



BLAISE PASCAL
PT 2020-2021

ALI et rétroaction

Exercice 1 : Montage dérivateur



- ▷ Montage simple à ALI;
- ▷ Régime linéaire.

Il n'y a qu'une rétroaction négative, donc l'ALI fonctionne probablement en régime linéaire. La présence du condensateur incite à travailler en complexes. Les deux tensions intéressantes s et e sont aux extrémités des branches, on utilise donc la loi des nœuds en termes de potentiel à l'entrée \ominus de l'ALI :

$$\frac{E - V_-}{1/jC\omega} + \frac{S - V_-}{R} = 0.$$

Comme le fonctionnement est linéaire, alors $V_- = V_+ = 0$ donc

$$jC\omega E + \frac{S}{R} = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{S = -jRC\omega E},$$

ce qui donne dans le domaine temporel

$$\boxed{s = -RC \frac{de}{dt}}.$$

Exercice 2 : Montage sommateur



- ▷ Montage simple à ALI;
- ▷ Régime linéaire.

La seule rétroaction est négative, on peut donc supposer que l'ALI fonctionne en régime linéaire.

D'après la loi des nœuds en termes de potentiel, en notant i_1 et i_2 les courants dans les branches d'entrée soumises à v_1 et v_2 ,

$$i_1 + i_2 = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{v_1 - v_+}{R} + \frac{v_2 - v_+}{R} = 0 \quad \text{d'où} \quad v_+ = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

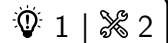
Notons v_- le potentiel de l'entrée inverseuse, égal à la tension aux bornes de la résistance représentée verticalement. Les deux résistances de la branche du bas sont parcourues par le même courant, donc

$$\frac{v_-}{v_s} = \frac{R}{R + R} \quad \text{soit} \quad v_s = 2v_-.$$

Enfin, comme l'ALI fonctionne de régime linéaire alors $v_+ = v_-$ d'où

$$\boxed{v_s = v_1 + v_2}.$$

Le point important de l'exercice est le choix de la méthode pour exprimer les potentiels. Sur la branche du haut, l'entrée intéressante \oplus est à une extrémité de la branche d'où le choix de la loi des nœuds, alors que sur la branche du bas l'entrée intéressante \ominus est au centre de la branche, d'où l'intérêt du pont diviseur.

Exercice 3 : Intégrateur différentiel

- ▷ Montage simple à ALI;
- ▷ Régime linéaire.

La seule rétroaction est négative, on peut donc supposer le régime linéaire. En notation complexe, la loi des nœuds à l'entrée \ominus donne

$$\frac{E_1 - V_-}{R} + \frac{S - V_-}{1/jC\omega} = 0$$

Un pont diviseur de tension dans la branche du bas donne

$$\frac{V_+}{E_2} = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Or en fonctionnement linéaire on a

$$\underline{V_-} = \underline{V_+} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{E_2}.$$

En fusionnant les deux équations,

$$\frac{E_1}{R} - \frac{1}{R(1 + jRC\omega)} \underline{E_2} + jC\omega \underline{S} - \frac{jC\omega}{1 + jRC\omega} \underline{E_2} = 0$$

soit

$$\frac{E_1}{jRC\omega} - \frac{1}{jRC\omega(1 + jRC\omega)} \underline{E_2} + \underline{S} - \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{E_2} = 0$$

et ainsi

$$\underline{S} = -\frac{E_1}{jRC\omega} + \frac{E_2}{jRC\omega} \left(\frac{1}{1 + jRC\omega} + \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \right)$$

ce qui donne au final

$$\underline{S} = \frac{1}{jRC\omega} (\underline{E_2} - \underline{E_1}).$$

On utilise la correspondance habituelle pour passer dans le domaine temporel,

$$s(t) = s(0) + \frac{1}{RC} \int_0^t (e_2 - e_1) dt.$$

Exercice 4 : Filtre actif amplificateur

- ▷ Montage simple à ALI;
- ▷ Régime linéaire et de saturation;
- ▷ Filtrage.

Le montage ne compte qu'une seule rétroaction négative, on fait donc l'hypothèse que l'ALI fonctionne en régime linéaire.

1 • **Dans la limite des basses fréquences** : Le condensateur équivaut à un interrupteur ouvert, et aucun courant ne peut traverser les résistances. Comme s est la tension aux bornes de R' on en déduit $s = 0$ c'est-à-dire que les basses fréquences sont **coupées**.

• **Dans la limite des hautes fréquences** : Le condensateur équivaut à un fil, le montage s'apparente alors à un amplificateur inverseur. On en déduit que les hautes fréquences sont **transmises**, et potentiellement amplifiées.

• **Conclusion** : le filtre est un passe-haut.

2 L'association R, C a pour impédance équivalente

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega}.$$

D'après la loi des nœuds en potentiel appliquée à l'entrée \ominus de l'ALI avec $v_- = v_+ = 0$,

$$\frac{e - 0}{Z} + \frac{s - 0}{R'} = 0$$

On en déduit

$$\underline{H} = \frac{s}{e} = -\frac{R'}{Z} = -\frac{R'}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{-R'/R}{1 + \frac{1}{jRC\omega}}$$

On peut ainsi identifier à la forme canonique donnée,

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - j\frac{\omega_c}{\omega}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H_0 = -R'/R \\ \omega_c = 1/RC \end{cases}$$

3 La capacité doit valoir

$$C = \frac{1}{R\omega_c} = 1 \cdot 10^{-7} \text{ F.}$$

En haute fréquence, $\underline{H} \sim \underline{H}_0$. Ainsi, si le gain est de 20 dB alors

$$|\underline{H}_0| = \frac{R'}{R} = 10^{20/20} = 10 \quad \text{d'où} \quad R' = 10 \text{ k}\Omega.$$

4 Dans la limite des hautes fréquences, d'après la question précédente,

$$G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}_0| = 40 \text{ dB.}$$

Dans la limite des basses fréquences,

$$\underline{H} \sim \frac{H_0}{-j\frac{\omega_c}{\omega}} = \frac{j\omega H_0}{\omega_c} \quad \text{soit} \quad G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}| = 20 \log \omega + 20 \log \frac{|\underline{H}_0|}{\omega_c}.$$

Comme toujours avec les filtres du premier ordre, les deux asymptotes se coupent en $\omega = \omega_c$. On en déduit le diagramme est représenté figure 1.

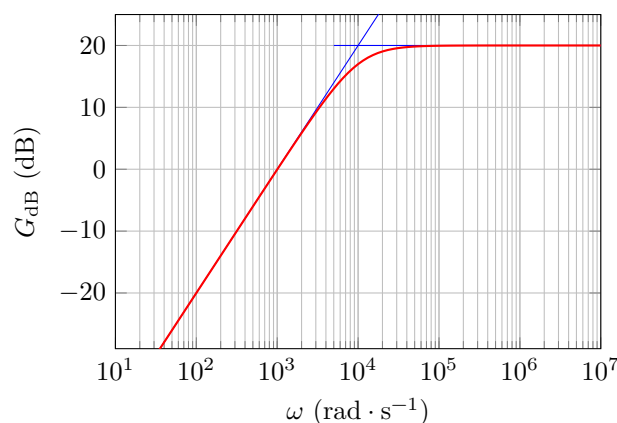


Figure 1 – Diagramme de Bode.

5 Le plus simple est de raisonner sur le diagramme de Bode, seul le dernier cas n'est pas évident.

- ▷ $E_0 = 1 \text{ V}$ et $\omega = 1 \cdot 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$: on calcule (ou on constate sur le diagramme) que $G_{\text{dB}} = -20 \text{ dB}$ donc $|\underline{H}| = 10^{-20/20} = 1/10$, le signal de sortie est donc sinusoïdal d'amplitude $E_0/10 = 0,1 \text{ V}$ et le spectre identique à celui de l'entrée, à l'amplitude près.
- ▷ $E_0 = 3 \text{ V}$ et $\omega = 1 \cdot 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$: de même, le signal de sortie est sinusoïdal d'amplitude $0,3 \text{ V}$.
- ▷ $E_0 = 1 \text{ V}$ et $\omega = 1 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$: à cette pulsation, $G_{\text{dB}} = 20 \text{ dB}$ donc $|\underline{H}| = 10^{20/20} = 10$, le signal de sortie est donc sinusoïdal d'amplitude $10E_0 = 10 \text{ V}$.

▷ $E_0 = 3\text{ V}$ et $\omega = 1 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$: en reprenant le raisonnement précédent, le signal de sortie devrait avoir une amplitude de 30 V ... ce qui est impossible, car la tension de sortie doit rester inférieure à la tension de saturation de l'ALI. Le signal de sortie est donc un sinus écrêté, qui conserve la valeur de $\pm 15\text{ V}$ dès que l'ALI est en saturation. Cela se traduit par un enrichissement spectral : outre le fondamental à $1 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, des harmoniques apparaissent dans le spectre à $2 \cdot 10^5, 3 \cdot 10^5, 4 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ etc. mais prévoir leur amplitude n'est pas simple.

Exercice 5 : Comparateur à hystérésis inverseur décalé



- ▷ Montage simple à ALI;
- ▷ Comparateur à hystérésis.

Les notations sont celles de la figure 2.

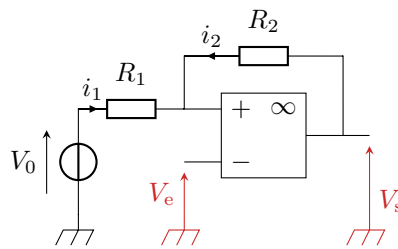


Figure 2 – Notations pour l'étude du comparateur à hystérésis inverseur décalé.

1 On applique la loi des nœuds en termes de potentiel à l'entrée \oplus ,

$$i_1 + i_2 = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{V_0 - V_+}{R_1} + \frac{V_s - V_+}{R_2} = 0$$

d'où on déduit

$$\frac{V_0}{R_1} + \frac{V_s}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V_+$$

soit en multipliant l'équation par $R_1 R_2$

$$(R_2 + R_1)V_+ = R_2 V_0 + R_1 V_s$$

et enfin

$$V_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s + \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_0 \quad \text{soit} \quad \boxed{V_+ = \beta V_s + (1 - \beta) V_0}$$

2 La seule rétroaction est positive, l'ALI fonctionne donc nécessairement en régime de saturation.

• **Bascule haut** → **bas** : supposons l'ALI en saturation haute, $V_s = +V_{\text{sat}}$. Il demeure dans cet état tant que $\varepsilon = V_+ - V_- > 0$. Comme $V_- = V_e$, cela donne $V_e < V_+$ soit

$$\boxed{V_e < \beta V_{\text{sat}} + (1 - \beta) V_0 = 9\text{ V}}$$

• **Bascule bas** → **haut** : supposons maintenant l'ALI en saturation basse, $V_s = -V_{\text{sat}}$. Il y reste tant que $V_e > V_+$, soit

$$\boxed{V_e > -\beta V_{\text{sat}} + (1 - \beta) V_0 = -1\text{ V}}$$

3 Voir figure 3. Les tensions de basculement dépendent de l'état du système, il s'agit donc bien d'un comparateur à hystérésis. Il est qualifié d'« inverseur » car une entrée négative le place en saturation positive et réciproquement, et de « décalé » car son cycle n'est pas symétrique par rapport à $V_e = 0$ mais par rapport à $V_e = (1 - \beta) V_0 = 4\text{ V}$.

4 Initialement la tension d'entrée est supérieure aux deux tensions de bascule donc la saturation est forcément négative. On repère ensuite les instants où la tension d'entrée devient inférieure à la tension de basculement basse en décroissant ou supérieure à la tension de basculement haute en croissant, et on en déduit le chronogramme de la tension de sortie figure 4.

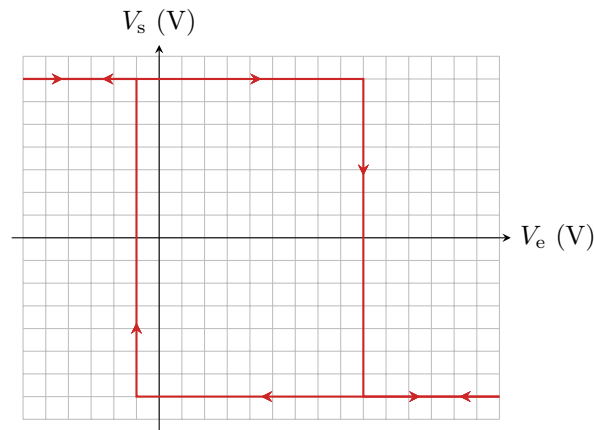


Figure 3 – Cycle du comparateur à hystérésis inverseur décalé.

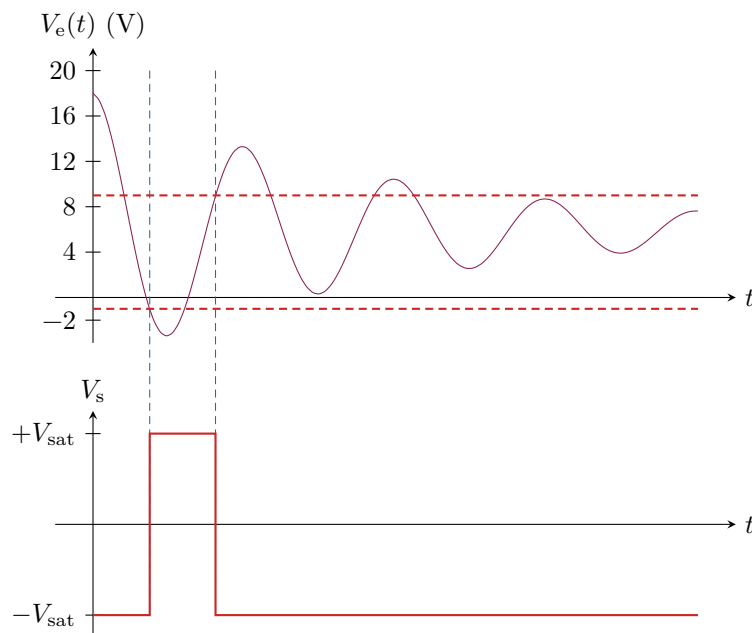
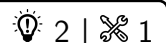


Figure 4 – Construction de la tension de sortie connaissant la tension d'entrée.

Exercice 6 : Capacité réglable



- Montage à plusieurs blocs ;
- Impédance d'entrée ;
- Régime linéaire.

On veut montrer que le montage équivaut à un condensateur : ce n'est donc pas une fonction de transfert qui nous intéresse ici, mais l'impédance d'entrée du montage. Concrètement, on cherche donc à établir une relation entre i et u qui soit celle d'un condensateur, soit

$$u = \frac{1}{jC\omega} i.$$

On note v_1 et v_2 les tensions de sortie des deux ALI, qui fonctionnent tous les deux en régime linéaire. Le premier ALI est un suiveur donc $v_1 = u$. La LNP à l'entrée \ominus de l'ALI \otimes , combinée avec l'hypothèse de fonctionnement linéaire, donne

$$\frac{v_1 - 0}{\alpha R} + \frac{v_2 - 0}{(1 - \alpha R)} = 0 \quad \text{d'où} \quad v_2 = \frac{\alpha - 1}{\alpha} u.$$

Enfin, comme l'ALI $\textcircled{1}$ est idéal, alors les courants de polarisation sont nuls. Le courant i est donc également celui qui traverse le condensateur. En convention récepteur, on a donc

$$i = jC_0\omega(u - v_2)$$


En remplaçant l'expression de v_2 ,

$$i = j \frac{C_0}{\alpha} \omega u \quad \text{d'où} \quad \boxed{C = \frac{C_0}{\alpha}}.$$

L'intérêt du montage est qu'il est très simple de faire varier α (il suffit de faire tourner le curseur d'un potentiomètre) pour adapter la capacité à la volonté, ce qui est infiniment (et même plus !) plus simple que de changer le condensateur du montage.

Exercice 7 : Résistance négative



-  ▷ Montage simple à ALI;
▷ Impédance d'entrée;
▷ Régime linéaire et de saturation.

1 L'ALI compte une rétroaction sur chaque borne, il est donc **impossible** d'anticiper son régime de fonctionnement. D'après la loi des nœuds appliquée à l'entrée \ominus , on a

$$i + \frac{v_s - v^-}{R} = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{v^- = v_s + Ri}.$$

Par un pont diviseur sur la branche contenant les deux résistances R_1 et R_2 , on trouve

$$\boxed{v^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s}.$$

2 En régime linéaire, $v^+ = v^- = u$, donc

$$u = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s \quad \text{soit} \quad v_s = \frac{R_1 + R_2}{R_1} u.$$

En réinjectant dans l'expression de v^- , il vient

$$u \left(1 - \frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) = Ri \quad \text{soit} \quad -\frac{R_2}{R_1} u = Ri \quad \text{d'où} \quad \boxed{u = -R \frac{R_1}{R_2} i}.$$

L'intensité i et la tension u sont orientées en convention récepteur. La « loi de comportement » du montage est donc formellement identique à la loi d'Ohm, mais pour une résistance négative :

$$u = R_N i \quad \text{avec} \quad \boxed{R_N = -R \frac{R_1}{R_2}}.$$

3 Si l'ALI est en régime linéaire, il y reste sans atteindre la saturation haute tant que

$$v_s < V_{\text{sat}} \quad \text{soit} \quad \frac{R_1 + R_2}{R_1} u < V_{\text{sat}} \quad \text{et} \quad u < \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}.$$

En reprenant la relation entre u et i établie en régime linéaire, on en déduit que l'ALI reste en régime linéaire tant que

$$-R \frac{R_1}{R_2} i < \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} \quad \text{soit} \quad \boxed{i > -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{V_{\text{sat}}}{R} = -I_{\text{basc}}}.$$

Pour savoir si le montage a un comportement d'hystérésis, il faut calculer l'intensité de basculement du régime de saturation haute vers le régime linéaire. Si l'ALI est en saturation haute, il y reste tant que

$$v^+ > v^- \quad \text{soit} \quad \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} > V_{\text{sat}} + Ri \quad \text{soit} \quad i < -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{V_{\text{sat}}}{R} = -I_{\text{basc}}.$$

Le basculement entre régime linéaire et saturation haute a lieu pour le même courant $-I_{\text{basc}}$ quel que soit le sens de bascule, il n'y a donc **pas d'hystérésis**.

La relation $u = R_N i$ a été établie en supposant le fonctionnement de l'ALI linéaire, elle ne peut donc PAS être utilisée en régime de saturation. En revanche, les expressions de v^+ et v^- établies question 1 l'ont été sans aucune hypothèse sur le régime de fonctionnement de l'ALI, elles peuvent donc être utilisées aussi bien en régime linéaire qu'en régime de saturation ... à condition bien sûr de remplacer v_s par $\pm V_{\text{sat}}$ dans le cas d'un fonctionnement saturé.

4 De même, l'ALI reste en régime linéaire sans atteindre la saturation basse tant que

$$v_s > -V_{\text{sat}} \quad \text{soit} \quad \frac{R_1 + R_2}{R_1} u > -V_{\text{sat}} \quad \text{et} \quad u > -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} .$$

En reprenant la relation de résistance négative, on en déduit que l'ALI reste en régime linéaire tant que

$$-R \frac{R_1}{R_2} i > -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} \quad \text{soit} \quad i < \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{V_{\text{sat}}}{R} = I_{\text{basc}} .$$

Réciproquement, si l'ALI est en saturation basse, il reste dans ce régime de saturation tant que

$$v^+ < v^- \quad \text{donc} \quad -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} < -V_{\text{sat}} + Ri \quad \text{soit} \quad i > \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{V_{\text{sat}}}{R} = I_{\text{basc}} .$$

De nouveau, on trouve que le montage ne présente pas d'hystérésis.

5 Voir figure 5. La tension d'entrée de l'ALI au moment du basculement vaut

$$U_{\text{basc}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} .$$

D'après la question 1 avec $v^- = u$ et $v_s = V_{\text{sat}}$, en saturation haute, la caractéristique est une droite d'équation

$$u = Ri + V_{\text{sat}} .$$

De même, dans le domaine correspondant à la saturation basse,

$$u = Ri - V_{\text{sat}} .$$

On trouve dans les deux cas des droites de même pente R et d'ordonnée à l'origine $\pm V_{\text{sat}}$. Enfin, dans le domaine de fonctionnement linéaire, la caractéristique est une droite d'équation

$$u = -R \frac{R_1}{R_2} i$$

dont la pente est indépendante des deux autres.

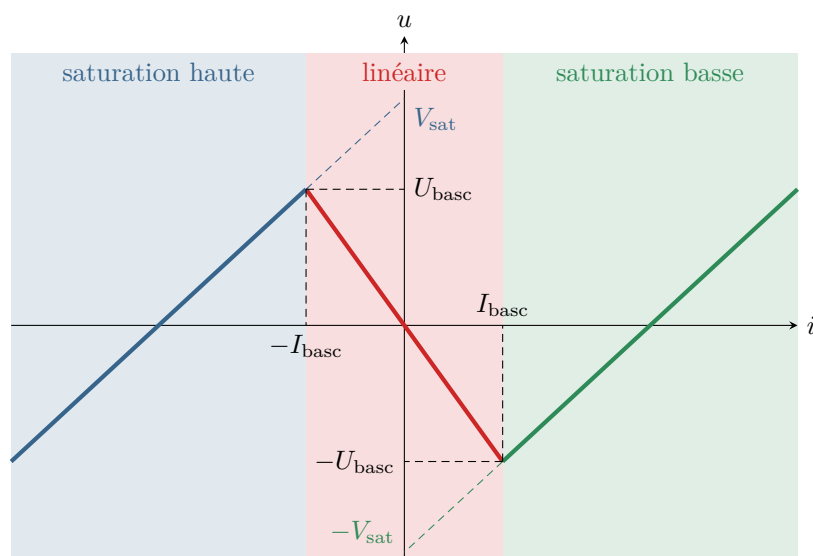



Figure 5 – Caractéristique du montage à résistance négative.

Exercice 8 : Filtre en peigne de fréquence

oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 2

- 
 ▷ Montage à plusieurs blocs ;
 ▷ Régime linéaire ;
 ▷ Filtrage.

1] Considérons en entrée de la ligne le signal

$$\underline{U}_S = U_0 e^{j\omega t}.$$

En sortie,

$$\underline{U}_B = \underline{H}_L \underline{U}_S = U_0 e^{-j\omega\tau} e^{j\omega t} \quad \text{soit} \quad \boxed{\underline{U}_B = U_0 e^{j\omega(t-\tau)}}.$$

Ainsi, le signal de sortie est égal au signal d'entrée décalé d'une durée τ : le phénomène physique mis en jeu est donc la propagation du signal dans la ligne à retard, qui nécessite une durée τ .

2] Raisonnons sur l'ALI dessiné à droite du schéma. Par un pont diviseur de tension,

$$\frac{V_+}{U_B} = \frac{R_0}{R_0 + R_0} \quad \text{soit} \quad \underline{V_+} = \frac{1}{2} \underline{U}_B.$$

De même,

$$\frac{V_-}{U_D} = \frac{R}{R + \beta R} \quad \text{soit} \quad \underline{V_-} = \frac{1}{1 + \beta} \underline{U}_D.$$

L'ALI fonctionne en régime linéaire, donc $\underline{V_+} = \underline{V_-}$ soit

$$\frac{1}{2} \underline{U}_B = \frac{1}{1 + \beta} \underline{U}_D \quad \text{d'où} \quad \boxed{\underline{H}_B = \frac{1 + \beta}{2} = \alpha}.$$

3] Raisonnons maintenant sur l'ALI représenté à gauche du schéma. D'après la loi des nœuds en termes de potentiel,

$$\frac{U_E - V_+}{R} + \frac{U_D - V_+}{R} = 0 \quad \text{d'où} \quad \underline{V_+} = \frac{U_E + U_D}{2}$$

Par un pont diviseur de tension,

$$\underline{V_-} = \frac{U_S}{2}.$$

L'ALI fonctionnant en régime linéaire,

$$\frac{U_E + U_D}{2} = \frac{U_S}{2} \quad \text{soit} \quad \underline{U}_S = \underline{U}_E + \underline{U}_D.$$

Or d'après les questions précédentes,

$$\underline{U}_D = \alpha \underline{U}_B = \alpha e^{-j\omega\tau} \underline{U}_S$$

si bien que l'équation devient

$$(1 - \alpha e^{-j\omega\tau}) \underline{U}_S = \underline{U}_E$$

et finalement

$$\boxed{\underline{H} = \frac{U_S}{U_E} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega\tau}}}.$$

4] D'après ce qui précède,

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - \alpha \cos(\omega\tau) - j\alpha \sin(\omega\tau)}$$

ce qui donne

$$|\underline{H}(j\omega)|^2 = \frac{1}{(1 - \alpha \cos(\omega\tau))^2 + (\alpha \sin(\omega\tau))^2} = \frac{1}{1 - 2\alpha \cos(\omega\tau) + \alpha^2 \cos^2(\omega\tau) + \alpha^2 \sin^2(\omega\tau)}$$

ce qui se simplifie en

$$|\underline{H}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\omega\tau)}.$$

Le maximum est atteint lorsque $\cos(\omega\tau) = +1$, soit

$$H_{\max}^2 = \frac{1}{1 + \alpha^2 - 2\alpha} = \frac{1}{(1 - \alpha)^2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{H_{\max} = \frac{1}{1 - \alpha}}.$$

Le minimum est atteint lorsque $\cos(\omega\tau) = -1$, soit

$$H_{\min}^2 = \frac{1}{1 + \alpha^2 + 2\alpha} = \frac{1}{(1 + \alpha)^2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{H_{\min} = \frac{1}{1 + \alpha}}.$$

Le cosinus étant 2π -périodique, la période Ω du peigne de fréquence est telle que

$$(\omega + \Omega)\tau = \omega\tau + 2\pi \quad \text{soit} \quad \Omega\tau = 2\pi \quad \text{donc} \quad \boxed{\Omega = \frac{2\pi}{\tau}}.$$

Pour le calcul de la bande passante, commençons par calculer la plus petite pulsation ω_c pour laquelle $|H| = H_{\max}/\sqrt{2}$, telle que

$$\frac{1}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\omega_c\tau)} = \frac{1}{2(1 - \alpha)^2}$$

On en déduit

$$1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\omega_c\tau) = 2 - 4\alpha + 2\alpha^2 \quad \text{soit} \quad -2\alpha \cos(\omega_c\tau) = 1 - 4\alpha + \alpha^2 \quad \text{d'où} \quad \cos(\omega_c\tau) = \frac{4\alpha - 1 - \alpha^2}{2\alpha}$$

et ainsi

$$\omega_c = \frac{1}{\tau} \arccos \frac{4\alpha - 1 - \alpha^2}{2\alpha}.$$

On en déduit la bande passante, $\Delta\omega = 2\omega_c$, donnée par

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{2}{\tau} \arccos \frac{4\alpha - 1 - \alpha^2}{2\alpha}}.$$

5 En première approximation, ce filtre laisse passer toutes les harmoniques de fréquence multiples $\Omega/2\pi$ et coupe les autres. Hors le signal d'intérêt est périodique de période T , donc de fréquence $1/T$, si bien que toutes ses composantes de Fourier ont des fréquences multiples de $1/T$. Pour que le filtre transmette ces composantes en éliminant le bruit donc les fréquences sont différentes, il faut avoir

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \quad \text{soit} \quad \frac{2\pi/\tau}{2\pi} = \frac{1}{T} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\tau = T}.$$

Exercice 9 : Démodulateur à déphasage

oral banque PT |  3 |  2



- ▷ Montage à plusieurs blocs ;
- ▷ Régime linéaire ;
- ▷ Filtrage.

1 Un ALI idéal se caractérise par

- ▷ une impédance d'entrée infinie, donc des courants de polarisation nuls ;
 - ▷ une impédance de sortie nulle, donc un courant de sortie indépendant de la tension de sortie ;
 - ▷ une saturation éventuelle de la tension de sortie ($V_{\text{sat}} \simeq 15 \text{ V}$) et du courant de sortie ($i_{\text{sat}} \simeq 40 \text{ mA}$).
- On peut également supposer son gain infini, et un slew rate infini.

L'ALI présent dans le système possède une rétroaction sur sa borne \ominus , il fonctionne donc probablement en régime linéaire.

2 Par la loi des nœuds en potentiel,

$$\frac{U_e - V_-}{R} + \frac{U_1 - V_-}{R} = 0 \quad \text{soit} \quad \underline{V_-} = \frac{U_1 + U_e}{2}.$$

Par un pont diviseur de tension,

$$\frac{V_+}{U_e} = \frac{1/jC_1\omega}{R_1 + 1/jC_1\omega} = \frac{1}{1 + jR_1C_1\omega} \quad \text{donc} \quad \underline{V_+} = \frac{1}{1 + jR_1C_1\omega} U_e.$$

L'ALI fonctionnant en régime linéaire, $\underline{V}_- = \underline{V}_+$, donc

$$\frac{\underline{U}_1 + \underline{U}_e}{2} = \frac{1}{1 + jR_1C_1\omega} \underline{U}_e \quad \text{soit} \quad \underline{U}_1 = \frac{2}{1 + jR_1C_1\omega} \underline{U}_e - \underline{U}_e$$

d'où

$$\underline{H}_1 = \frac{1 - jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega}.$$

La fonction de transfert \underline{H}_1 est le quotient de deux nombres complexes conjugués, donc de même module : on en déduit directement

$$\forall \omega, \quad |\underline{H}_1| = 1.$$

L'argument est donné par

$$\arg \underline{H}_1 = \arg(1 - jR_1C_1\omega) - \arg(1 + jR_1C_1\omega) = \arctan \frac{-R_1C_1\omega}{1} - \arctan \frac{R_1C_1\omega}{1}$$

On en conclut

$$\arg \underline{H}_1 = -2 \arctan(R_1C_1\omega).$$

3 Comme $|\underline{H}_1| = 1$, alors u_e et u_1 sont toujours de même amplitude. La condition porte donc sur le déphasage : on cherche ω_0 tel que

$$\arg \underline{H}_1(\omega_0) = -2 \arctan(R_1C_1\omega_0) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{soit} \quad \arctan(R_1C_1\omega_0) = \frac{\pi}{4}$$

et comme $\tan(\pi/4) = 1$, il vient

$$\omega_0 = \frac{1}{R_1C_1}.$$

4 La loi de comportement du multiplieur s'écrit ici

$$u_2(t) = K u_e(t) u_1(t).$$

Posons $\varphi_1(\omega) = -2 \arctan(R_1C_1\omega)$: d'après ce qui précède,

$$u_1(t) = A \cos(\omega t + \varphi_1).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} u_2(t) &= K A^2 \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi_1) \\ &= \frac{K A^2}{2} [\cos(2\omega t + \varphi_1) + \cos(\varphi_1)] \end{aligned}$$

$$u_2(t) = \frac{K A^2}{2} \cos(\varphi_1) + \frac{K A^2}{2} \cos(2\omega t + \varphi_1).$$

5 Si $\omega = \omega_0$, alors par définition $\varphi_1 = -\pi/2$ et donc

$$u_2(t) = \frac{K A^2}{2} \cos\left(2\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

La fonction de transfert de l'association R_2, C_2 vaut

$$\underline{H}_2 = \frac{1/jC_2\omega}{R_2 + 1/jC_2\omega} = \frac{1}{1 + jR_2C_2\omega},$$

ce qui donne

$$|\underline{H}_2| = \frac{1}{\sqrt{1 + (R_2C_2\omega)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi_2 = \arg \underline{H}_2 = -\arctan(R_2C_2\omega).$$

On a donc

$$u_s(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2R_2C_2\omega_0)^2}} \cos\left(2\omega_0 t - \frac{\pi}{2} - \arctan(2R_2C_2\omega_0)\right)$$

La tension u_s est harmonique, donc pour qu'elle soit constante il faut que son amplitude soit nulle. Le filtre étant passe-bas, il faut que la pulsation $2\omega_0$ soit bien supérieure à la pulsation de coupure du filtre, soit

$$2\omega_0 \gg \frac{1}{R_2 C_2} \quad \text{soit} \quad \frac{2}{R_1 C_1} \gg \frac{1}{R_2 C_2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{C_2 \gg \frac{R_1 C_1}{2R_2}}.$$

6 Pour la tension d'entrée proposée, le déphasage φ_1 en sortie de l'ALI vaut

$$\varphi_1 = -2 \arctan [R_1 C_1 (\omega_0 + \Delta\omega)] = -2 \arctan \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)$$

car $R_1 C_1 \omega_0 = 1$. Par un développement limité autour de $x = 1$, sachant que $\arctan'(x) = 1/(1+x^2)$,

$$\varphi_1 \simeq -\frac{\pi}{2} - \frac{2}{1+1^2} \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\omega}{\omega_0}.$$

Le terme de fréquence double de la tension u_2 sera coupé par le filtre passe-bas, en revanche comme cette fois $\varphi_1 \neq \pi/2$, la tension de sortie sera non nulle, égale à

$$U_s = \frac{KA^2}{2} \cos(\varphi_1) = \frac{KA^2}{2} \sin \left(-\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)$$

et comme $\Delta\omega \ll \omega_0$, un développement limité donne

$$\boxed{U_s = -\frac{KA^2}{2} \frac{\Delta\omega}{\omega_0}}.$$

La mesure de $\Delta\omega$ est donc possible à partir de celle de la tension de sortie.

Le calcul que je propose ci-dessus me semble bien trop difficile pour être celui attendu lors d'un oral de banque PT ... mais je ne vois pas comment faire autrement pour répondre à la question !

Exercice 10 : Filtre de Sallen-Key

oral banque PT | 💡 3 | ✂ 3

 ▷ Régime linéaire ;
▷ Filtrage.

1 Dans la limite des hautes fréquences, le condensateur est équivalent à un fil donc $V_{\oplus} = 0$. L'ALI étant idéal, $V_{\ominus} = V_{\oplus}$ et comme $\underline{S} = V_{\ominus}$ (fil) alors

$$\underline{S} = 0 \quad (\text{limite THF}).$$

Dans la limite des basses fréquences, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. Comme l'ALI est idéal, aucun courant n'entre dans la borne \oplus donc aucun courant ne peut traverser les deux résistances. On a donc $V_{\oplus} = \underline{E}$, d'où on déduit par le même raisonnement que

$$\underline{S} = \underline{E} \quad (\text{limite TBF}).$$

Il s'agit donc d'un **filtre passe-bas**.

2 Notons A le nœud commun aux deux résistances et au condensateur. La loi des nœuds en termes de potentiel appliquée à l'entrée \oplus de l'ALI donne

$$\frac{0 - V_{\oplus}}{1/jC_2\omega} + \frac{V_A - V_{\oplus}}{R} = 0.$$

Comme $V_{\oplus} = V_{\ominus} = \underline{S}$,

$$-jC_2\omega \underline{S} + \frac{V_A - \underline{S}}{R} = 0$$

ou encore

$$V_A = (1 + jRC\omega)\underline{S}. \quad (1)$$

La loi des nœuds en termes de potentiel appliquée maintenant au nœud A donne

$$\frac{\underline{E} - V_A}{R} + \frac{V_{\oplus} - V_A}{R} + \frac{\underline{S} - V_A}{1/jC\omega} = 0.$$

Comme $V_{\oplus} = V_{\ominus} = \underline{S}$,

$$[\underline{E} - V_A] + [\underline{S} - V_A] + jRC\omega [\underline{S} - V_A] = 0. \quad (2)$$

En insérant l'équation (1) dans l'équation (2), on obtient

$$[\underline{E} - (1 + jRC\omega)\underline{S}] + [-jRC\omega\underline{S}] + jRC\omega [-jRC\omega\underline{S}] = 0,$$

puis

$$\underline{E} - (1 + 2jRC\omega - R^2C^2\omega^2) \underline{S} = 0$$

ce qui permet finalement d'aboutir à

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{1}{1 + 2jRC\omega - R^2C^2\omega^2}.$$

La pulsation caractéristique du filtre est $\omega_0 = 1/RC$.

3 Limite très basse fréquence $\omega \ll \omega_0$:

$$\underline{H} \sim \frac{1}{1} \quad \text{donc} \quad G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}| \sim 0.$$

Limite très haute fréquence $\omega \gg \omega_0$:

$$\underline{H} \sim \frac{1}{-R^2C^2\omega^2} \quad \text{donc} \quad G_{\text{dB}} \sim -20 \log (R^2C^2\omega^2) = -40 \log \omega - 40 \log RC,$$

ce qui donne une asymptote de pente -40 dB/décade. Enfin, en $\omega = \omega_0$ on a

$$\underline{H} = \frac{1}{2j} \quad \text{soit} \quad G_{\text{dB}} = -20 \log 2 = -6 \text{ dB}.$$

On en déduit le diagramme de Bode représenté figure 6.

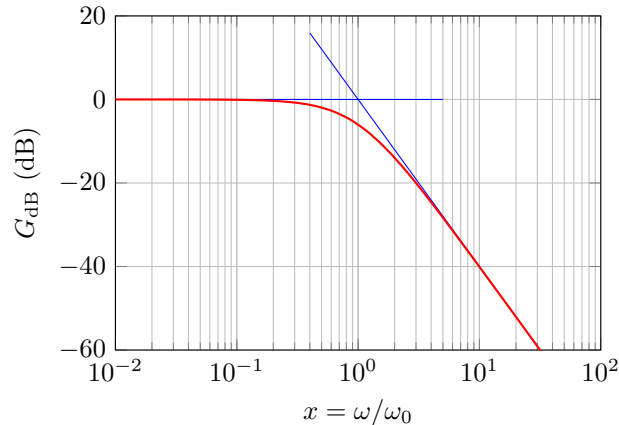


Figure 6 – Diagramme de Bode du filtre de Sallen-Key.

4 Le signal créneau se caractérise par un spectre assez étendu du côté des hautes fréquences.

- ▷ Si la fréquence f du créneau est nettement inférieure à f_0 , seule la partie très haute fréquence du spectre est filtrée : le signal de sortie a la même allure que le signal d'entrée hormis au niveau des sauts du créneau, où l'influence des hautes fréquences est prépondérante.
- ▷ Si f est du même ordre que f_0 , alors l'allure du signal est nettement modifiée par le filtre mais l'atténuation n'est que moyennement marquée.
- ▷ Si $f \gg f_0$, le signal est modifié et très atténué : il est presque complètement coupé.

Exercice 11 : Amplificateur inverseur, modèle du premier ordre oral banque PT | 💡 3 | ✂ 3


▷ Régime linéaire ;

▷ Modèle du premier ordre.

1 L'ALI étant idéal, le même courant traverse les résistances R_1 et R_2 . Ainsi,

$$\frac{V_e - V_{\ominus}}{R_1} = \frac{V_{\ominus} - V_s}{R_2} \quad \text{soit} \quad \frac{V_e}{R_1} = -\frac{V_s}{R_2}$$

puisque $V_{\ominus} = V_{\oplus} = 0$. Finalement,

$$\underline{H} = -\frac{R_2}{R_1}.$$

Le courant d'entrée dans le montage vaut $I_e = (V_e - V_{\ominus})/R_1 = V_e/R_1$, d'où

$$\underline{Z}_e = \frac{V_e}{I_e} = R_1.$$

2 Le gain statique de l'ALI vaut $\mu_0 \sim 1 \cdot 10^5$. Les fréquences usuelles en électronique peuvent aller jusqu'à 1 MHz, et sont en général très supérieures à la fréquence de coupure de l'ALI.

3 La tension d'entrée ε ne peut plus être supposée nulle. Le courant d'entrée du montage traverse toujours les deux résistances, donc

$$\frac{V_e - V_{\ominus}}{R_1} = \frac{V_{\ominus} - V_s}{R_2}$$

avec cette fois $V_{\ominus} = -\varepsilon = -V_s/\mu$, d'où

$$\begin{aligned} R_2 \left(V_e + \frac{V_s}{\mu} \right) &= R_1 \left(-\frac{V_s}{\mu} - V_s \right) \\ R_2 V_e &= -R_1 \left(\frac{V_s}{\mu} + V_s \right) - R_2 \frac{V_s}{\mu} \\ R_2 V_e &= -(R_1 + R_2) \frac{V_s}{\mu} - R_1 V_s \\ \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_e &= -\left(\frac{1}{\mu} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) V_s \\ \frac{V_s}{V_e} &= \frac{-\frac{R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{1}{\mu} + \frac{R_1}{R_1 + R_2}} \\ \frac{V_s}{V_e} &= \frac{-\frac{R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{1}{\mu} + \frac{R_1}{R_1 + R_2}} \\ \frac{V_s}{V_e} &= \frac{-\frac{R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{1}{\mu_0} + j \frac{\omega}{\mu_0 \omega_c} + \frac{R_1}{R_1 + R_2}} \end{aligned}$$

On peut alors identifier la forme canonique,

$$\underline{H}' = \frac{-\frac{R_2}{R_1 + R_2} \times \frac{1}{\frac{1}{\mu_0} + \frac{R_1}{R_1 + R_2}}}{1 + j \frac{\omega}{\mu_0 \omega_c} \times \frac{1}{\frac{1}{\mu_0} + \frac{R_1}{R_1 + R_2}}}$$

On identifie alors le gain maximal,

$$\underline{H}_0 = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \times \frac{1}{\frac{1}{\mu_0} + \frac{R_1}{R_1 + R_2}} \simeq -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \times \frac{1}{\frac{R_1}{R_1 + R_2}} = -\frac{R_2}{R_1}$$

si $\mu_0 \gg (R_1 + R_2)/R_1$, et la pulsation de coupure

$$\omega'_c = \mu_0 \omega_c \times \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) = \omega_c \times \left(1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2} \right) \simeq \frac{\omega_c \mu_0 R_1}{R_1 + R_2}.$$

4 On constate que la rétroaction diminue fortement le gain et élargit la bande passante d'autant.