TD 15 – Électromagnétisme *Correction*

Potentiel électrostatique

Exercices

Exercice 1 : Potentiel créé par une sphère uniformément chargée

La distribution de charge est de taille finie, on peut donc considérer le potentiel nul à l'infini. Par définition et compte tenu des symétries,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -E_r$$

Ainsi, pour $r > R$,

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \text{donc} \qquad V(r > R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + A$$

La condition limite s'écrit

$$\lim_{r\to\infty} V(r) \underbrace{=}_{\text{CL}} 0 \underbrace{=}_{\text{sol}} A\,.$$

Pour $r < R$, on a

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3} \qquad \text{donc} \qquad V(r < R) = -\frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{r^2}{R^3} + A'\,.$$

La condition limite est donnée par la continuité du potentiel en $r = R$,

$$V(r = R) \underbrace{=}_{r\leq R} -\frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{R^2}{R^3} + A' \underbrace{=}_{r\geq R} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad \text{d'où} \qquad A' = 3\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

On en déduit finalement

$$\boxed{V(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \dfrac{r^2}{R^2}\right) & \text{si } r < R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & \text{si } r > R \end{cases}}$$

Exercice 2 : Lecture d'une carte de champ

1 Les lignes de champ électrique divergent des charges positives et convergent vers les charges négatives. On en déduit que toutes les charges sont positives hormis q_3.

2 Le plan orthogonal à la figure contenant l'axe $y = 0$ est un plan de symétrie du champ électrique, c'est donc aussi un plan de symétrie de la distribution de charge ... mais cela n'apporte aucune information sur les charges car elles sont toutes comprises dans ce plan.

On constate que le plan $x = 0$ est plan de symétrie du champ électrique, donc également de la distribution de charges. On en déduit

$$q_5 = q_1 \qquad \text{et} \qquad \boxed{q_4 = q_2\,.}$$

3 Les lignes de champ semblent « éviter » les points où $\mathcal{S}$ croise les plans de symétrie : cela signifie en fait qu'il existe deux lignes de champ « médianes » (l'une colinéaire à $\vec{u}_x$, l'autre colinéaire à $\vec{u}_y$) qui s'y coupent. La seule possibilité pour que $\vec{E}$ soit tangent à deux lignes de champ orthogonales en ces points est qu'il soit nul.

4 Le champ est nul en tout point de $\mathcal{S}$, donc son flux au travers de cette surface est nul, donc d'après le théorème de Gauss la charge intérieure à cette surface est nulle :

$$q_2 + q_3 + q_4 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{q_3 = -2q_2}$$

Exercice 3 : Potentiel de Yukawa

$\boxed{1}$ Dans la limite $r \ll a$, $\mathrm{e}^{-r/a} \simeq 1$ donc

$$V(r) \simeq \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

On reconnaît le potentiel créé par une charge ponctuelle placée en O : c'est a priori le proton du noyau.

Dans le limite $r \gg a$, $V(r) \longrightarrow 0$: le potentiel est nul à grande distance de l'atome, ce qui est logique car c'est une distribution de charge contenue dans un volume fini.

> *Attention, le potentiel n'est pas toujours nul à l'infini : il ne l'est pas pour les distributions de charge infinies, par exemple un plan ou un cylindre infini.*

$\boxed{2}$ Par définition,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{u}_r = -\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-\dfrac{1}{a}\,\mathrm{e}^{-r/a} \times r - \mathrm{e}^{-r/a} \times 1}{r^2}\vec{u}_r$$

soit en simplifiant

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(1 + \frac{r}{a}\right)\frac{\mathrm{e}^{-r/a}}{r^2}\vec{u}_r\,.}$$

$\boxed{3}$ Appliquons le théorème de Gauss à une sphère de rayon r, orientée vers l'extérieur. D'après la question précédente,

$$\oiint_{\text{sphère}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(1 + \frac{r}{a}\right)\frac{\mathrm{e}^{-r/a}}{r^2} \times 4\pi r^2$$

d'où on déduit

$$\boxed{q(r) = q_0\left(1 + \frac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{-r/a}\,.}$$

$\boxed{4}$ L'expression précédente montre que lorsque le rayon r de la sphère tend vers 0 alors **$q(r)$ tend vers q_0** qui ne peut donc qu'être une charge ponctuelle localisée en O : cette charge modélise bien sûr le **proton** de l'atome.

La charge totale contenue dans l'espace vaut

$$\boxed{Q_{\text{tot}} = \lim_{r \to \infty} q(r) = 0}$$

par croissance comparée de l'exponentielle et de la fonction affine. Cela traduit le fait que l'atome est **globalement neutre**.

$\boxed{5}$ La relation donnée permet de calculer

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(1 + \frac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{-r/a}\right] = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\left[\frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{-r/a} - \frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{-r/a}\left(1 + \frac{r}{a}\right)\right] = -\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\, ra^2}\,\mathrm{e}^{-r/a}$$

D'après l'équation de Maxwell-Gauss, il vient

$$\rho(r) = \varepsilon_0\,\mathrm{div}\,\vec{E} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\rho(r) = -\frac{q_0}{4\pi\, ra^2}\,\mathrm{e}^{-r/a}\,.}$$

Pour un atome d'hydrogène on a bien sûr $q_0 = +e$, ce qui permet de déduire On en déduit

$$\boxed{P(r) = \frac{e^2}{4\pi a^2}\frac{\mathrm{e}^{-r/a}}{r}\,.}$$

$\boxed{6}$ La charge $\mathrm{d}q$ contenue dans la calotte sphérique s'écrit simplement

$$\mathrm{d}q = q(r + \mathrm{d}r) - q(r) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r = -q_0\frac{r}{a^2}\,\mathrm{e}^{-r/a}\mathrm{d}r\,.$$

La densité de probabilité de présence associée vaut donc

$$\boxed{p(r) = \frac{r}{a^2}\,\mathrm{e}^{-r/a}\,.}$$

Pour trouver à quelle valeur de r la densité de probabilité est maximale il suffit de la dériver,

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{r}{a}\right) \mathrm{e}^{-r/a}\,.$$

La fonction p est toujours positive, nulle en $r = 0$ et en $r \to \infty$, et sa dérivée s'annule effectivement en $r = a$: la densité de probabilité de présence de l'électron est donc maximale en $r = a$. Ainsi, a peut s'interpréter comme le **rayon de l'atome**.

> *On peut également procéder par une intégration angulaire de la fonction $P(r)$ déterminée à la question précédente.*

Exercice 4 : Gravure ionique

1 Les grilles sont séparées de vide. D'après l'équation de Poisson, on a donc $\Delta V = 0$ en tout point, soit

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} = 0 \qquad \text{soit} \qquad V(x) = ax + b\,.$$

Les constantes a et b se déterminent à partir des conditions aux limites.
▷ Comme $V(0) = 0$ et $V(d_0) = V_2 < 0$ alors dans la zone 1 entre $x = 0$ et $x = d_0$,

$$\begin{cases} 0 = a_1 \times 0 + b_1 \\ V_2 = a_1 d_0 + b_1 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} b_1 = 0 \\ a_1 = \dfrac{V_2}{d_0} < 0 \end{cases}$$

▷ De même, dans la zone 2 entre $x = d_0$ et $x = d_0 + d_1$,

$$\begin{cases} V_2 = a_2 d_0 + b_2 \\ V_3 = a_2(d_0 + d_1) + b_2 \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} V_3 - V_2 = a_2 d_1 \\ b_2 = V_2 - a_2 d_0 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} a_2 = \dfrac{V_3 - V_2}{d_1} \\ b_2 = V_2 - (V_3 - V_2)\dfrac{d_0}{d_1} \end{cases}$$

▷ Enfin, comme le champ est nul en dehors des grilles alors le potentiel est constant. Par continuité, on en déduit

$$V(x < 0) = V_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad V(x > d_0 + d_1) = V_3$$

On peut alors le représenter sur la figure 1.

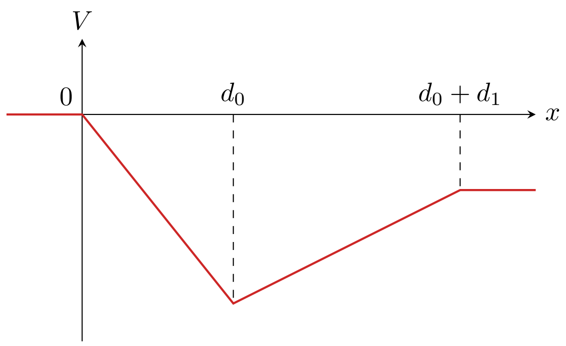

Figure 1 – Potentiel électrique dans le dispositif de contrôle du courant ionique.

2 L'ion n'est soumis qu'à la force de Lorentz électrique, qui dérive de l'énergie potentielle $E_\mathrm{p} = eV(x)$. Son énergie mécanique est donc constante, et comme l'ion part sans vitesse de la grille de potentiel nul on en déduit

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mv^2 + eV \underbrace{=}_{\mathrm{CI}} 0$$

On en déduit qu'en tout x la vitesse s'écrit

$$\boxed{v(x) = \sqrt{-\frac{2eV(x)}{m}}\,.}$$

Comme le potentiel augmente en valeur absolue entre les grilles 1 et 2 alors l'ion accélère, puis il ralentit entre les grilles 2 et 3 où le potentiel diminue en valeur absolue.

3 En sortie du dispositif, le potentiel est uniforme et

$$\boxed{v_\mathrm{s} = \sqrt{-\frac{2eV_3}{m}}\,.}$$

La vitesse de sortie est donc contrôlée **uniquement par la grille 3**.

4 La situation est unidimensionnelle, donc le vecteur densité de courant $\vec{j}$ ne dépend que de x. Comme de plus le régime permanent alors l'équation de conservation de la charge se simplifie en

$$\frac{\mathrm{d}j_x}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad \text{soit} \qquad j_x = J_0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\vec{j} = J_0\,\vec{u}_x}\,.$$

5 D'après l'équation de Poisson

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} = 0\,.$$

Or la densité de courant et la densité de charge sont reliées par $J_0 = \rho(x)v(x)$, d'où

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} + \frac{J_0}{\varepsilon_0\,v(x)} = 0\,.$$

Enfin, la conservation de l'énergie mécanique d'un ion donne

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} + \frac{J_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{-2eV}} = 0\,.}$$

6 Imposer $V = V_2$ en $x = d$ permet de fixer J_0. En effet,

$$\frac{4}{3}(-V_2)^{3/4} = -2\sqrt{\frac{J_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/4} d \qquad \text{d'où} \qquad \frac{4}{3}(-V_2)^{3/2} = 4\frac{J_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}^{1/2} d^2$$

et donc

$$J_0 = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon_0}{d^2}\left(\frac{2e}{m}\right)^{1/2}(-V_2)^{3/2}$$

La densité de courant J_0 est donc uniquement fixée par la grille 2. Or on a montré précédemment que la vitesse des cations n'était fixée que par le potentiel V_3, grâce à la conservation de son énergie mécanique : modifier le potentiel V_2 ne modifie donc pas la vitesse de sortie.

Annales de concours

Exercice 5 : Charge en surface d'une cellule [oral banque PT]

1 Comme le champ est statique,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\,\vec{u}_x\,,$$

d'où

$$\vec{E}(x) = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } x \leq 0 \\ +\dfrac{V_0}{a}\,\mathrm{e}^{-x/a}\vec{u}_x & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

2 D'après l'équation de Maxwell-Gauss,

$$\rho = \varepsilon_0\,\mathrm{div}\,\vec{E} = \varepsilon_0\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}$$

d'où

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq 0 \\ -\dfrac{\varepsilon_0 V_0}{a^2}\,\mathrm{e}^{-x/a} & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

3 D'après la relation de passage donnée et les expressions des champs,

$$\boxed{\sigma = \frac{\varepsilon_0 V_0}{a}\,.}$$

4 Je suppose que l'examinateur souhaite un calcul où le cylindre se trouve de part et d'autre de la membrane. On raisonne donc sur un cylindre de section S et situé entre $x' < 0$ et $x > 0$. La charge contenue dans ce cylindre vaut

$$Q = \int_{x'}^{x} \rho(x)\, S\,\mathrm{d}x + \sigma S = -\frac{\varepsilon_0 V_0 S}{a^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-x/a}\mathrm{d}x + \sigma S$$

Le calcul de l'intégrale donne

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-x/a}\mathrm{d}x = \left[-a\,\mathrm{e}^{-x/a}\right]_0^x = a\left(1-\mathrm{e}^{-x/a}\right)\,.$$

On en déduit

$$Q = -\frac{\varepsilon_0 V_0 S}{a}\left(1-\mathrm{e}^{-x/a}\right) + \frac{\varepsilon_0 V_0}{a} S \qquad \boxed{Q = \frac{\varepsilon_0 V_0 S}{a}\,\mathrm{e}^{-x/a}}$$

Ce résultat signifie que l'effet de la charge surfacique portée par la membrane de la cellule s'atténue exponentiellement avec une longueur caractéristique a. Cette atténuation est due à la présence des ions dans l'électrolyte, qui viennent se grouper par charge opposée autour de la membrane et finissent par masquer cette charge à suffisamment grande distance.

Exercice 6 : Plaques épaisses chargées [oral banque PT]

1 La charge totale contenue dans un cylindre d'axe Ox et de section S englobant toute la hauteur de la distribution vaut

$$e\rho S + 2e\rho' S \underbrace{=}_{\text{neutralité}} 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\rho' = -\frac{\rho}{2}\,.}$$

2 La distribution étant invariante dans les directions y et z, $\overrightarrow{E}$ ne dépend que de x. De plus, la distribution étant infinie, tout plan contenant le vecteur $\overrightarrow{e}_x$ est plan de symétrie de la distribution. On en déduit

$$\boxed{\overrightarrow{E} = E_x(x)\,\overrightarrow{e}_x\,.}$$

D'après l'équation de Maxwell-Gauss,

$$\operatorname{div}\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}x} = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}\,.$$

Ainsi, pour $-e \leq x \leq 0$

$$E_x(x) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0} + A\,.$$

Par continuité en $x = -e$,

$$E_x(-e) \underbrace{=}_{\text{CL}} 0 \underbrace{=}_{\text{sol}} -\frac{\rho e}{\varepsilon_0} + A$$

d'où on déduit

$$\boxed{E_x(-e < x < 0) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}(e-x)\,.}$$

De même, pour $0 \leq x \leq 2e$ on a

$$E_x(x) = \frac{\rho' x}{\varepsilon_0} + A' = -\frac{\rho x}{2\varepsilon_0} + A'\,.$$

Par continuité en $x = 2e$,

$$E_x(2e) \underbrace{=}_{\text{CL}} 0 \underbrace{=}_{\text{sol}} -\frac{\rho e}{\varepsilon_0} + A'$$

d'où on déduit

$$\boxed{E_x(0 < x < 2e) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(x-2e)}$$

On vérifie également que ces deux expressions sont compatibles avec la continuité en $x = 0$.

Tracé figure 2.

3 Par définition,

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -E_x\,.$$

Par intégration des résultats obtenus précédemment, on obtient

$$V(-e < x < 0) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(ex - \frac{x^2}{2}\right) + B$$

et comme $V(x{=}0) = 0$ alors $B = 0$. De même,

$$V(0 < x < 2e) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x^2}{2} - 2ex\right) + B'$$

avec de même $B' = 0$. Enfin, comme le champ est nul alors le potentiel prend une valeur constante en dehors des plaques que l'on détermine par continuité :

$$V(x < -e) = V(x{=}-e) = \frac{3\rho e^2}{2\varepsilon_0}$$
$$V(x > 2e) = V(x{=}2e) = -\frac{\rho e^2}{\varepsilon_0}$$

Finalement,

$$\boxed{V(x) = \begin{cases} \dfrac{3\rho e^2}{2\varepsilon_0} & \text{si } x < -e \\ -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\left(e - \dfrac{x}{2}\right)x & \text{si } -e < x < 0 \\ \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\dfrac{x}{2} - 2e\right)x & \text{si } 0 < x < 2e \\ -\dfrac{\rho e^2}{\varepsilon_0} & \text{si } x > 2e \end{cases}}$$

Tracé figure 2 : le champ électrique, c'est-à-dire la dérivée du potentiel, est partout continu : c'est mathématiquement une fonction de classe $\mathcal{C}^0$. Le potentiel lui-même est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, c'est-à-dire qu'il est continu et ne présente aucun point anguleux (car ces points se traduiraient par des discontinuités de la dérivée). Les deux paraboles atteignent donc leur extremum en $x = -e$ et $x = 2e$ et se raccordent en $x = 0$ avec la même tangente.

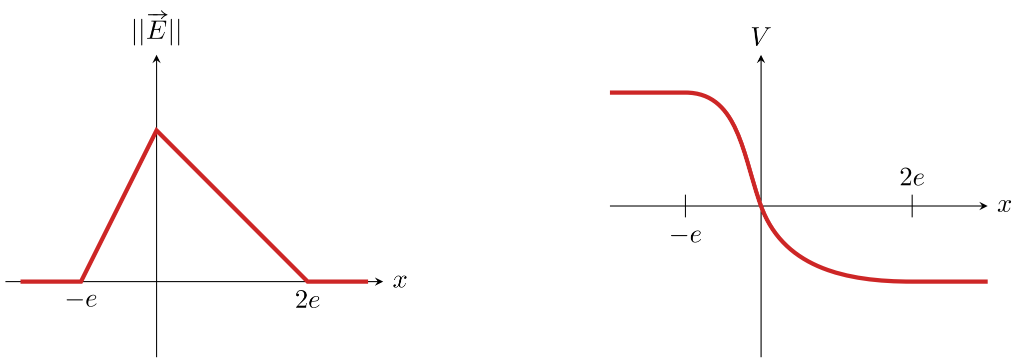

Figure 2 – Champ et potentiel dans le système de deux plaques épaisses.

Exercice 7 : Puissance transportée par un éclair [oral banque PT]

On se place bien sûr en coordonnées sphériques.

1 • **Invariances et symétries :** on se place en un point M quelconque.

▷ la distribution est invariante par toute rotation autour du centre des sphères, donc le champ électrique ne dépend pas des coordonnées angulaires θ et φ ;

▷ tout plan contenant la droite (OM) est un plan de symétrie de la distribution de charges, donc le champ électrique doit se trouver dans chacun de ces plans : il est donc forcément colinéaire à $\overrightarrow{OM}$;

▷ en conclusion,

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\,\vec{e}_r\,.$$

• **Théorème de Gauss :** on choisit comme surface de Gauss une sphère de centre O.

▷ Flux sortant : comme le champ est uniforme sur la sphère,

$$\oiint_{\mathrm{SG}} E_r(r)\,\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}S\,\vec{e}_r = 4\pi r^2\,E_r(r)\,.$$

▷ Charge intérieure :
→ si $r < R$ alors $Q_{\mathrm{int}} = 0$;
→ si $R < r < R + h$ alors $Q_{\mathrm{int}} = -Q$;
→ si $r > R + h$ alors $Q_{\mathrm{int}} = 0$.

▷ Conclusion :

$$\boxed{\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < R \\ -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,r^2}\,\vec{e}_r & \text{si } R < r < R + h \\ \vec{0} & \text{si } r > R + h \end{cases}}$$

> *On peut en fait aller beaucoup plus vite : comme la distribution est à symétrie sphérique, alors le champ électrique qu'elle créé à une distance r du centre est identique à celui d'une charge ponctuelle égale à la charge intérieure à une sphère de rayon r qui serait placée au centre de la distribution. Il s'agit d'un résultat à connaître d'après le programme : vous pouvez donc l'utiliser tel quel, mais je vous recommande malgré tout d'être près dans un oral à ce que l'examinateur vous interroge sur le théorème de Gauss dans la foulée.*

2 Calculons la circulation du champ électrique le long d'une ligne de champ ($\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r$) partant de la surface de la Terre ($r = R$, $V = 0$) et allant jusqu'à l'ionosphère ($r = R + h$, V inconnu),

$$\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}r\,\vec{e}_r = V(R) - V(R+h) \qquad \text{soit} \qquad -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^{R+h} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -V$$

ce qui donne

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{R+h} + \frac{1}{R}\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{h}{R(R+h)}}\,.$$

> *Attention, comme on utilise l'expression de $\vec{E}$ entre les deux sphères alors l'expression de V que l'on obtient n'est valable que dans ce domaine.*
>
> *Une méthode alternative consiste à projeter et intégrer la définition du potentiel : le gradient s'écrit simplement car la situation est à symétrie sphérique. Ainsi,*
>
> $$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V \qquad \textit{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -E_r \qquad \textit{d'où} \qquad V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,r} + \textit{cte}\,.$$

3 Par définition,

$$C = \frac{Q}{V - 0} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{C = 4\pi\varepsilon_0\,\frac{R(R+h)}{h}}\,.$$

4 Comme $h \ll R$, on peut faire l'approximation $R + h \simeq R$, donc

$$\boxed{C = \varepsilon_0\,\frac{4\pi R^2}{h} = 7{,}6 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{F}\,.}$$

On reconnaît l'expression de la capacité d'un condensateur plan d'épaisseur h dont les armatures ont une surface $4\pi R^2$: comme la distance inter-armatures est très faible, elles sont localement vues comme des plans.

5 Sans plus de précision, on ne peut que supposer que l'éclair permet de décharger localement le condensateur formé par l'ionosphère et la Terre. La charge transférée vaut

$$Q = I\,\Delta t = 7{,}5 \cdot 10^2\,\mathrm{C}\,,$$

ce qui signifie que la valeur initiale du potentiel V de l'ionosphère était de

$$V = \frac{Q}{C} \sim 1 \cdot 10^7\,\mathrm{V}\,.$$

Le puissance moyenne au cours de l'éclair vaut donc

$$\boxed{\mathcal{P} \sim V\,I = 3 \cdot 10^{11}\,\mathrm{W}\,.}$$

> *Le candidat indique dans son retour d'oral qu'il n'est plus certain de la dernière question ... et je ne suis pas non plus certain de ma reconstitution : un éclair n'a pas lieu entre l'ionosphère et le sol, mais entre le bas du nuage d'orage et le sol. En première approximation, on peut considérer que le nuage se trouve à quelques kilomètres du sol, disons 6 km pour pouvoir facilement comparer : h serait divisé par 10, donc C multiplié par 10, donc V divisé par 10. La puissance serait donc plutôt de l'ordre de $3 \cdot 10^{10}$ W ... ce qui correspond davantage à l'ordre de grandeur que l'on peut trouver sur des sites dédiés aux orages.*

Exercice 8 : Floculation d'une suspension colloïdale [oral banque PT]

> *L'énoncé est fidèle à celui rapporté par le candidat, j'y ai juste ajouté le document pour préciser le contexte et donner du sens aux calculs.*

1 Le rayon d'un ion est similaire à celui d'un atome, de l'ordre de 10^{-10} m, très inférieur à celui du colloïde.

2 La densité de charge s'écrit

$$\rho(r) = zeN_+(r) - zeN_-(r) = zeN_0\left(\mathrm{e}^{-zeV(r)/k_\mathrm{B}T} - \mathrm{e}^{+zeV(r)/k_\mathrm{B}T}\right)\,.$$

Comme $|zeV(r)| \ll k_\mathrm{B}T$, on peut développer au premier ordre

$$\rho(r) \simeq zeN_0\left(1 - \frac{zeV(r)}{k_\mathrm{B}T} - 1 - \frac{zeV(r)}{k_\mathrm{B}T}\right)$$

soit finalement

$$\boxed{\rho(r) \simeq -\frac{2z^2e^2N_0}{k_\mathrm{B}T}V(r)\,.}$$

3 • **Équation différentielle sur V :** D'après l'équation de Poisson,

$$\Delta V = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} = \frac{2z^2e^2N_0}{\varepsilon_0 k_\mathrm{B}T}V(r)\,.$$

En utilisant l'expression du laplacien fournie,

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(rV) = \frac{2z^2e^2N_0}{\varepsilon_0 k_\mathrm{B}T}V(r)\,,$$

ce que l'on écrit sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(rV) - \frac{2z^2e^2N_0}{\varepsilon_0 k_\mathrm{B}T}\,rV(r) = 0\,.$$

On reconnaît une équation différentielle du second ordre portant sur la fonction $u(r) = rV(r)$, et on introduit une longueur caractéristique

$$\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_\mathrm{B}T}{2z^2e^2N_0}}\,,$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} - \frac{1}{\delta^2}u = 0\,.$$

• **Résolution :** Le polynôme caractéristique associé à cette équation s'écrit

$$r^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad r_\pm = \pm 1/\delta\,.$$

Les solutions de cette équation sont donc de la forme

$$u(r) = A\,\mathrm{e}^{-r/\delta} + B\,\mathrm{e}^{r/\delta}\,,$$

soit

$$V(r) = \frac{A}{r}\,\mathrm{e}^{-r/\delta} + \frac{B}{r}\,\mathrm{e}^{r/\delta}\,.$$

En supposant le potentiel électrostatique nul à l'infini (possible car distribution finie), on en déduit que $B = 0$:

$$\boxed{V(r) = \frac{A}{r}\,\mathrm{e}^{-r/\delta}\,.}$$

4 Le champ électrique s'obtient par dérivation du potentiel,

$$E_r(r) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \qquad \text{soit} \qquad E_r(r) = \frac{A}{r^2}\,\mathrm{e}^{-r/\delta} - \frac{A}{r} \times \frac{-1}{\delta}\,\mathrm{e}^{-r/\delta}$$

ce qui s'écrit finalement

$$\boxed{E_r(r) = \frac{A}{r^2}\left(1 + \frac{r}{\delta}\right)\mathrm{e}^{-r/\delta}\,.}$$

On retrouve bien la forme de l'énoncé.

On raisonne sur une surface de Gauss sphérique de rayon R, identique à celle du colloïde. D'après le théorème de Gauss,

$$\oiint \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \text{soit} \qquad \frac{A}{R^2}\left(1 + \frac{R}{\delta}\right)\mathrm{e}^{-R/\delta} \times 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

d'où on déduit

$$A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(1 + \frac{R}{\delta}\right)\mathrm{e}^{-R/\delta}}$$

5 En l'absence des ions, $N_0 = 0$ donc $\delta \to \infty$. Le champ électrique créé par le colloïde pour $r > R$ équivaut à celui d'une charge ponctuelle, $E_r(r) = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$, qui décroît comme $1/r^2$. L'ajout des sels ioniques renforce nettement cette décroissance à grande distance ($r \gg \delta$) puisque le terme en $1/r^2$ est remplacé par $e^{-r/\delta}/r$. Ainsi, les ions permettent d'écranter le champ créé par le colloïde, et ce faisant de masquer sa présence aux colloïdes environnants, ce qui est favorable à la floculation.