = 10^{-15/20}\frac{4A}{5\pi}\,.$$

Finalement, le rapport des amplitudes de ces deux harmoniques vaut
$$\frac{A_{1,\mathrm{s}}}{A_{5,\mathrm{s}}} = \frac{10^{-22/20}}{10^{-15/20}} \times 5 = 2{,}2\,,$$
ce qui confirme que le fondamental joue un rôle plus important dans le signal de sortie que l'harmonique $k = 5$.

7 L'amplitude de toutes les harmoniques de rang $k \geq 7$ est inférieure à celle de rang 5 dans le signal d'entrée, et on constate sur le diagramme de Bode qu'elles sont encore plus atténuées par le filtre que l'harmonique de rang 5. Comme l'harmonique de rang 5 est déjà négligée, celles de rang $k \geq 7$ le sont forcément aussi.

8 On calcule d'abord les valeurs des amplitudes ... puis on trace !

Harmonique k	Fréquence f_k (kHz)	Amplitude en entrée $4A/k\pi$ (V)	Amplitude en sortie $10^{G_{\mathrm{dB}}(f_k)/20} \times 4A/k\pi$ (V)
1	1	3,2	0,24
3	3	1,1	2,2
5	5	0,64	0,12
7	7	0,45	0,05

> *On remarque que le caractère négligeable des harmoniques 5 et 7 s'avère finalement assez discutable !*