BLAISE PASCAL
PT 2020-2021

Chapitre 12 – Électronique **Version prof**

Électronique numérique

Plan du cours

Au programme

Extrait du programme officiel : partie 2 « Électronique », bloc 4 « Électronique numérique ».

Le bloc 4 est exclusivement étudié de manière expérimentale et aborde la question du traitement numérique du signal dans le prolongement du programme de première année. Le professeur introduira les thèmes proposés au fur et à mesure des besoins et en relation avec les autres sujets d'étude. Le phénomène de repliement de spectre est expliqué qualitativement à l'aide d'une analogie stroboscopique, l'objectif étant de mettre en place la condition de Nyquist-Shannon et de réaliser convenablement une acquisition numérique en vue d'une analyse spectrale. Afin de mettre en évidence d'autres effets associés à l'échantillonnage, on réalise de manière comparative un filtre analogique passe-bas et un filtre numérique remplissant la même fonction, ce dernier étant réalisé à l'aide d'une feuille de calcul traitant l'acquisition numérique d'une entrée analogique, un CNA restituant ensuite une sortie analogique. On étudie expérimentalement l'influence de la fréquence d'échantillonnage.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Échantillonnage.	**Décrire le mouvement apparent d'un segment tournant observé avec un stroboscope.** **Expliquer l'influence de la fréquence d'échantillonnage.**
Condition de Nyquist-Shannon.	**Mettre en évidence le phénomène de repliement de spectre dû à l'échantillonnage lors de l'utilisation d'un oscilloscope numérique ou d'une carte d'acquisition.**
Analyse spectrale numérique.	**Choisir les paramètres (durée, nombre d'échantillons, fréquence d'échantillonnage) d'une acquisition numérique afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon.**

Étienne Thibierge, 2 novembre 2020, www.etienne-thibierge.fr

Notions et contenus	Capacités exigibles
Filtrage numérique.	**Réaliser un filtrage numérique passe-bas d'une acquisition, et mettre en évidence la limitation introduite par l'échantillonnage.**

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Extrait du programme officiel de PTSI : partie « Formation expérimentale ».

Notions et contenus	Capacités exigibles
Numérisation d'un signal.	**Déterminer le nombre de bits d'une conversion A/N et N/A.**
Analyse spectrale.	**Effectuer l'analyse spectrale d'un signal périodique à l'aide d'un oscilloscope numérique ou d'une carte d'acquisition.** **Choisir de façon cohérente la fréquence d'échantillonnage et la durée totale d'acquisition.**

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Au concours

- Écrit : épreuve A 2019.
- Oral : occasionnellement.

Synthèse : choix des paramètres d'acquisition d'un signal

Les paramètres d'acquisition du signal peuvent être définis directement par des boutons (oscilloscope), par une interface graphique (logiciels type LatisPro) ou par l'intermédiaire d'un script de commande (carte d'acquisition type Arduino).

- **Fréquence d'échantillonnage :**
  - → plus elle est élevée, meilleure sera l'image du signal, mais les données seront d'autant plus lourdes à stocker et à traiter ;
  - → elle doit au moins respecter le critère de Shannon ($f_e > 2f_{max}$), sinon il faut utiliser un filtre anti-repliement ;
  - → le traitement numérique du signal échantillonné peut imposer d'autres contraintes.
- **Durée d'acquisition :**
  - → plus elle est élevée, meilleure sera la résolution spectrale du signal, mais les données seront d'autant plus lourdes à stocker et à traiter.
- **Nombre d'échantillons :** fixé par la fréquence d'échantillonnage et la durée d'acquisition, $N = f_e\, T_{acq}$.
  - → en pratique, il est souvent limité, ce qui nécessite un compromis entre fréquence d'échantillonnage et durée d'acquisition.
- **Calibre :**
  - → plus il est faible, meilleur sera le pas de quantification et donc la résolution (en volt) du signal ... mais s'il est trop faible il y aura saturation pour les valeurs élevées ;
  - → il faut donc choisir le calibre immédiatement supérieur à la valeur maximale du signal.

Merci à Mickaël Melzani, professeur en PTSI à Belfort, pour avoir partagé un bon nombre des illustrations de ce cours.

Tout chaîne de transmission d'information passe aujourd'hui par un traitement numérique des signaux. L'objectif de ce chapitre est de comprendre les conditions à respecter pour pouvoir numériser un signal sans perte d'information.

Ce chapitre est abordé sous une forme qui mêle réflexion personnelle, cours et TP. Les différentes parties sont distinguées par les pictogrammes ci-contre.

I - Numérisation d'un signal

I.1 - Intérêt de la numérisation

On appelle **signal** une grandeur physique X porteuse d'information (tension, position, température, etc.) encodée dans ses variations temporelles.

Le signal est dit **analogique** si la grandeur physique $X(t)$ peut prendre un ensemble continu de valeurs et est définie sur un intervalle de temps continu. Le signal est dit **numérique** si la grandeur physique prend un ensemble discret de valeurs X_1, X_2, etc. et ne varie qu'à certains instants discrets t_1, t_2, etc. Les valeurs prises par le signal ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs différentes, généralement une puissance de 2.

> ***Remarque :*** *Mathématiquement, un signal analogique est une fonction d'une variable réelle (le temps) à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors qu'un signal numérique est une suite à valeurs dans un ensemble fini.*

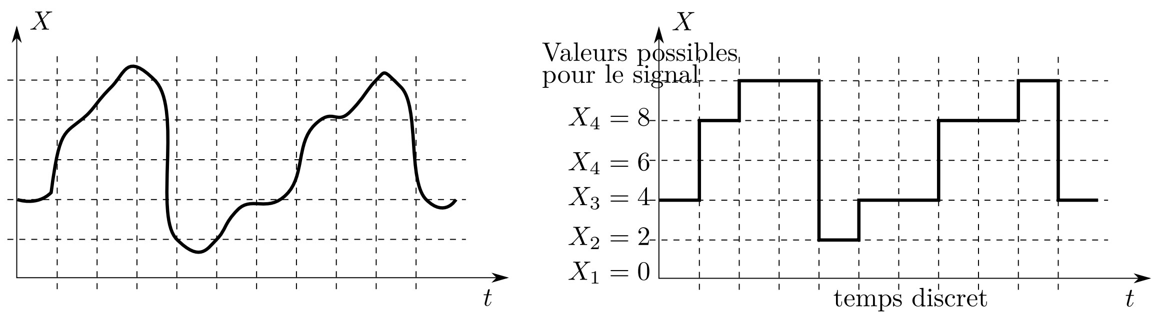


Figure 1 – Signal analogique et signal numérique.

Pourquoi numériser un signal ?

- pour le stocker : par exemple sur un disque dur d'un ordinateur, une carte SD dans un smartphone, etc.
- pour faire des calculs : il est infiniment plus simple d'effectuer des opérations sur un signal numérique à l'aide d'un programme informatique plutôt que sur un signal analogique avec des circuits électroniques.

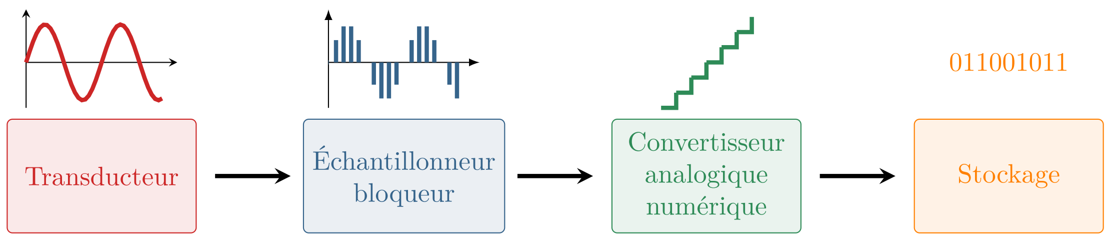
  > ***Exemple :*** *les oscilloscopes modernes numérisent le signal d'entrée pour pouvoir l'analyser.*

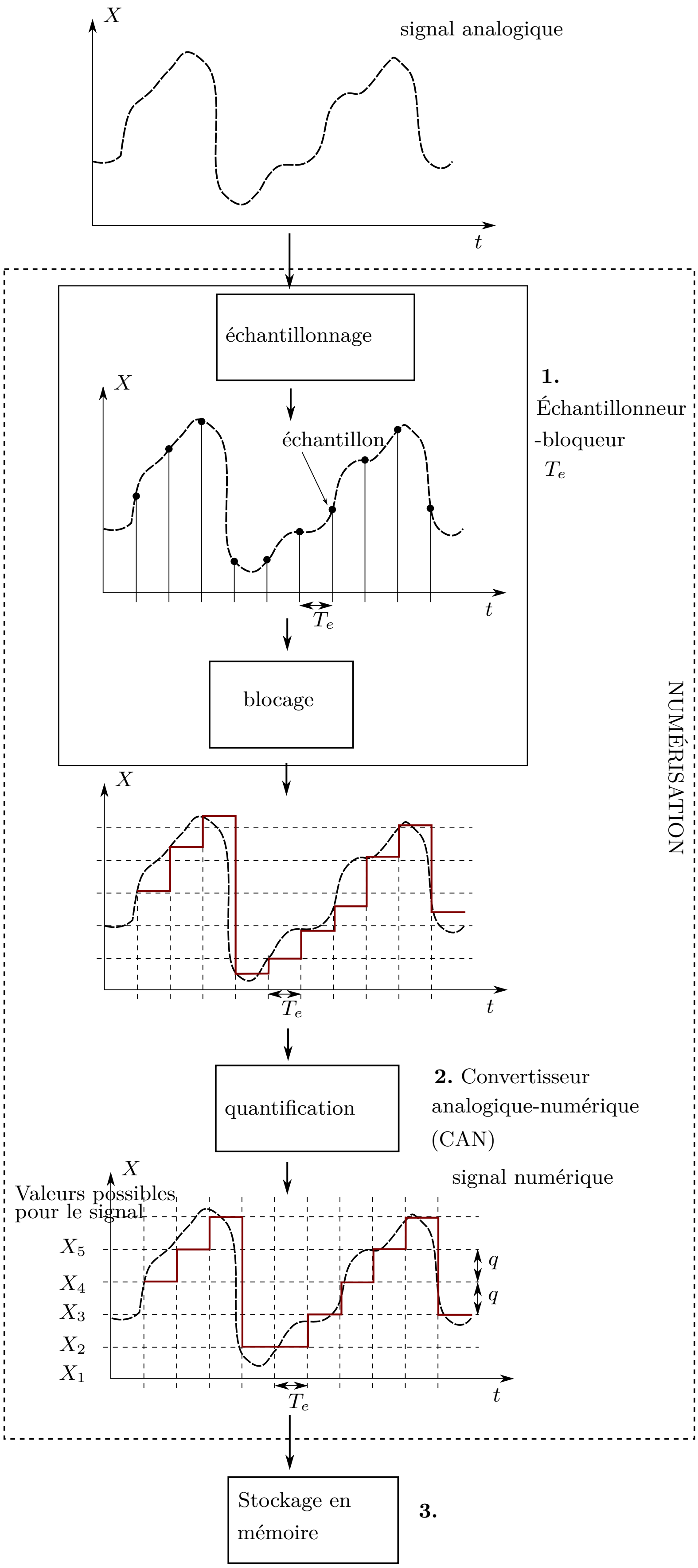
- pour le transmettre : comme un signal numérisé varie « par paliers », il est moins sensible au bruit lors d'une transmission car même en présence de perturbations aléatoires il sera possible de distinguer les différents paliers.

  > ***Exemple :*** *C'est pour cette raison que la télévision hertzienne a été remplacée par la TNT, télévision numérique terrestre.*

I.2 - Structure d'une chaîne d'acquisition et de numérisation

Une chaîne d'acquisition et de numérisation contient toujours les mêmes éléments, présentés ci-dessous, et dont le rôle est discuté page suivante.





Bloc 1 : transducteur

Le signal analogique d'intérêt (température, vitesse, position, etc.) est converti en tension analogique.

Bloc 2 : échantillonneur-bloqueur

La tension analogique est envoyée en entrée d'un échantillonneur-bloqueur. Son rôle est de bloquer la valeur de la tension à un niveau constant pendant une durée T_e appelée **période d'échantillonnage**. La valeur est actualisée tous les T_e.

Bloc 3 : convertisseur analogique numérique

En sortie de l'échantillonneur-bloqueur, la tension est toujours analogique : elle peut prendre n'importe quelle valeur. Comme un système numérique ne peut traiter que des données codées en binaire avec un nombre de bits fini, il faut discrétiser les valeurs prises. C'est le rôle du convertisseur analogique numérique, usuellement abrégé CAN, qui attribue à la tension la valeur binaire permise la plus proche (ou immédiatement inférieure) à sa valeur réelle.

Les cartes d'acquisition, par exemple Sysam ou Arduino, contiennent les deux blocs échantillonneur-bloqueur et CAN.

Bloc 4 : stockage

Les valeurs de sortie du CAN sont enfin stockées en mémoire pour être affichées ou manipulées.

II - Échantillonnage

Échantillonner un signal analogique revient à « prélever » sa valeur à certains instant t_n séparés d'un intervalle de temps régulier T_e appelé **période d'échantillonnage** : on a donc $t_n = nT_\mathrm{e}$. On nomme **fréquence d'échantillonnage** $f_\mathrm{e} = 1/T_\mathrm{e}$. Le nombre d'échantillons N_e est bien sûr relié à la durée totale d'acquisition $T_\mathrm{a} = N_\mathrm{e} T_\mathrm{e}$.

II.1 - Introduction : effet stroboscopique

Un disque est mis en rotation avec une période T_0 (fréquence f_0). Il est éclairé périodiquement par un **stroboscope**, qui émet des flashs lumineux avec une période T_e (fréquence f_e). Un repère est dessiné sur le disque tournant, voir figure 2, dont on étudie le mouvement apparent sous l'effet des flashs.

⇝ le signal « analogique » est le mouvement réel du repère, le signal « échantillonné » est le mouvement apparent sous l'effet des flashs du stroboscope.

Figure 2 – Mouvement stroboscopique. Gauche : QR-code vers une vidéo de l'expérience (scanner ou cliquer). Droite : dispositif expérimental.

▷ Si $f_\mathrm{e} \gg f_0$:

tout se passe comme si le disque était éclairé en continu, le mouvement apparent du repère est semblable à son mouvement réel.

Espace 1

▷ Si f_e est légèrement supérieure à f_0 : le repère reçoit un nouveau flash un peu avant d'avoir parcouru un tour complet.
→ Impression visuelle :
le repère tourne dans l'autre sens et lentement.

Espace 2

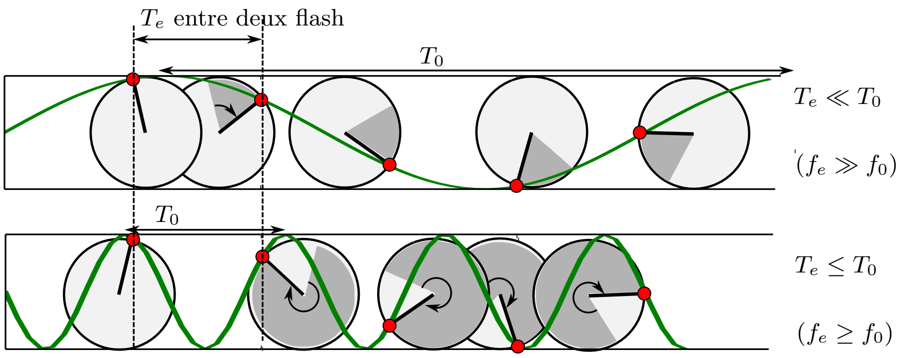


Figure 3 – Effet stroboscopique pour $f_\mathrm{e} > f_0$. Attention : le sens de rotation du disque sur cette illustration n'est pas le même que sur la vidéo (ni l'une ni l'autre ne sont de moi).

▷ Si $f_\mathrm{e} = f_0$: le repère reçoit un nouveau flash alors qu'il a parcouru exactement un tour.
→ Impression visuelle : le repère est immobile

Espace 3

▷ Si f_e est légèrement inférieure à f_0 : le repère reçoit un nouveau flash un peu après avoir parcouru un tour complet.
→ Impression visuelle :
le repère tourne dans le même sens que le disque mais plus lentement.

Espace 4

▷ Si $f_e \ll f_0$: le repère reçoit un nouveau flash alors qu'il a parcouru plusieurs tours complets, voir figure 4.
→ il est impossible de connaître le nombre de tours parcourus entre deux flashs.

Plusieurs signaux analogiques peuvent donner un même signal échantillonné.

Espace 5

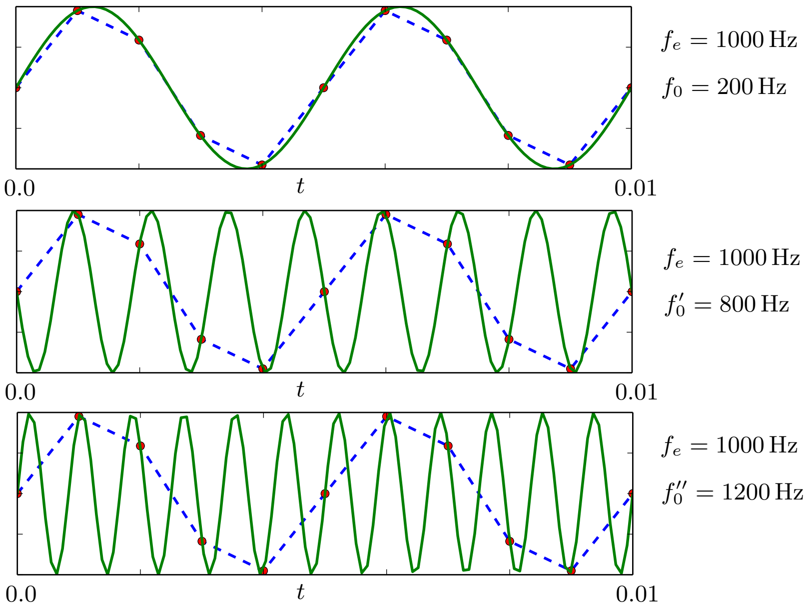


Figure 4 – Effet stroboscopique pour $T_e > T_0$. Le signal analogique est représenté en trait plein, les échantillons par les points et le signal échantillonné en traits pointillés.

> ***Application :*** *Pourquoi les roues des voitures tournent-elles parfois à l'envers dans les films ou les pubs ?*
>
> *effet stroboscopique ! un film n'est pas tourné en continu mais contient 24 images par seconde, ce qui est suffisant pour donner l'illusion de la continuité compte tenu de la durée de la persistance rétinienne, de l'ordre de 0,1 s.*
>
> Espace 6

- **Conclusion et généralisation**

L'étude précédente permet de dégager des conclusions très générales sur les phénomènes reliés à l'échantillonnage.

Pour que le signal échantillonné soit fidèle au signal analogique,
la fréquence d'échantillonnage doit être suffisamment élevée : qualitativement,

$$T_e \ll T_0 \text{ soit } f_e \gg f_0.$$

Espace 7

Cependant, plus la fréquence d'échantillonnage f_e est élevée plus le nombre d'échantillons N_e d'un signal de durée totale T_a fixée est élevé, ce qui peut avoir des conséquences néfastes en termes de temps de calcul ou de stockage des données. De plus, n'importe quel dispositif d'acquisition est limité en fréquence.

⇝ il est nécessaire de préciser le critère de fréquence pour qu'il soit vraiment utilisable.

II.2 - Repliement spectral

a) Précaution préalable : calcul des spectres avec LatisPro

L'algorithme de transformée de Fourier rapide utilisé par LatisPro requiert un nombre de points égal à une puissance de 2. Si jamais ce n'est pas le cas, le logiciel complète de lui-même le signal par des zéros pour calculer le spectre, ce qui a pour effet de modifier artificiellement la fréquence d'échantillonnage. C'est presque toujours sans importance ... sauf ici où l'on cherche à étudier précisément l'influence de cette fréquence.

⇝ **Attention !** Dans toute la suite, vous choisirez un nombre total de points égal à 1024 et règlerez la période d'échantillonnage, en laissant la durée totale d'acquisition s'ajuster d'elle-même. Attention, LatisPro ayant parfois tendance à faire le contraire de ce que vous voulez, il faudra fréquemment y revenir.

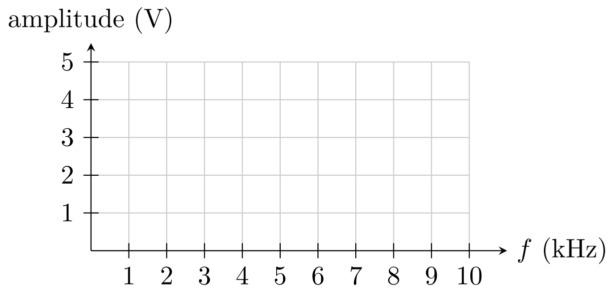
b) Réplication du spectre

- **Cas d'un signal harmonique**

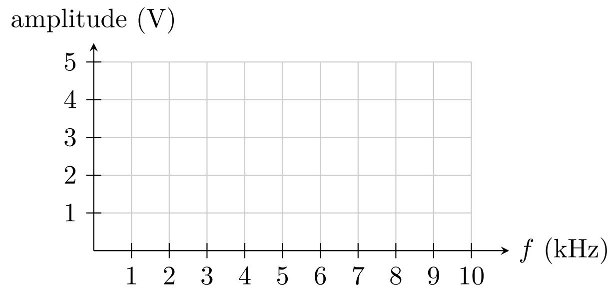
Produire avec le GBF un signal sinusoïdal d'amplitude environ égale à $4\,\mathrm{V}$ et de fréquence $f_0 = 1\,\mathrm{kHz}$ qui sera modifiée par la suite. Dans un premier temps, l'acquérir avec LatisPro sur 1024 points et avec une période d'échantillonnage $T_e = 10\,\mu\mathrm{s}$.

Une fois le logiciel correctement paramétré, modifier la période d'échantillonnage à $T_e = 100\,\mu\mathrm{s}$ (soit $f_e = 10\,\mathrm{kHz}$) puis compléter les graphes ci-dessous, en demandant à LatisPro d'afficher les spectres sur l'intervalle $[0, f_e]$.

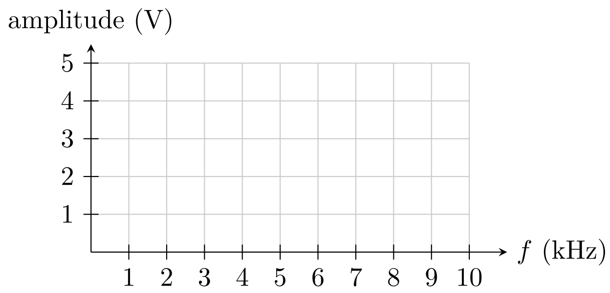
Spectre **théorique**, $f_0 = 1\,\mathrm{kHz}$



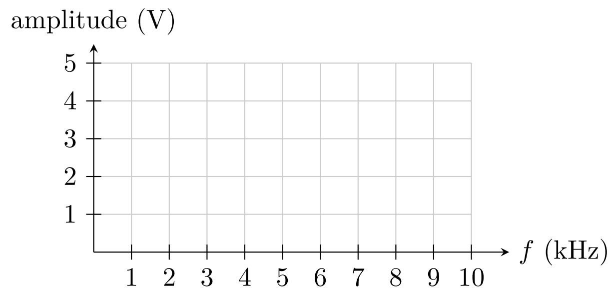
Spectre expérimental, $f_0 = 1\,\mathrm{kHz}$



Spectre expérimental, $f_0 = 2\,\mathrm{kHz}$



Spectre expérimental, $f_0 = 4\,\mathrm{kHz}$



Observations :

Même s'il est difficile d'interpréter l'allure des signaux à cause de l'effet stroboscopique, le calcul du spectre donne un résultat convenable.
On observe un pic parasite du côté des hautes fréquences, qui ne correspond pas au spectre du signal réel, et dont la fréquence semble être égale à $f_e - f_0$.

Espace 8

Si le logiciel permettait d'afficher le spectre sur des échelles de fréquence plus grandes [1], on observerait d'autres pics répliques, répartis périodiquement aux fréquences $kf_\mathrm{e} \pm f_0$, k entier, comme représenté figure 5. Physiquement, ces pics répliques viennent du fait qu'il n'y a pas qu'un seul signal harmonique qui puisse correspondre à la série d'échantillons, comme discuté à partir de la figure 4. Les fréquences des pics répliques sont celles de ces autres signaux harmoniques.

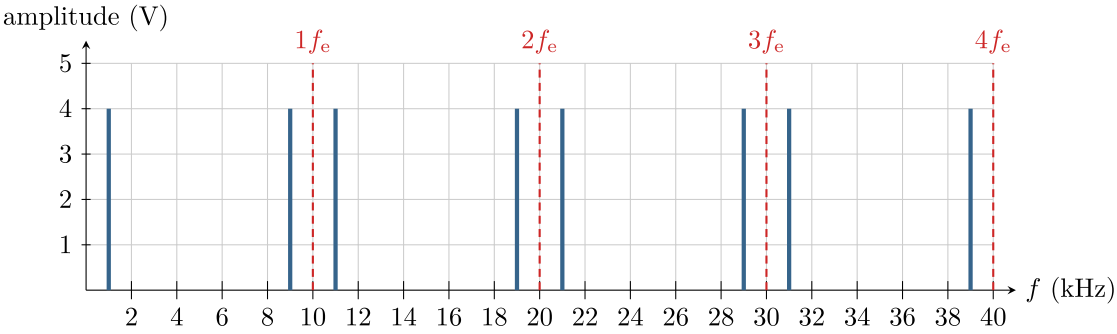


Figure 5 – Spectre d'un signal harmonique échantillonné. Le signal a pour fréquence $f_0 = 1\,\mathrm{kHz}$ et il est échantillonné avec la fréquence $f_\mathrm{e} = 10\,\mathrm{kHz}$.

> ***Remarque :*** *On constate un enrichissement spectral entre le signal analogique et le signal échantillonné : l'échantillonnage est une opération non-linéaire.*

- **Cas général**

D'après le théorème de Fourier, n'importe quel signal peut s'écrire comme une somme de signaux sinusoïdaux,

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)\,.$$

Si le signal n'est pas périodique, la somme est à remplacer par une intégrale :

$$s(t) = \int_0^{+\infty} A(f)\,\cos\left[2\pi f t + \varphi(f)\right]\,\mathrm{d}f\,.$$

Chacune des composantes harmoniques subit le même phénomène de réplication lors du processus d'échantillonnage, et il se retrouve donc sur le spectre du signal complet comme représenté figure 6.

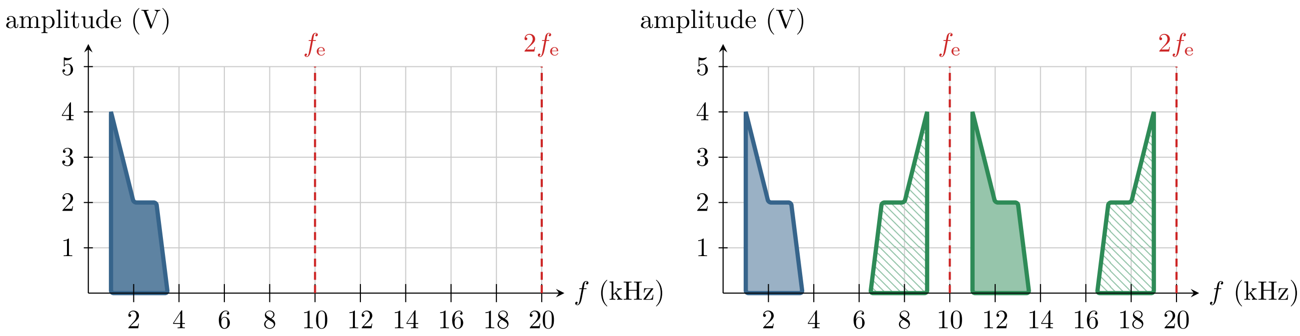


Figure 6 – Spectre d'un signal quelconque échantillonné. Le signal possède un spectre compris entre 1 et 3,5 kHz et il est échantillonné avec la fréquence $f_\mathrm{e} = 10\,\mathrm{kHz}$. La figure de gauche représente le spectre du signal analogique, celle de droite le spectre du signal échantillonné, présentant des répliques du spectre.

L'échantillonnage d'un signal entraîne une réplication périodique de son spectre : toute composante de fréquence f est répliquées aux fréquences $kf_\mathrm{e} \pm f$, k entier.

Espace 9

1. Comme nous le verrons au paragraphe II.4, ce n'est cependant pas un défaut du logiciel mais une limite propre aux signaux échantillonnés.

Une première difficulté posée par ces répliques du spectre se rencontre lors de la reconstruction du signal à partir du signal échantillonné : en raison de la réplication du spectre, le signal reconstruit diffère fortement du signal analogique.

⇝ solution simple :
filtrer le signal reconstruit avec un passe bas de fréquence de coupure $f_\mathrm{e}/2$

Espace 10

Si le filtre est idéal, le spectre en sortie du passe-bas est identique à celui du signal analogique, et le signal reconstitué est fidèle à l'original.

c) Repliement spectral

Une seconde difficulté, beaucoup plus embarrassante, intervient lorsque les spectres du signal et de ses répliques se recouvrent, si bien qu'ils ne peuvent plus être distingués : c'est le cas de la figure 7.

⇝ le spectre et ses répliques sont impossibles à séparer.

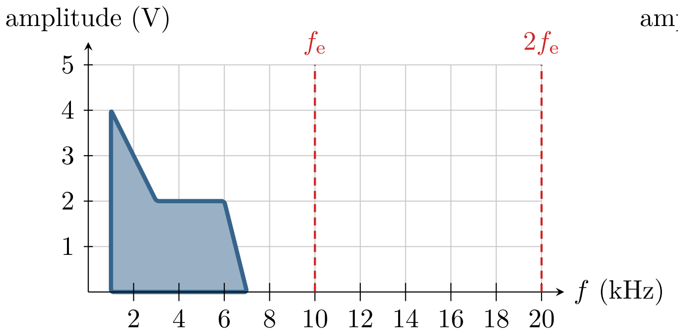


Figure 7 – Spectre d'un signal quelconque échantillonné en présence de recouvrement spectral. Le signal possède un spectre compris entre 1 et 7 kHz et il est échantillonné avec la fréquence $f_\mathrm{e} = 10\,\mathrm{kHz}$. La figure de gauche représente le spectre du signal analogique. La figure de droite représente la construction du spectre du signal échantillonné, en tenant compte du recouvrement spectral.

On appelle **repliement spectral** ou **aliasing** le phénomène de recouvrement du spectre du signal analogique et de ses répliques lors du processus d'échantillonnage.
Ce phénomène n'est pas corrigeable par filtrage a posteriori et doit être anticipé en amont de l'acquisition.

II.3 - Critère de Nyquist-Shannon

Pour que le signal numérisé soit fidèle au signal analogique, le repliement de spectre est à éviter absolument. Si le spectre du signal est connu a priori, on peut choisir en conséquence la fréquence d'échantillonnage.

Il ne faut qu'aucune composante du spectre ne se recouvre avec sa réplique.
Cas le pire : pour f_max, dont la réplique se trouve à $f_\mathrm{e} - f_\mathrm{max}$
Conséquence : il faut avoir $f_\mathrm{max} < f_\mathrm{e} - f_\mathrm{max}$ soit $f_\mathrm{e} > 2f_\mathrm{max}$.

Espace 11

Critère de Nyquist-Shannon :

Pour éviter le repliement spectral, la fréquence d'échantillonnage doit être telle que
$f_\mathrm{e} > 2f_\mathrm{max}$.

Espace 12

Cependant, les limites intrinsèques des composants (ou des outils de traitement numérique) font qu'il n'est pas toujours possible de respecter le critère de Shannon.

$\rightsquigarrow$ solution pour éviter le repliement de spectre :

éliminer les fréquences qui vont être susceptibles de donner du recouvrement de spectre avant l'échantillonnage : placer un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_e/2$ AVANT l'échantillonneur bloqueur. Un tel filtre est appelé **filtre anti repliement**.

Espace 13

Inconvénient : ce n'est pas directement le signal analogique qui est numérisé, et la perte des hautes fréquences du spectre peut entraîner une perte d'information.

II.4 - Résolution spectrale et durée d'acquisition

Rappelons que l'on considère un signal échantillonné à la fréquence f_e. La durée totale d'acquisition T_a est relié au nombre d'échantillons par

$$T_a = N_e T_e = \frac{N_e}{f_e}\,.$$

Comme nous l'avons déjà mentionné aux paragraphes précédents, le spectre du signal échantillonné contient des répliques du spectre du signal analogique réparties périodiquement, avec une période f_e. L'algorithme de transformée de Fourier rapide, utilisé par tous les logiciels, ne calcule ses valeurs que sur la première période :

Un spectre calculé numériquement ne contient que des fréquences comprises entre 0 et f_e.

Or ce spectre est calculé à partir d'un signal discrétisé en N_e points : il est lui-même discrétisé en N_e points, ce qui limite sa résolution, c'est-à-dire l'écart entre deux fréquences consécutives contenues dans le spectre.

La **résolution** d'un spectre calculé numériquement est gouvernée par la durée d'acquisition,

$$\Delta f = \frac{f_e}{N_e} = \frac{1}{T_a}$$

Espace 14

II.5 - Complément : influence de la fenêtre de calcul du spectre

> *Ce paragraphe est donné à titre de complément culturel : y revenir seulement s'il reste du temps en fin de séance.*

L'oscilloscope ou LatisPro n'utilisent pas nécessairement la totalité du signal numérisé pour calculer son spectre mais se restreignent à une portion appelée **fenêtre de calcul**.

> ***Remarque :*** *Cette portion de signal peut même parfois être lissée, notamment au niveau des bords, pour éviter certains effets parasites sur le spectre. Ce traitement est appelé **fenêtrage du signal**. L'oscilloscope propose diverses options : fenêtre rectangulaire, de Hamming, etc. Chaque type de fenêtrage affecte le spectre calculé, ce qui présente différents avantages et inconvénients.*

Générer avec le GBF un signal sinusoïdal de fréquence $f_0 = 100\,\mathrm{Hz}$ et l'acquérir sur 1024 points avec une fréquence d'échantillonnage $f_e = 10\,\mathrm{kHz}$. Afficher son spectre avec LatisPro.

Changer la fenêtre du signal sur laquelle le spectre est calculé : régler « sélection de période » non plus en mode automatique mais en mode manuel. Sélectionner manuellement la fenêtre au hasard. Faire plusieurs essais.

Quel est l'impact sur le spectre ?

De nombreux pics parasites, d'origine non physique, se forment autour du pic principal. L'écart entre ces pics est lié à la longueur de la fenêtre utilisée pour le spectre, comme il se doit.

Espace 15

Comment éviter ces pics parasites ?

Calculer le spectre à partir d'un nombre entier de périodes.

Espace 16

On retiendra que ces pics parasites n'ont pas d'origine physique, et n'ont pas une grande importance : la sélection automatique de la fenêtre de calcul permet en général de les éviter.

III - Quantification et résolution

III.1 - Pas de quantification

Commençons par nous intéresser à l'étape de quantification. On appelle **pas** ou **quantum de quantification** l'écart (en volt) entre deux valeurs binaires successives. L'influence du pas de quantification sur le signal numérisé est représenté figure 8.

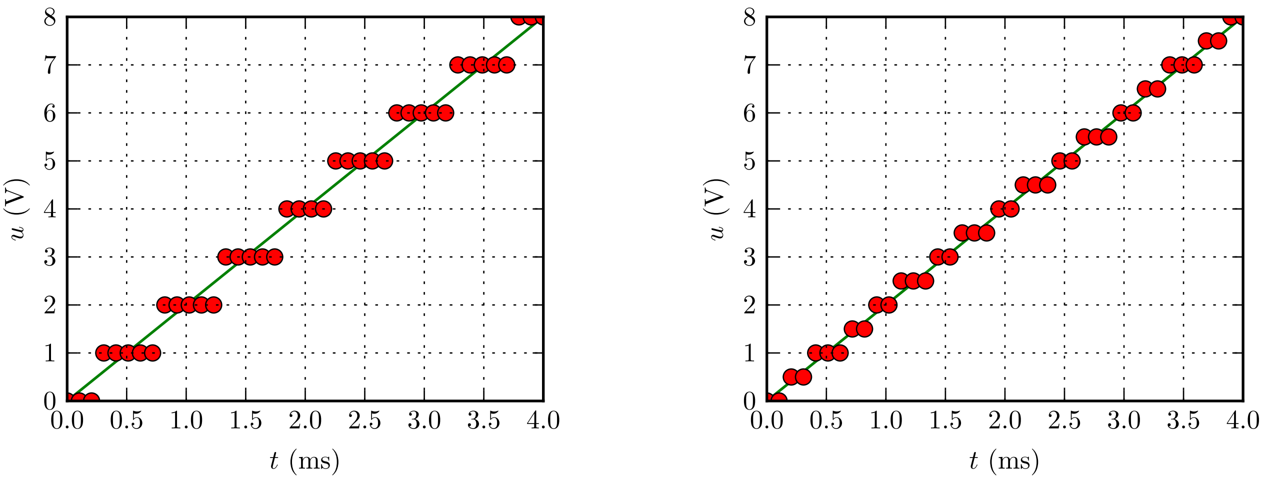


Figure 8 – Deux exemples de numérisation d'une même tension. Le signal analogique est représenté en trait plein bleu, le signal numérisé par les points verts. Dans les deux cas la période d'échantillonnage est de 0,1 ms. Sur la figure de gauche le pas de quantification vaut 1 V alors qu'il vaut 0,5 V sur la figure de droite.

Le pas de quantification est déterminé par le calibre et la résolution de l'acquisition. Ces deux paramètres sont généralement indépendants l'un de l'autre.

- Le **calibre** C donne la gamme de valeurs $\pm C$ que le signal numérisé est susceptible de prendre. Il doit être supérieur à la valeur maximale du signal analogique, sans quoi le signal numérisé fait apparaître un phénomène de saturation. La valeur $2C$, c'est-à-dire la largeur de l'intervalle de valeurs permises, est la **tension de pleine échelle** du CAN.
- La **résolution** N indique le nombre de bits sur lequel le signal numérisé est codé : 2^N valeurs sont possibles dans l'intervalle $[-C, +C]$, ou autrement dit cet intervalle est divisé en $2^N - 1$ intervalles de largeur identique.

⇝ pas de quantification : $p = \dfrac{2C}{2^N - 1} \simeq \dfrac{C}{2^{N-1}}$

Espace 17

> ***Exemples :*** *La résolution d'un CD audio est de 16 bits. Celle d'un pixel d'un appareil numérique reflex (un pixel correspond à une couleur) est de 14 ou 16 bits, mais si elle est comprimée au format jpeg la résolution n'est plus que 8 bits.*

En observant un signal triangulaire avec LatisPro, déterminer la résolution de la conversion analogique numérique réalisée par la carte Sysam. Les acquisitions LatisPro se font avec un calibre de 10 V.

$\ln p = \ln C - (N-1)\ln 2$ d'où on déduit $N = 1 + \dfrac{\ln C - \ln p}{\ln 2}$
A priori on doit trouver 10 bits.

Espace 18

III.2 - Complément : bruit de quantification

> *Ce paragraphe est donné à titre de complément culturel : y revenir uniquement s'il reste du temps en fin de séance.*

La figure 9 représente le signal analogique s_{an}, sa version quantifiée s_{qu} avec une carte d'acquisition de résolution 3 bits, ainsi que l'erreur d'arrondi générée au cours du processus, définie par $\varepsilon(t) = s_{\text{an}}(t) - s_{\text{qu}}(t)$ et appelée **bruit de quantification**. L'erreur d'arrondi associée à la quantification a bien sûr une valeur comprise entre $-p/2$ et $p/2$ quelle que soit l'amplitude du signal analogique.

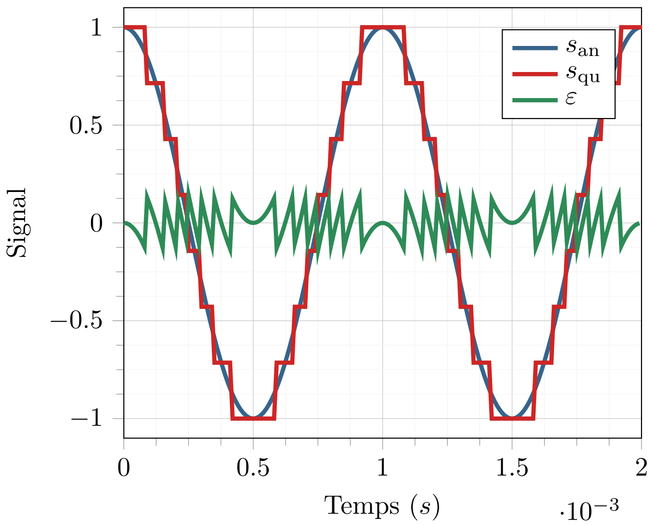


Figure 9 – Bruit de quantification. Les courbes sont tracées pour une résolution de 3 bits et un calibre de 1 V, ce qui donne un rapport signal sur bruit de $1{,}2 \cdot 10^{-2}$.

L'un des critères d'une bonne acquisition est le rapport signal sur bruit, noté SNR pour « signal to noise ratio » :

$$\text{SNR} = \frac{\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle}{\left\langle s_{\text{qu}}^2 \right\rangle}$$

Son calcul est un excellent indicateur du bon usage du calibre et de l'influence de la résolution, comme l'indique le tableau à double entrée ci-dessous.

		Calibre		
		1 V	5 V	10 V
Résolution	3 bits	$1{,}2 \cdot 10^{-2}$	$2{,}0 \cdot 10^{-1}$	1,4
	5 bits	$6{,}5 \cdot 10^{-4}$	$2{,}2 \cdot 10^{-2}$	$5{,}3 \cdot 10^{-2}$
	8 bits	$1{,}0 \cdot 10^{-5}$	$2{,}4 \cdot 10^{-4}$	$9{,}4 \cdot 10^{-4}$

IV - Filtrage numérique : exemple du passe-bas du premier ordre

L'un des principaux intérêts de la numérisation d'un signal est la simplicité d'un traitement numérique comparé à un traitement analogique : les tâches peuvent être plus complexes et plus facilement modifiables (changer la valeur d'une variable dans un programme est bien plus simple que de changer de composant électronique !). Une fois traité, le signal numérique peut être de nouveau converti en signal analogique par un convertisseur numérique-analogique (CNA). Exactement comme un CAN, un CNA possède un pas de quantification.

À titre d'illustration, nous allons numériser un signal, le filtrer numériquement puis le reconvertir sous forme analogique.

IV.1 - Algorithme de filtrage

La fonction de transfert d'un filtre passe-bas s'écrit sous forme canonique

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{H_0}}{1 + \mathrm{j}\omega/\omega_\mathrm{c}}$$

avec $\underline{H_0}$ le gain statique et ω_c la pulsation de coupure. Dans la suite on prendra

$$\underline{H_0} = 1 \qquad \text{et} \qquad \omega_\mathrm{c} = 1{,}0 \cdot 10^4\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

ce qui donne une fréquence de coupure $f_\mathrm{c} = 1{,}6\,\mathrm{kHz}$.

Pour calculer numériquement le signal de sortie, on pourrait calculer le spectre du signal numérisé et le multiplier par la fonction de transfert. Il est cependant plus simple de travailler directement dans le domaine temporel.

⇝ relation différentielle entre s et e :

À partir de la FT on obtient : $s + \dfrac{1}{\omega_\mathrm{c}}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = e$ soit $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\omega_\mathrm{c} s + \omega_\mathrm{c} e$

Espace 19

Pour transformer cette relation différentielle en une équation sur les échantillons, il faut approximer la dérivée. Le plus simple est d'utiliser le schéma d'Euler explicite, le pas de temps étant égal à la période d'échantillonnage :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{s_{n+1} - s_n}{T_\mathrm{e}}$$

On peut alors en déduire une relation de récurrence permettant de calculer $s_{n+1} = s((n+1)T_\mathrm{e})$ à partir de $e_n = e(nT_\mathrm{e})$ et $s_n = s(nT_\mathrm{e})$, et ainsi de reconstruire point par point le signal (numérisé) s à partir de e.

Euler : $\dfrac{s_{n+1} - s_n}{T_\mathrm{e}} = -\omega_\mathrm{c} s_n + \omega_\mathrm{c} e_n$

$s_{n+1} - s_n = -\omega_\mathrm{c} T_\mathrm{e} s_n + \omega_\mathrm{c} T_\mathrm{e} e_n$

$s_{n+1} = \omega_\mathrm{c} T_\mathrm{e} e_n + (1 - \omega_\mathrm{c} T_\mathrm{e}) s_n$

Espace 20

Il nous faut maintenant implémenter cet algorithme, ce que nous allons faire sous Latis Pro. Recopier le code ci-dessous (sans les commentaires !) dans une feuille de calcul : onglet « Traitement » puis « Feuille de calcul ». Pour exécuter cette feuille de calcul, il suffit d'appuyer sur la touche F2 (ou « Calcul » puis « Exécuter »), et on peut ensuite afficher la courbe associée.

```
Te = 10.e-6           // Déclare la variable Te (période d'échantillonnage) avec la valeur
                      // de 10 microsecondes. A MODIFIER par la suite.

omegac = 1e4          // Déclare la variable omegac (pulsation de coupure du filtre)
                      // avec la valeur 10 000 rad/s.

A = omegac * Te
B = 1 - omegac * Te

s = Table(0)                   // Sert à créer un tableau s, qui sera le signal de sortie
                               // En Python on aurait écrit s = np.zeros(len(EA1))

s[n] = A*EA1[n-1] + B*s[n-1]   // Equation de récurrence
                               // A MODIFIER éventuellement selon la voie d'entrée utilisée
                               // En Python, l'équivalent serait :
                               // for n in range(1,len(s)):
                               //     s[n] = A*EA1[n-1] + B*s[n-1]
```

IV.2 - Mise en œuvre

Acquérir un signal sinusoïdal $e(t)$ de fréquence $f_0 = 1\,\mathrm{kHz}$ sur 1024 points avec une période d'échantillonnage $T_\mathrm{e} = 10\,\mu\mathrm{s}$. Le filtrer numériquement et afficher la courbe représentant s.

Pour restituer le signal filtré sous forme analogique, on utilise le CNA de la carte Sysam. Il se paramètre dans l'onglet « sortie » de LatisPro (flèche vert foncée située à côté du paramétrage de l'acquisition et de l'affichage des courbes). Le signal indiqué est envoyé sur la borne « sortie analogiques » de la carte d'acquisition, ou bien périodiquement si le « mode GBF » est activé, ou bien une unique fois si l'on clique sur le bouton « Émettre ».

Attention ! La carte d'acquisition ne peut pas délivrer une tension supérieure à 5 V : modifier l'amplitude de l'entrée e si nécessaire.

Observer ce signal à l'oscilloscope. Attention, comme l'acquisition est faite sur une durée finie alors le signal de sortie est également émis sur la même durée finie : il faut donc utiliser le mode d'acquisition unique de l'oscilloscope (ou appuyer sur Run/Stop) pour bloquer l'acquisition.

À l'aide de l'oscilloscope, mesurer la valeur expérimentale de $|\underline{H}(f = f_0)|$. Comparer à la valeur attendue.

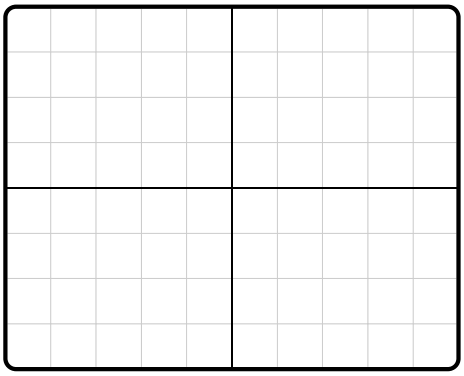
Vérifier qualitativement et rapidement en changeant la fréquence du signal d'entrée que le système agit bien en filtre passe-bas.

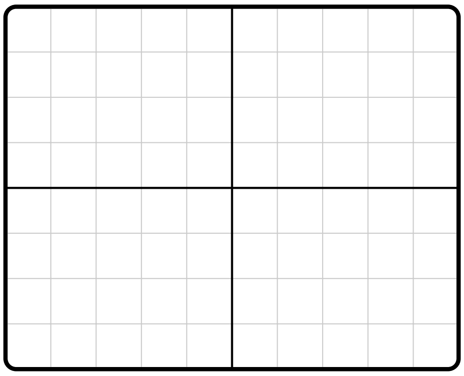
IV.3 - Importance de la fréquence d'échantillonnage

En plus de la fréquence du signal f_0 et de la fréquence d'échantillonnage f_e, une troisième fréquence intervient ici : la fréquence de coupure du filtre f_c. L'objectif de cette dernière partie est de mettre en évidence une contrainte sur la fréquence d'échantillonnage pour que le filtrage numérique soit efficace.

On travaille en conservant la fréquence du signal et la fréquence de coupure du filtre fixées : seule la fréquence d'échantillonnage est modifiée : **n'oubliez pas** de modifier la feuille de calcul en conséquence.

Filtrer le même signal que précédemment pour $T_\mathrm{e} = 10\,\mu\mathrm{s}$, puis $100\,\mu\mathrm{s}$. Reproduire (page suivante) l'allure du signal observé à l'écran.





Interprétation :

lors de la conversion numérique → analogique, le signal est maintenu constant pendant une durée T_e alors qu'un filtrage analogique le laisserait évoluer de manière sinusoïdale.

Espace 21

Même si le critère de Shannon sur l'acquisition est vérifié, un filtrage numérique n'est performant que si $f_\mathrm{e} \gg f_\mathrm{c}$. Il faut en tenir compte dans le choix de f_e.

Espace 22

En effet, si ce critère est rempli, l'effet « constant par morceaux » (lié au CNA) ne sera visible que sur les signaux haute fréquence, ce qui n'est pas un problème car ce sont ceux que l'ont souhaite couper avec un passe-bas. On comprend ainsi que le critère ne se généralise pas directement à un filtre passe-haut, dont le dimensionnement implique une connaissance a priori des signaux qui seront filtrés.