BLAISE PASCAL
PT 2018-2019

TD 15 – Électromagnétisme

Potentiel électrostatique

Flasher ce code pour accéder aux corrigés

Exercices

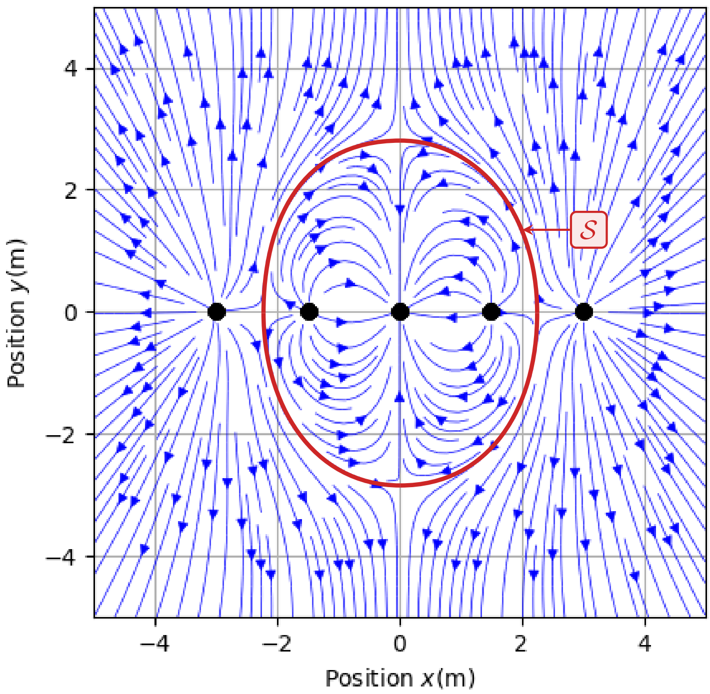
Exercice 1 : Potentiel créé par une sphère uniformément chargée [♦◊◊]

Une sphère de rayon R contenant une charge q répartie uniformément dans son volume créé un champ calculable par le théorème de Gauss

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{R^3}\,\vec{e}_r & \text{si } r < R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e}_r & \text{si } r > R \end{cases}$$

Calculer le potentiel associé.

Exercice 2 : Lecture d'une carte de champ [♦◊◊]



On donne ci-contre les lignes de champ électrostatique générées par une distribution de charges ponctuelles. Les charges sont numérotées 1 à 5 de gauche à droite. La surface $\mathcal{S}$ sera discutée dans les questions.

1 - Donner le signe de chacune des charges.

2 - Déterminer les éventuels plans de symétrie et d'anti-symétrie de la distribution de charge. Exprimer les charges q_4 et q_5 en fonction des autres.

3 - On admet que le champ est nul en tout point de la surface $\mathcal{S}$: comment cela se traduit-il sur les lignes de champ ?

4 - En déduire q_3 en fonction des autres charges.

Étienne Thibierge, 5 janvier 2019, www.etienne-thibierge.fr

Exercice 3 : Potentiel de Yukawa [♦♦◊]

Le potentiel électrostatique créé par un atome d'hydrogène supposé à symétrie sphérique peut être décrit par le potentiel de Yukawa,

$$V(r) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{e}^{-r/a}}{r}\,.$$

Cet exercice propose d'interpréter cette forme.

1 - Étudier les cas limites $r \ll a$ et $r \gg a$. Interpréter les résultats.

2 - Déterminer le champ électrostatique associé.

3 - Déterminer la charge $q(r)$ se trouvant à l'intérieur d'une sphère de rayon r.

4 - En déduire la présence d'une charge ponctuelle en O. Que modélise-t-elle ? Calculer la charge totale contenue dans tout l'espace. Interpréter.

Dans une approche quantique de l'atome, l'électron ne peut plus être décrit comme une particule ponctuelle parfaitement localisée en un point M mais par une fonction d'onde, qui traduit la probabilité de le détecter autour de M : on note $P(M)\,\mathrm{d}\tau$ la probabilité de détecter l'électron dans un volume infinitésimal $\mathrm{d}\tau$ centré sur le point M. La densité volumique de probabilité de présence $P(M)$ est reliée à la densité volumique de charge $\rho(M)$ par

$$\rho(M) = -eP(M)\,.$$

5 - Exprimer la densité volumique de charge $\rho(r)$ et en déduire $P(r)$.

6 - En exploitant la question 3, montrer que la probabilité $\mathrm{d}P = p(r)\,\mathrm{d}r$ de trouver l'électron dans une coquille sphérique comprise entre les rayons r et $r + \mathrm{d}r$ s'écrit

$$\mathrm{d}P = \frac{4\pi r^3}{a^2}\,\mathrm{e}^{-r/a}\mathrm{d}r\,.$$

Montrer que $p(r)$ est maximale en $r = a$. Que représente physiquement a ?

Donnée : pour $\vec{E} = E_r(r)\,\vec{u}_r$, $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right)$.

Exercice 4 : Gravure ionique [♦♦◊]

La gravure ionique est un procédé couramment utilisé dans l'industrie micro-électronique. Elle permet de graver la surface d'un substrat en la bombardant d'un faisceau d'ions de densité importante, mais de vitesse modérée, ce qui permet à des réactions chimiques d'avoir lieu uniquement à la surface du matériau. Il est donc nécessaire d'accélérer les ions en nombre important, puis, une fois le courant d'ions créé, de les ralentir afin de contrôler leur action sur le substrat.

Pour contrôler séparément l'intensité du courant ionique et l'énergie cinétique des ions, on utilise un système de trois grilles métalliques portées à des potentiels différents contrôlables indépendamment les uns des autres, représenté figure 1. On suppose les potentiels tels que $V_2 < V_3 < V_1 = 0$ et on admet que le champ électrique est nul sur chaque grille, et qu'il est également nul pour $x < 0$ et pour $x > d_0 + d_1$.

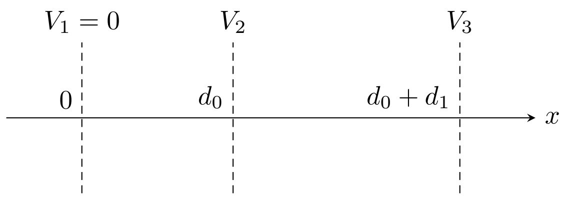


Figure 1 – Dispositif de contrôle du courant ionique.

1 - Déterminer le potentiel $V(x)$ en tout point de l'espace lorsque seules les grilles sont présentes.

Considérons un cation de masse m et de charge e placé sans vitesse à proximité de la grille 1.

2 - Déterminer la vitesse $v(x)$ de l'ion en fonction du potentiel $V(x)$ et montrer qu'il subit une phase d'accélération et une phase de décélération durant le trajet de la grille 1 à la grille 3.

3 - Déterminer sa vitesse en sortie du dispositif. Quelle(s) grille(s) permettent de la contrôler ?

Étienne Thibierge, 5 janvier 2019, www.etienne-thibierge.fr

On considère maintenant que le dispositif est traversé par un flux continu, constitué de nombreux ions (densité volumique $\rho(x)$) émis dans les mêmes conditions que précédemment. Tous ces ions se propagent dans la direction x. La présence de ces ions modifie le potentiel électrique par rapport à la situation où les grilles étaient seules.

4 - Montrer que le vecteur densité de courant s'écrit $\overrightarrow{j} = J_0 \overrightarrow{u_x}$ avec J_0 une constante.

5 - Montrer que le potentiel $V(x)$ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} + \frac{J_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{-2eV}} = 0\,.$$

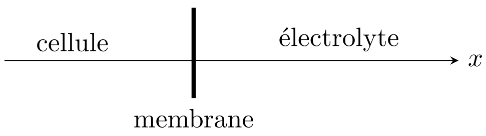
La résolution de cette équation différentielle conduit à

$$(-V)^{3/4} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{J_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/4} x$$

6 - Montrer que jouer sur V_2 permet de contrôler le flux J_0 sans changer la vitesse des cations en sortie du dispositif.

Annales de concours

Exercice 5 : Charge en surface d'une cellule [oral banque PT, ♦◊◊]



On considère une cellule placée dans une solution électrolytique dont elle est séparée par sa membrane. Le potentiel électrique est donné par

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{pour } x \leq 0 \\ -V_0\,\mathrm{e}^{-x/a} & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

1 - Calculer le champ $\overrightarrow{E}$.

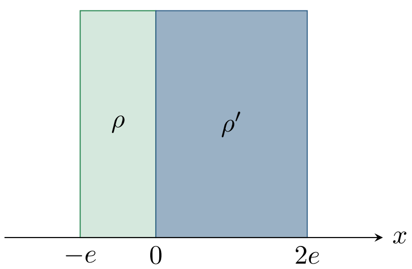
2 - Déterminer la charge volumique ρ.

3 - Calculer la charge surfacique σ de la membrane. On donne la relation de passage,

$$E_x(0^+) - E_x(0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,.$$

4 - Calculer la charge contenue dans un cylindre d'axe (Ox). Commenter.

Exercice 6 : Plaques épaisses chargées [oral banque PT, ♦♦◊]



La distribution de charge ci-contre est supposée infinie dans toutes les directions excepté selon x. Le champ est supposé nul en dehors des plaques. On rappelle qu'il est partout continu, puisque la distribution ne présente pas de charges surfaciques. On donne $V(x{=}0) = 0$.

1 - Déterminer ρ' en fonction de ρ pour assurer la neutralité électrique.

2 - Déterminer $\overrightarrow{E}$ au sein de la distribution. Tracer $||\overrightarrow{E}|| = f(x)$.

3 - Déterminer V en tout point de l'espace. Tracer $V = g(x)$.

Exercice 7 : Puissance transportée par un éclair [oral banque PT, ♦♦◊]

On modélise l'ensemble Terre-ionosphère par un condensateur sphérique. La Terre, de rayon $R = 6{,}4 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$, se comporte comme un conducteur parfait de potentiel nul et porte une charge négative $-Q$ uniformément répartie à sa surface. L'ionosphère est représentée par une surface équipotentielle sphérique de rayon $R + h$ ($h = 60\,\mathrm{km}$) porteuse d'une charge $+Q$. Les propriétés électromagnétiques de l'air sont assimilées à celles du vide.

1 - Exprimer le champ électrique entre les deux sphères.

2 - Calculer le potentiel V de l'ionosphère.

3 - Déterminer la capacité C de ce condensateur.

4 - Simplifier son expression compte tenu des valeurs numériques et commenter le résultat obtenu. Calculer C numériquement.

5 - Un éclair correspond à un courant moyen de $30\,\mathrm{kA}$ pendant $25\,\mathrm{ms}$. Quelle est sa puissance ?

Étienne Thibierge, 5 janvier 2019, www.etienne-thibierge.fr

Exercice 8 : Floculation d'une suspension colloïdale [oral banque PT, ♦♦♦]

On s'intéresse aux mécanismes de traitement des eaux usées, et plus particulièrement à la floculation des particules colloïdales en solution aqueuse.

Document 1 : Phénomène de floculation

Les particules colloïdales sont caractérisées par deux points essentiels : d'une part, leur rayon est très faible (de 10 nm à 1 µm) ; et d'autre part, elles ont la particularité d'être chargées négativement, ce qui engendre des forces de répulsions inter-colloïdales. Ces deux points confèrent aux colloïdes une vitesse de sédimentation extrêmement faible.

La floculation est le processus physico-chimique au cours duquel des particules colloïdales en suspension dans un liquide s'agglomèrent pour former des particules plus grosses, généralement très poreuses, nommées flocs. Les flocs sédimentent généralement beaucoup plus rapidement que les particules primaires dont ils sont formés, ce qui est utilisé dans le traitement des eaux usées.

Adapté de Wikipédia

On souhaite étudier l'effet de l'ajout de sels ioniques à la suspension. On raisonne sur une particule colloïdale sphérique, de centre O, de rayon R et de charge $Q < 0$. Les densités volumiques des ions sont $N_+(r) = N_0 \, \mathrm{e}^{-zeV(r)/k_\mathrm{B}T}$ pour les cations (charge $+ze$, $z = 2$ ou 3 en pratique) et $N_-(r) = N_0 \, \mathrm{e}^{+zeV(r)/k_\mathrm{B}T}$ pour les anions (charge $-ze$), avec N_0 une constante, V le potentiel électrostatique, k_B la constante de Boltzmann et T la température. On suppose $|zeV(r)| \ll k_\mathrm{B}T$.

Donnée : laplacien d'une fonction $V(r)$ à symétrie sphérique

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(rV) \, .$$

1 - Pourquoi peut-on considérer les ions comme ponctuels ?

2 - Déterminer la densité volumique de charge $\rho(r)$ autour du colloïde étudié.

3 - Déterminer une expression du potentiel électrostatique V.

4 - Montrer que le champ électrique est de la forme

$$E(r) = \frac{K}{r^2}\left(1 + \frac{r}{\delta}\right) \mathrm{e}^{-r/\delta} \, .$$

Déterminer K en appliquant le théorème de Gauss à une surface bien choisie.

5 - Décrire l'effet des ions sur le champ électrique entre deux particules colloïdales. Conclure.