



BLAISE PASCAL
PT 2019-2020

Champ électrostatique

Exercices

Exercice 1 : Sphère uniformément chargée

[💡 1 | ✂ 1 | ⊗]

1 La densité de charge étant par hypothèse uniforme,

$$q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{3}{4\pi R^3} q.$$

2 On se place en coordonnées sphériques, voir figure 1, et on cherche la direction du champ en un point M arbitraire.

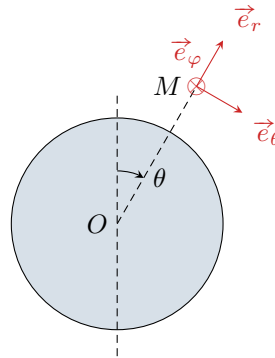


Figure 1 – Sphère uniformément chargée.

- ▷ Le plan de la feuille engendré par les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ est un plan de symétrie de la distribution de charges contenant M . On en déduit que $\vec{E}(M)$ est inclus dans ce plan, et donc que sa composante E_φ est nulle.
- ▷ De même, le plan orthogonal à la feuille engendré par les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_φ est un plan de symétrie de la distribution de charges. On en déduit que $\vec{E}(M)$ est inclus dans ce plan, et donc que sa composante E_θ est nulle.
- ▷ Finalement, la seule composante non nulle est la composante radiale :

$$\vec{E}(M) = E_r(M) \vec{e}_r.$$

N'importe quel plan contenant le point O est plan de symétrie de la distribution de charge. La seule possibilité pour que $\vec{E}(O)$ appartienne simultanément à tous ces plans est d'avoir

$$\vec{E}(O) = \vec{0}.$$

3 Le choix du système de coordonnées et l'étude des symétries a été mené dans les questions précédentes.

• **Invariances** : la distribution de charges est invariante par toute rotation autour du point O , donc $\vec{E}(M)$ ne dépend pas des coordonnées angulaires θ et φ :

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r.$$

• **Théorème de Gauss** : on choisit comme surface de Gauss la sphère de centre O passant par M , et donc de rayon r . Le flux de \vec{E} sortant de cette surface vaut

$$\oiint_{\text{SG}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint (E_r(r) \vec{e}_r) \cdot (dS \vec{e}_r) = E_r(r) \times \pi r^2.$$

La charge intérieure est

$$Q_{\text{int}} = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{r^3}{R^3} q & \text{si } r < R \\ \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = q & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

D'après le théorème de Gauss, on conclut

▷ si $r < R$:

$$4\pi r^2 E_r(r) = \frac{r^3}{R^3} \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{E}(r < R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{R^3} \vec{e}_r.}$$

▷ si $r \geq R$:

$$4\pi r^2 E_r(r) = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{E}(r > R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r.}$$

Le champ obtenu pour $r > R$ est identique à celui créé par une charge ponctuelle q placée au centre de la sphère.

Attention à ne pas oublier la disjonction des cas $r \leq R$.

Exercice 2 : Noyau atomique

[💡 2 | ✂ 2]

1 La charge totale contenue dans le noyau est égale à Ze , c'est-à-dire

$$Ze = \iiint_{\text{noyau}} \rho dV = \iiint_{\text{noyau}} \rho(r) r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$$

On peut alors séparer l'intégrale triple,

$$Ze = \rho_0 \times \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 dr \times \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi}_{=4\pi}$$

⚠️⚠️⚠️ **Attention !** La coordonnée θ des coordonnées sphériques n'est définie que entre 0 et π !!

La valeur 4π se retrouve très rapidement en raisonnant par analogie avec le volume d'une sphère de rayon R ,

$$V = \int_0^R r^2 dr \times \int_0^\pi \sin \theta d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^3}{3} \times 4\pi.$$

Il vient alors

$$Ze = 4\pi \rho_0 \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2} \right]_0^a = 4\pi \rho_0 \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{5} \right) = 4\pi \rho_0 \times \frac{2}{15} a^3$$

et finalement

$$\boxed{\rho_0 = \frac{15}{8\pi} \frac{Ze}{a^3}.}$$

2 On se place en un point M quelconque où l'on calcule le champ électrique, voir figure 2.

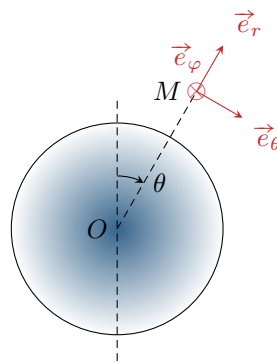


Figure 2 – Noyau modélisé par une distribution volumique de charge.

• **Invariances** : la distribution est invariante par toute rotation autour du point O , donc le champ ne dépend pas des coordonnées angulaires θ et φ .

• **Symétries** :

- ▷ Le plan de la figure 2 engendré par les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ est un plan de symétrie de la distribution de charges contenant M . On en déduit que $\vec{E}(M)$ est inclus dans ce plan, et donc que sa composante E_φ est nulle.
- ▷ De même, le plan orthogonal à la figure engendré par les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_φ est un plan de symétrie de la distribution de charges. On en déduit que $\vec{E}(M)$ est inclus dans ce plan, et donc que sa composante E_θ est nulle.
- On en conclut

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r.$$

- **Théorème de Gauss** : on choisit comme surface de Gauss la sphère de centre O passant par M , et donc de rayon r . Le flux de \vec{E} sortant de cette surface vaut

$$\oiint_{\text{SG}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint (E_r(r) \vec{e}_r) \cdot (dS \vec{e}_r) = E_r(r) \times \pi r^2.$$

La charge intérieure pour $r < a$ s'obtient par un calcul quasiment identique à la question précédente :

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}}(r < a) &= 4\pi\rho_0 \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2} \right) \\ &= \frac{15}{2} Ze \left(\frac{r^3}{3a^3} - \frac{r^5}{5a^5} \right) \end{aligned}$$

Pour $r > a$, on obtient directement

$$Q_{\text{int}}(r > a) = Ze.$$

D'après le théorème de Gauss, on conclut

- ▷ si $r < R$:

$$4\pi r^2 E_r(r) = \frac{15}{2} \frac{Ze}{\varepsilon_0} \left(\frac{r^3}{3a^3} - \frac{r^5}{5a^5} \right) \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{E}(r < a) = \frac{15 Ze}{8\pi\varepsilon_0 a^2} \left(\frac{r}{3a} - \frac{r^3}{5a^3} \right) \vec{e}_r.}$$

- ▷ si $r \geq R$:

$$4\pi r^2 E_r(r) = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{E}(r > a) = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r.}$$

3 Tracé à faire.

- 4** On constate que le champ obtenu pour $r > a$ est identique à celui créé par une charge ponctuelle Ze placée au centre de la sphère. Cela n'est pas surprenant car les deux distributions de charge présentent les mêmes symétries et invariances, et la charge contenue dans une sphère de rayon $r > a$ est dans les deux cas égale à la charge totale du noyau.

Exercice 3 : Deux cylindres concentriques

[💡 2 | ✂️ 2 | ⊗]

- 1** Soit M un point quelconque de l'espace. L'étude est évidemment menée en coordonnées cylindriques, voir figure 3.

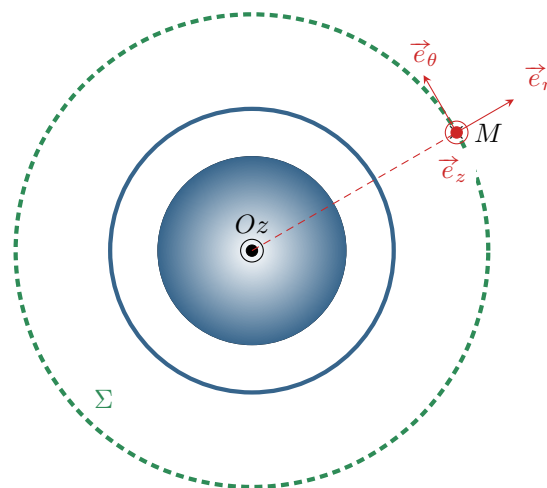


Figure 3 – Distribution de charge à deux cylindres concentriques.

- **Invariances** :

- ▷ La distribution de charges est invariante par toute translation le long de l'axe Oz , donc $\vec{E}(M)$ est indépendant de la coordonnée z ;
- ▷ La distribution de charges est invariante par toute rotation autour de l'axe Oz , donc $\vec{E}(M)$ est indépendant de la coordonnée angulaire θ autour de cet axe.

• **Symétries :**

- ▷ le plan de la figure 3 engendré par les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ est un plan de symétrie de la distribution de charge contenant M , donc $\vec{E}(M)$ est inclus dans ce plan, ce qui impose $E_z = 0$;
- ▷ le plan perpendiculaire à la figure 3 engendré par les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_z est également plan de symétrie de la distribution de charges, donc $E_\theta = 0$.
- ▷ Finalement, il reste

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r.$$

• **Théorème de Gauss :**

- ▷ La surface de Gauss Σ est un cylindre passant par M , donc de rayon r , et fermé par deux surfaces planes orthogonales à \vec{e}_z distantes de h .
- ▷ Le flux de \vec{E} sortant de cette surface vaut

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{haut}} E_r \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_z + \iint_{\text{latérale}} E_r \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r + \iint_{\text{bas}} E_r \vec{e}_r \cdot (-dS \vec{e}_z) = 0 + 2\pi r h E_r(r) + 0.$$

- ▷ La charge intérieure contenue dans cette surface dépend du rayon :
→ si $r < R_1$:

$$Q_{\text{int}} = \iiint \rho(r) r dr d\theta dz = - \int_0^r \alpha r r dr \times 2\pi h = -2\pi\alpha h \frac{r^3}{3}.$$

Dans ce cas, on a d'après le théorème de Gauss

$$\boxed{\vec{E}(r < R_1) = -\frac{\alpha r^2}{3\varepsilon_0} \vec{e}_r}$$

→ si $R_1 < r < R_2$, un calcul identique au précédent donne directement

$$Q_{\text{int}} = -2\pi\alpha h \frac{R_1^3}{3}$$

et d'après le théorème de Gauss,

$$\boxed{\vec{E}(R_1 < r < R_2) = -\frac{\alpha R_1^3}{3\varepsilon_0 r} \vec{e}_r}$$

→ si $r > R_2$ il faut également prendre en compte la charge surfacique portée par le cylindre creux, donc

$$Q_{\text{int}} = -2\pi\alpha h \frac{R_1^3}{3} + 2\pi R_2 h \sigma,$$

et alors d'après le théorème de Gauss

$$\boxed{\vec{E}(r > R_2) = \frac{1}{\varepsilon_0 r} \left(-\frac{\alpha R_1^3}{3} + \sigma R_2 \right) \vec{e}_r}$$

2 • **En $r = R_1$:**

$$E_r(r=R_1^-) = -\frac{\alpha R_1^2}{3\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad E_r(r=R_1^+) = -\frac{\alpha R_1^3}{3\varepsilon_0 R_1} = -\frac{\alpha R_1^2}{3\varepsilon_0}$$

Le **champ électrique est continu** en $r = R_1$.

• **En $r = R_2$:**

$$E_r(r=R_2^-) = -\frac{\alpha R_1^3}{3\varepsilon_0 R_2} \quad \text{et} \quad E_r(r=R_2^+) = \frac{1}{\varepsilon_0 R_2} \left(-\frac{\alpha R_1^3}{3} + \sigma R_2 \right)$$

Ainsi, le **champ électrique est discontinu** en $r = R_2$. La discontinuité vaut

$$E_r(R_2^+) - E_r(R_2^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

ce qui est conforme à la relation de passage au travers d'une interface portant une charge surfacique.

Rappelons que seules les charges surfaciques peuvent provoquer des discontinuités de champ électrique. La composante de \vec{E} tangentielle à la surface est toujours continue, mais la composante normale est discontinue.

3 Voir figure 4.

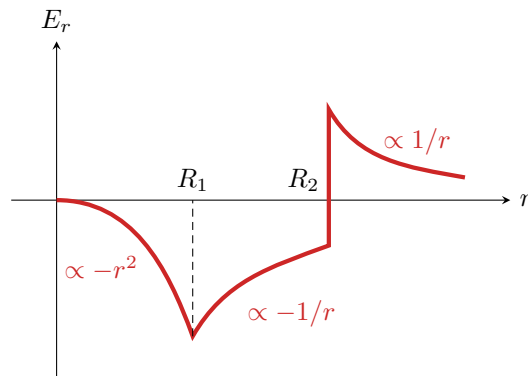


Figure 4 – Champ créé par deux cylindres concentriques. On suppose pour ce tracé que $\sigma R_2 > \alpha R_1^3/3$.

Annales de concours

Exercice 4 : Profil de masse volumique au sein de la Terre [oral banque PT | 💡 3 | ✂ 2]

1 Cette relation est l'analogie gravitationnel du **théorème de Gauss**, avec $\vec{g} \leftrightarrow \vec{E}$, $\mathcal{G} \leftrightarrow -1/4\pi\epsilon_0$ et $M_{\text{int}} \leftrightarrow Q_{\text{int}}$ charge électrique contenue à l'intérieur de la surface de Gauss.

2 Supposons la masse volumique uniforme,

$$M_T = \frac{4}{3}\pi\rho_0 R_T^3$$

Raisonnons une sphère de rayon r . Pour cette sphère,

$$\oiint -g(r)\vec{u}_r \cdot dS\vec{u}_r = -4\pi r^2 g(r)$$

et

$$M_{\text{int}} = \begin{cases} M_T & \text{si } r > R_T \\ \frac{4}{3}\pi\rho_0 r^3 = M_T \frac{r^3}{R_T^3} & \text{si } r \leq R_T \end{cases}$$

Ainsi, d'après le théorème de Gauss gravitationnel,

$$g(r) = \begin{cases} \mathcal{G} \frac{M_T}{r^2} & \text{si } r > R_T \\ \mathcal{G} M_T \frac{r}{R_T^3} & \text{si } r \leq R_T \end{cases}$$

L'allure de $g(r)$ est représentée figure 5.

3 À partir de la question précédente, on trouve

$$g_0 = g(R_T) = \mathcal{G} \frac{M_T}{R_T^2} = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

4 Raisonnons toujours sur une sphère Σ de rayon r . La masse $M_{\text{int}}(r)$ contenue dans cette sphère vaut

$$M_{\text{int}}(r) = \iiint \rho(r') dV = \iiint \rho(r') r'^2 dr' \sin \theta d\theta d\varphi = \int_0^r \rho(r') dr' \times \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi}_{=4\pi}.$$

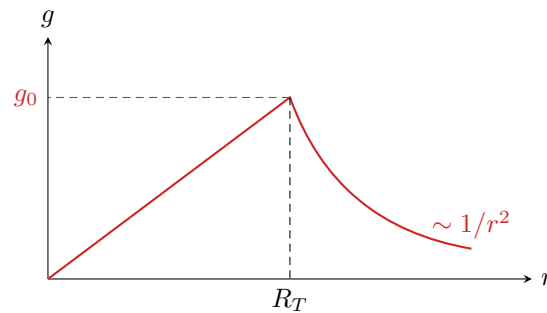


Figure 5 – Champ de pesanteur au sein de la Terre dans le modèle de masse volumique uniforme.

*** **Attention !** La coordonnée θ des coordonnées sphériques n'est définie que entre 0 et π !!

La valeur 4π se retrouve très rapidement en raisonnant par analogie avec le volume d'une sphère de rayon a ,

$$V = \int_0^R r^2 dr \times \int_0^\pi \sin \theta d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^3}{3} \times 4\pi.$$

D'après le théorème de Gauss gravitationnel,

$$-4\pi r^2 g(r) = -4\pi\mathcal{G} \times 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \quad \text{soit} \quad r^2 g(r) = 4\pi\mathcal{G} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'.$$

Pour obtenir $\rho(r)$, on peut alors dériver cette relation par rapport à r ,

$$\frac{d}{dr} (r^2 g(r)) = 4\pi\mathcal{G} r^2 \rho(r) \quad \text{soit} \quad \rho(r) = \frac{1}{4\pi\mathcal{G}} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 g(r)).$$

Rappelons que pour une fonction f quelconque on a

$$\int_0^x f(x') dx' = F(x) - F(0)$$

avec F une primitive de la fonction f . Par dérivation, on trouve bien

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^x f(x') dx' \right) = F'(x) = f(x).$$

Le raisonnement mené ici revient ni plus ni moins à redémontrer l'équation « de Maxwell-Gauss » gravitationnelle dans le cas particulier de la symétrie sphérique,

$$\operatorname{div} \vec{g} = -4\pi\mathcal{G} \rho(r).$$

On peut alors reconstruire la fonction $\rho(r)$ par morceaux.

▷ pour $0 < r < R_N$, $g(r) = Ar$ avec A une constante. Comme

$$g(r=R_N) = AR_N = g_0 \quad \text{alors} \quad A = \frac{g_0}{R_N}.$$

On en déduit

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi\mathcal{G} r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{g_0 r}{R_N} \right) = \frac{1}{4\pi\mathcal{G} r^2} \times \frac{3r^2 g_0}{R_N} \quad \text{soit} \quad \boxed{\rho(0 < r < R_N) = \frac{3g_0}{4\pi\mathcal{G} R_N}}.$$

On peut vérifier la cohérence avec la première question : une masse volumique uniforme correspond à un champ qui évolue linéairement.

▷ pour $R_N < r < R_T$, $g(r) = g_0 = \text{cte}$, donc

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi\mathcal{G} r^2} \frac{d}{dr} (r^2 g_0) = \frac{1}{4\pi\mathcal{G} r^2} \times 2r g_0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\rho(R_N < r < R_T) = \frac{g_0}{2\pi\mathcal{G} r}}.$$

▷ enfin, pour $r > R_T$ le champ $g(r)$ décroît proportionnellement à $1/r^2$ donc $r^2 g(r)$ est constant, ce qui donne une dérivée nulle et

$$\boxed{\rho(r) = 0}$$

... ce qui était un peu évident : il n'y a plus de matière pour $r > R_T$.

Exercice 5 : Champ électrostatique dans une cavité

[oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2 | Ⓜ]

1 Cf. exercice 1 : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$.

2 Cf. exercice 1 : d'après le théorème de Gauss,

$$\begin{cases} \vec{E}(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r & \text{pour } r > R \\ \vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \vec{e}_r & \text{pour } r \leq R \end{cases}$$

3 Par définition,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad \text{soit} \quad E_r = -\frac{dV}{dr}$$

On intègre alors pour trouver $V(r)$ sachant que le potentiel est nul à l'infini, et continu en $r = R$.

▷ Pour $r > R$:

$$V(r > R) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} + A \underset{\text{CL}}{=} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$$

▷ Pour $r < R$:

$$V(r) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + B$$

et par continuité en $r = R$ on a

$$V(R) \underset{\text{sol}}{=} -\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} + B \underset{\text{continuité}}{=} \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} \quad \text{d'où} \quad B = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$$

et finalement

$$V(r < R) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right).$$

4 On peut considérer la cavité creuse comme étant la superposition de la sphère précédente avec une seconde sphère de densité volumique de charge $-\rho$. D'après le principe de superposition, le champ total est la superposition des champs créés par chaque sphère. Ainsi,

▷ pour $r < R'$:

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \vec{e}_r - \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \vec{e}_r = \vec{0}.$$

▷ pour $R' < r < R$:

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \vec{e}_r - \frac{\rho R'^3}{3\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(r - \frac{R'^3}{r^2} \right) \vec{e}_r.$$

▷ pour $r > R$:

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r - \frac{\rho R'^3}{3\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{\rho(R^3 - R'^3)}{3\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r.$$

5 Appliquons de nouveau le principe de superposition, en tenant compte du fait que les centres des sphères ne sont plus confondus :

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \vec{e}_r - \frac{\rho r'}{3\varepsilon_0} \vec{e}'_r$$

avec $r\vec{e}_r = \overrightarrow{OM}$ et $r'\vec{e}'_r = \overrightarrow{O'M}$, soit

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{O'M}) \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \overrightarrow{OO'}}.$$

Le champ est uniforme dans la cavité, d'autant plus grand que les centres sont éloignés.

Exercice 6 : Nuage d'orage

[oral banque PT | 💡 2 | ✂ 3]

L'exercice est d'une difficulté somme toute raisonnable, mais il est surtout beaucoup trop long et trop calculatoire pour un oral.

1 Le phénomène d'influence est la modification de la répartition des charges dans un conducteur sous l'effet d'un champ extérieur : les charges \ominus à la base du nuage attirent les charges \oplus se trouvant dans le sol et repoussent les charges \ominus . Le schéma suppose implicitement qu'elles sont suffisamment loin et elles ne sont pas représentées.

2 Tout plan passant par M et contenant le vecteur \vec{u}_z est plan de symétrie de la distribution de charges, donc plan de symétrie du champ. Le champ est inclus dans l'intersection de tous ces plans de symétrie : il est donc porté par \vec{u}_z .

3 On utilise le théorème de Gauss appliqué à une surface cylindrique de section S , située entre $z = 0$ et z quelconque, sachant que d'après l'énoncé (mesures en ballon sonde) $E(0) = 0$. Ainsi,

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{bas}} \underbrace{\vec{E}(0)}_{=0} \cdot (-dS \vec{e}_z) + \iint_{\text{lat}} \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{S}}_{=0} + \iint_{\text{haut}} \vec{E}(z) \cdot dS \vec{e}_z = SE(z).$$

▷ pour $0 < z < h$: $Q_{\text{int}}(z) = \rho_{\text{sol}}Sz$ donc

$$\vec{E}(0 < z < h) = \frac{\rho_{\text{sol}}z}{\varepsilon_0} \vec{e}_z.$$

▷ pour $h < z < h_1$: $Q_{\text{int}}(z) = \rho_{\text{sol}}Sh$ donc

$$\vec{E}(h < z < h_1) = \frac{\rho_{\text{sol}}h}{\varepsilon_0} \vec{e}_z.$$

▷ Pour $h_1 < z < h_2$, commençons par exprimer la densité volumique de charge à l'intérieur du nuage : elle est de la forme $\rho(z) = Az + B$ avec $\rho(h_1) = -\rho_0$ et $\rho(h_2) = \rho_0$ d'où

$$\rho(z) = \frac{2\rho_0}{H}(z - 2h_0)$$

Ainsi,

$$Q_{\text{int}} = \rho_{\text{sol}}Sh + \int_{h_1}^z \frac{2\rho_0}{H}(z - 2h_0)Sdz = \rho_{\text{sol}}Sh + \frac{2\rho_0S}{H} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h_1^2}{2} - 2h_0(z - h_1) \right).$$

et donc

$$\vec{E}(h_1 < z < h_2) = \left[\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 H} (z^2 - 4h_0z) + \frac{1}{\varepsilon_0} \left[\rho_{\text{sol}}h - \frac{2\rho_0}{H} \left(\frac{h_1^2}{2} - 2h_0h_1 \right) \right] \right] \vec{e}_z.$$

▷ pour $z > h_2$: il suffit de remplacer z par h_2 dans l'expression précédente.

Comme on connaît directement ici la valeur du champ dans le plan $z = 0$, il est tout aussi simple d'intégrer l'équation de Maxwell-Gauss,

$$\frac{dE}{dz} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Il faut dans ce cas penser à justifier la continuité du champ électrique par l'absence de charges surfaciques.

4 Voir figure 6.

5 Au milieu du nuage $z = h_0$. En reprenant la question précédente avec $\rho_{\text{sol}} = \rho_0$,

$$\begin{aligned} E_{\text{max}} &= \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 H} (h_0^2 - 4h_0^2) + \frac{1}{\varepsilon_0} \left[\rho_0 h - \frac{2\rho_0}{H} \left(\frac{h_1^2}{2} - 2h_0h_1 \right) \right] \\ &= -\frac{3\rho_0 h_0^2}{\varepsilon_0 H} + \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(h - \frac{h_1^2}{H} + \frac{4h_0h_1}{H} \right) \\ &= \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 H} (-3h_0^2 + hH - h_1^2 + 4h_0h_1) \end{aligned}$$

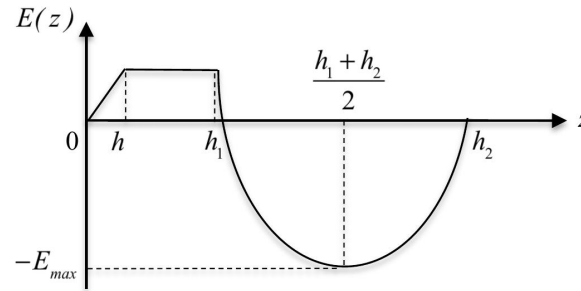


Figure 6 – Évolution du champ électrique dans le nuage.

Or par définition de h et H on a

$$2h_0 - H = 2h_1 \quad \text{soit} \quad h_1 = h_0 - \frac{H}{2}$$

donc en remplaçant h_1 ,

$$E_{\max} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 H} \left(-3h_0^2 + hH - h_0^2 + h_0H + \frac{H^2}{4} + 4h_0^2 - 2h_0H \right) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 H} \left(hH - h_0H + \frac{H^2}{4} \right)$$

ce qui donne en fin de compte

$$E_{\max} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{H}{4} + h - h_0 \right)$$

ATTENTION : calcul à vérifier avant de donner le corrigé, il est surprenant que E_{\max} dépende de la position h_0 du centre du nuage.

6 Le champ au centre du nuage est donné, et il est inférieur au champ disruptif. Ce donc n'est pas comme ça qu'apparaît la foudre. Le champ disruptif est en fait atteint au niveau d'une pointe, comme un arbre, un clocher ou un paratonnerre : c'est là que le champ disruptif est atteint, et l'éclair permet de vider le nuage des charges accumulées.