



Induction

Exercice 1 : Mesure d'une inductance mutuelle

1 Comme l'oscilloscope est idéal, tout se passe comme si la bobine 2 était en circuit ouvert, le **courant la traversant est donc nul** : $\forall t, i_2(t) = 0$. D'après la loi de comportement, on aurait

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} = 0 \quad \dots \text{ce qui est faux!}$$

La loi de comportement de la bobine n'est pas applicable ici car elle est établie en ne tenant compte *que* de l'auto-induction alors qu'ici **il faut également prendre en compte l'induction mutuelle** entre les deux bobines L_1 et L_2 .

2 En prenant en compte l'induction mutuelle, la loi de comportement devient

$$u_2 = L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = M \frac{di_1}{dt},$$

puis d'après la loi d'Ohm on a simplement

$$u_2 = \frac{M}{R} \frac{du_1}{dt}.$$

3 Traduisons la relation précédente en représentation complexe :

$$\underline{U}_2 = j\omega \frac{M}{R} \underline{U}_1.$$

Comme $U_{1,2} = |\underline{U}_{1,2}|$ alors

$$U_2 = \omega \frac{M}{R} U_1 \quad \text{d'où} \quad M = \frac{R U_2}{2\pi f U_1} = 1,3 \text{ mH}.$$

4 \triangleright Lorsque la bobine 2 est tournée de 180° , elle retrouve exactement la configuration géométrique de départ excepté le sens de branchement des fils, qui est inversé : on mesure alors $u'_2 = -u_2$, et le même calcul que précédemment montre que la valeur de **M est inchangée**.

En toute rigueur, M change de signe, mais le signe d'une inductance mutuelle dépend des orientations des courants, donc de conventions, et n'a donc pas vraiment de pertinence physique.

\triangleright Lorsque la bobine est tournée de 90° , beaucoup moins de lignes du champ magnétique créé par la bobine 1 peuvent traverser la bobine 2, si bien que le flux $\phi_{1 \rightarrow 2}$ est nettement diminué à courant i_1 fixé, ce qui veut dire que **M est plus faible**.

\triangleright Au contraire, si la bobine 2 est placée sur le même axe que la bobine 1 alors davantage de lignes de champ issues de la bobine 1 traversent la bobine 2, donc le flux $\phi_{1 \rightarrow 2}$ est plus élevé à courant i_1 fixé, donc **M est plus grande**.

Exercice 2 : Rails de Laplace tractés

1 D'après la loi de Lenz, on sait que la force de Laplace induite s'oppose à \vec{F}_0 . Cette force s'écrit

$$\vec{F}_L = i(a\vec{e}_y) \wedge (B\vec{e}_z) = iaB\vec{e}_x.$$

Sachant qu'elle doit être dirigée selon $-\vec{e}_x$, on en déduit

$$i < 0.$$

2 • Équation mécanique :

- ▷ Système : tige mobile de masse m ;
- ▷ Référentiel : terrestre \mathcal{R} , supposé galiléen ;
- ▷ Bilan des forces :
 - force de traction $\vec{F}_0 = F_0 \vec{e}_x$;
 - force de Laplace $\vec{F}_L = iaB \vec{e}_x$ (que i soit négatif ne change rien).
- ▷ D'après le théorème de la résultante cinétique,

$$\left. \frac{d\vec{p}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{F}_0 + \vec{F}_L$$

soit en projetant

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_0 + iaB.$$

- **Équation électrique** : voir figure 1.

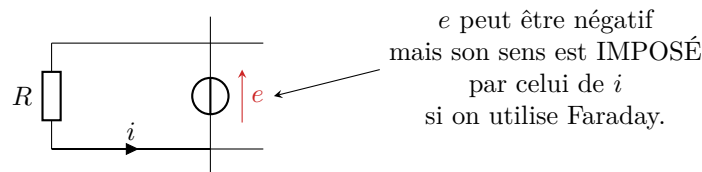


Figure 1 – Schéma électrique équivalent aux rails de Laplace moteur.

- ▷ Calcul de la fém induite :

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot (dS \vec{e}_z) = B \iint dS = Bax \quad \text{d'où} \quad e = -\frac{d\phi}{dt} = -aBv_x$$

- ▷ D'après la loi des mailles,

$$e = Ri \quad \text{soit} \quad \boxed{-aBv_x = Ri}$$

- 3** La méthode est à retenir :

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} v_x = F_0 v_x + iaBv_x & (\text{éq méca} \times v_x) \\ Ri^2 = -aBv_x i & (\text{éq élec} \times i) \end{cases}$$

d'où par somme et réorganisation

$$\underbrace{F_0 v_x}_{\text{MÉCA}} = \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_x^2 \right)}_{\text{méca}} + \underbrace{Ri^2}_{\text{ÉLEC}}$$

La puissance mécanique fournie par l'opérateur permet de mettre en mouvement la tige et le reste est dissipé par effet Joule. En régime permanent ($v_x = \text{cte}$), seul l'effet Joule demeure.

Exercice 3 : Haut-parleur

- 1** Raisonnons sur le tronçon de spire représenté figure 2. L'orientation de i est celle donnée par l'énoncé. La force élémentaire qu'elle subit s'écrit

$$d\vec{F}_L = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i(d\ell \vec{e}_\theta) \wedge (B \vec{e}_r) \quad \text{soit} \quad \boxed{d\vec{F}_L = -iBd\ell \vec{e}_z.}$$

Par intégration sur tout le long de la bobine, on en déduit

$$\vec{F}_L = \int_{\text{bobine}} -iBd\ell \vec{e}_z \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{F}_L = -iB\ell_{\text{bob}} \vec{e}_z,}$$

avec ℓ_{bob} la longueur totale du fil bobiné.

Ce calcul de la force de Laplace est officiellement hors programme ... mais il a été demandé tel quel, sans aucune indication, à l'épreuve A 2018.

- 2**

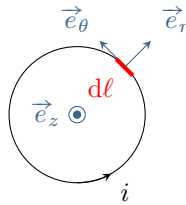


Figure 2 – Une spire du haut-parleur vue de face.

- ▷ Système : équipage mobile ;
- ▷ Référentiel : terrestre \mathcal{R} , supposé galiléen ;
- ▷ Bilan des forces :
 - le poids est nécessairement compensé par une force de réaction car le mouvement est horizontal ;
 - force de Laplace $\vec{F}_L = -iB\ell_{\text{bob}}\vec{e}_z$;
 - force de rappel du ressort $\vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_{\text{sortant}} = -kz\vec{e}_z$;
 - force de frottement linéaire, qui modélise l'émission du son $\vec{F}_f = -\alpha\vec{v}$.
- ▷ D'après le théorème de la résultante cinétique,

$$\left. \frac{d\vec{p}/\mathcal{R}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{F}_L + \vec{F}_r + \vec{F}_f,$$

et en remplaçant et en projetant sur \vec{e}_z ,

$$m \frac{dv_z}{dt} = -iB\ell_{\text{bob}} - kz - \alpha v_z.$$

- 3** La puissance de la force de Laplace s'écrit

$$\mathcal{P}_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = -iB\ell_{\text{bob}}v_z.$$

On en déduit la fém induite,

$$e_{\text{ext}} = -\frac{\mathcal{P}_L}{i} \quad \text{soit} \quad e_{\text{ext}} = B\ell_{\text{bob}}v_z.$$

- 4** Le schéma électrique équivalent est représenté figure 3. D'après la loi des mailles,

$$u + e_{\text{ext}} = Ri + L \frac{di}{dt} \quad \text{soit} \quad u + B\ell_{\text{bob}}v_z = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

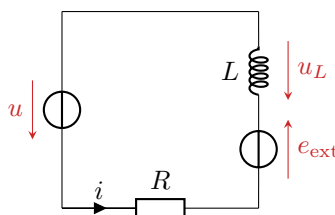


Figure 3 – Schéma électrique équivalent du haut-parleur.

- 5** D'après l'équation électrique,

$$\underline{V}_z = \frac{1}{B\ell_{\text{bob}}} (R + jL\omega) \underline{I} - \frac{1}{B\ell_{\text{bob}}} \underline{U}.$$

On remplace dans l'équation mécanique multipliée par $j\omega$ au préalable,

$$(-m\omega^2 + j\omega\alpha + k) \frac{1}{B\ell_{\text{bob}}} [(R + jL\omega) \underline{I} - \underline{U}] = -j\omega\ell_{\text{bob}}B\underline{I}$$

On regroupe alors les termes

$$(-m\omega^2 + j\omega\alpha + k)\underline{U} = [(m\omega^2 - j\omega\alpha - k)(R + jL\omega) - j\omega(\ell_{\text{bob}}B)^2] \underline{I},$$

ce qui conduit à

$$\underline{Z} = \underbrace{\frac{-j\omega(\ell_{\text{bob}}B)^2}{m\omega^2 - j\omega\alpha - k}}_{=Z_m} + \underbrace{(R + jL\omega)}_{=Z_e}.$$

Exercice 4 : Moteur synchrone

Les notations utilisées dans tout l'exercice sont présentées figure 4.

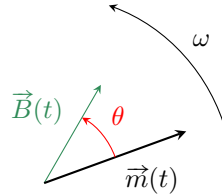


Figure 4 – Notations pour l'étude du moteur synchrone.

1 On peut utiliser deux bobines dont les axes forment un angle de $\pi/2$ et alimentées par des courants déphasés d'autant. Cependant, EDF fournit du courant triphasé, c'est-à-dire trois sorties (les phases) déphasées de $2\pi/3$ les unes par rapport aux autres. La solution technologique la plus simple consiste donc à utiliser trois bobines dont les axes se coupent en un même point et inclinées de $2\pi/3$ les unes par rapport aux autres, comme indiqué sur la figure 5.

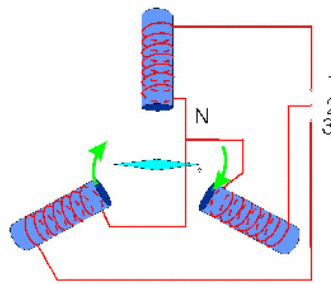


Figure 5 – Champ tournant généré par trois bobines. Chacune des bobines est reliée à une phase de l'alimentation de secteur et au neutre, qui joue le rôle de masse.

2 Appliquons le théorème du moment cinétique au rotor dans le référentiel du stator. Lorsque le moteur tourne à vide, il n'est soumis qu'au couple magnétique $\vec{\mathcal{M}}$. D'après la loi du moment cinétique,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

mais comme on s'intéresse au régime permanent,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{m} \wedge \vec{B} = \vec{0}.$$

On en déduit que \vec{m} et \vec{B} sont colinéaires, c'est-à-dire $\theta = 0$.

3 Toujours en régime permanent, le couple moteur et le moment résistant se compensent vectoriellement,

$$\vec{m} \wedge \vec{B} + \vec{\mathcal{M}}_r = \vec{0}$$

donc en norme

$$mB \sin \theta = \mathcal{M}_r \quad \text{soit} \quad \theta = \arcsin \frac{\mathcal{M}_r}{mB} = 24^\circ.$$

L'angle θ est bien positif, d'une part car il est défini de \vec{m} vers \vec{B} , et d'autre part car le couple résistant a forcément pour effet de retarder le rotor par rapport au champ. De façon générale, lorsque le moteur entraîne une charge,

le moment magnétique suit le champ mais avec un angle interne d'autant plus grand que le couple résistant est important. La puissance fournie par le moteur vaut

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}_r \omega \quad \text{donc} \quad \boxed{\mathcal{P} = mB\omega \sin \theta = 205 \text{ W} .}$$

Cette puissance **provient du générateur électrique qui alimente les bobines** produisant le champ tournant.

4 La question précédente montre que $mB \sin \theta = \mathcal{M}_r$, c'est-à-dire que la charge mécanique entraînée (décrite par le moment \mathcal{M}_r) n'a d'influence que sur l'angle interne θ mais pas sur la vitesse de rotation. C'est d'ailleurs un des avantages de la machine synchrone par rapport à la machine asynchrone. Le couple maximal que peut fournir le moteur est obtenu pour $\sin \theta = 1$, soit

$$\boxed{\mathcal{M}_{\max} = mB = 1,6 \text{ N} \cdot \text{m} .}$$

Au delà, le couple exercé par le champ sur le rotor est trop faible pour le mettre en mouvement.

Exercice 5 : Moteur asynchrone

1 Supposons la spire immobile. Du fait de la rotation du champ tournant, le flux magnétique au travers de la spire varie. Il y a donc un phénomène d'induction, qui génère un courant dans la spire. Ce courant a pour conséquence l'apparition d'un moment magnétique qui tend à s'aligner avec le champ. Comme le champ tourne, la spire tourne également. On peut donner une vision équivalente à partir de la loi de Lenz : l'effet du courant induit est de diminuer les variations de flux magnétique au travers de la spire, et donc de chercher à donner à la spire une orientation constante par rapport au champ \vec{B} . Comme le champ tourne, la spire tourne également.

Les deux vitesses de rotation ne peuvent pas être égales. Si tel était le cas, en se plaçant dans le référentiel de la spire, le champ magnétique serait fixe et de norme constante, et il ne pourrait donc plus y avoir d'induction. La spire ralentirait alors en raison des frottements ... ce qui impliquerait de nouveau un phénomène d'induction.

2 À l'instant t , \vec{n} forme avec \vec{e}_z un angle ωt et \vec{B} un angle $\omega' t$. L'angle θ vaut donc

$$\theta(t) = \omega' t - \omega t = \Omega t .$$

La vitesse de glissement Ω est la vitesse angulaire à laquelle \vec{n} et \vec{B} se décalent l'un par rapport à l'autre.

3 **Circuit électrique équivalent** : voir figure 6. Il n'y a pas de couplage inductif à prendre en compte. Le sens de i et de e doit être le même pour pouvoir appliquer la loi de Faraday.

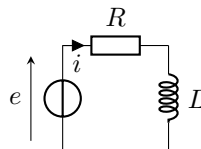


Figure 6 – Schéma électrique équivalent à la machine asynchrone.

Calcul de la f.é.m. induite : Le flux magnétique au travers de la spire à l'instant t est égal à

$$\phi(t) = S\vec{B} \cdot \vec{n} = SB \cos \theta = SB \cos(\Omega t) .$$

On en déduit la f.é.m. induite par le champ extérieur par la loi de Faraday,

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = SB\dot{\theta} \sin \theta \quad \text{soit} \quad e = SB\Omega \sin(\Omega t) .$$

Équation électrique : d'après la loi des mailles,

$$e = Ri + L \frac{di}{dt} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{SB}{L} \Omega \sin(\Omega t) .}$$

4 L'équation différentielle décrit un circuit en forçage harmonique de pulsation Ω . La pulsation du courant dans la bobine en régime permanent est donc Ω .

Passer l'équation différentielle en représentation complexe pose une difficulté à cause du terme de droite. En représentation complexe $\cos \Omega t \mapsto e^{j\Omega t}$, donc

$$\sin \Omega t = \cos \left(\Omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad \mapsto \quad e^{j(\Omega t - \pi/2)} = -j e^{j\Omega t} .$$

Plus astucieux, on peut aussi noter que ce terme de droite s'écrit

$$\frac{\underline{E}_{ind}}{L} = -\frac{j\Omega}{L}\Phi = \frac{j\Omega SB}{L}$$

L'équation différentielle devient

$$j\Omega \underline{I} e^{j\Omega t} + \frac{R}{L} \underline{I} e^{j\Omega t} = -j\Omega \frac{SB}{L} e^{j\Omega t}$$

ce qui donne

$$\frac{jL\Omega + R}{L} \underline{I} = -j\Omega \frac{SB}{L}$$

soit

$$\underline{I} = -\frac{j\Omega SB}{R + jL\Omega} = \frac{-j\Omega SB (R - jL\Omega)}{R^2 + L^2\Omega^2} = -\frac{\Omega SB}{R^2 + L^2\Omega^2} (jR + L\Omega)$$

et enfin

$$\underline{I} e^{j\Omega t} = -\frac{\Omega SB}{R^2 + L^2\Omega^2} (L\Omega - jR) (\cos \Omega t + j \sin \Omega t).$$

On peut alors en déduire $i(t) = \text{Re} [\underline{I} e^{j\Omega t}]$ soit

$$i(t) = -\frac{\Omega SB}{R^2 + L^2\Omega^2} (L\Omega \cos \Omega t - R \sin \Omega t).$$

5 Le moment magnétique de la spire est égal à $\vec{m}(t) = i(t) S \vec{n}(t)$, et le couple magnétique auquel la spire est soumise vaut

$$\vec{\Gamma}(t) = \vec{m}(t) \wedge \vec{B} = \|\vec{m}\| \|\vec{B}\| \sin \theta(t) \vec{e}_x \quad \text{d'où} \quad \vec{\Gamma} = i(t) S B \sin \Omega t \vec{e}_x$$

d'où

$$\Gamma = i(t) S B \sin \Omega t \quad \text{soit} \quad \Gamma = -\frac{\Omega (SB)^2}{R^2 + L^2\Omega^2} (L\Omega \cos \Omega t - R \sin \Omega t) \sin \Omega t.$$

En moyenne, $\langle \sin^2 \Omega t \rangle = 1/2$ et $\langle \sin \Omega t \cos \Omega t \rangle = 0$, d'où

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{R\Omega (SB)^2}{2(R^2 + L^2\Omega^2)}$$

6 Lorsque la vitesse de rotation est nulle, $\omega = 0$ et $\Omega = \omega'$. Le couple moyen exercé sur le rotor est donc non-nul : le moteur asynchrone est donc en mesure de démarrer seul.

7 En régime permanent, le couple moteur moyen $\langle \Gamma \rangle$ doit compenser le couple résistant. Le point de fonctionnement du moteur asynchrone correspond donc à la (aux) vitesse(s) de rotation ω telle(s) que $\langle \Gamma \rangle = \Gamma_r$. Les deux cas sont représentés figure 7 : le(s) point(s) de fonctionnement sont situés aux intersections des courbes. Dans le premier cas, un seul point de fonctionnement est possible, et la charge est entraînée à une vitesse de rotation ω légèrement inférieure à ω' . Dans le second cas, deux points de fonctionnement sont envisageables. Celui à plus basse vitesse de rotation est instable : si le couple résistant augmente par exemple sous l'effet d'une perturbation, alors d'après la loi du moment cinétique la vitesse de rotation du moteur diminue ... mais dans ce cas le couple moteur moyen diminue aussi. Le moteur ne peut donc plus entraîner la charge et décroche. Au contraire, pour le point de fonctionnement à plus haute vitesse de rotation, le couple moteur augmente si ω diminue, ce qui permet de compenser la perturbation.

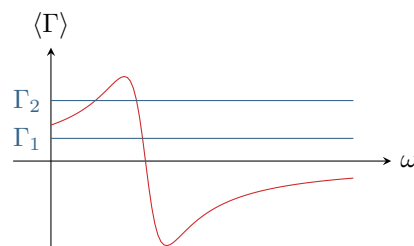


Figure 7 – Points de fonctionnement du moteur asynchrone. Les points de fonctionnement sont les points d'intersection des droites bleues représentant le couple résistant et de la courbe rouge représentant le couple moteur moyen.