BLAISE PASCAL
PT 2019-2020

Chapitre 18 – Électromagnétisme

Potentiel électrostatique

Au programme

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 1 « Électrostatique ».

Les notions abordées sont centrées sur les distributions de charges, le champ et le potentiel. Pour le champ électrique et le potentiel, on se limite aux expressions explicites dans le cas de charges ponctuelles et sous forme intégrale dans le cas de distributions continues. Des capacités sur la lecture des lignes de champ et des surfaces équipotentielles sont développées. Le condensateur plan est introduit mais l'étude des conducteurs en équilibre électrostatique ne relève pas du programme. Une approche énergétique est conduite dans un cas simple : une charge ponctuelle placée dans un champ électrique extérieur.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Circulation du champ électrostatique. Notion de potentiel électrostatique.	Relier le champ électrostatique au potentiel. Exprimer le potentiel créé par une distribution discrète de charges. Calculer un champ électrostatique à partir du potentiel, l'expression de l'opérateur gradient étant fournie dans le cas des coordonnées sphériques et cylindriques. Calculer une différence de potentiel par circulation du champ électrostatique dans les cas simples.
Étude du condensateur plan comme la superposition de deux distributions surfaciques, de charges opposées.	Établir l'expression de la capacité d'un condensateur plan dans le vide.
Lignes de champ, tubes de champ, surfaces équipotentielles.	Orienter les lignes de champ du champ électrostatique créé par une distribution de charges. Représenter les surfaces équipotentielles connaissant les lignes de champ et inversement. Associer les variations de l'intensité du champ électrostatique à la position relative des lignes de champ. Vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution. **Approche numérique :** représenter des cartes de lignes de champ et d'équipotentielles.
Énergie potentielle électrostatique d'une charge placée dans un champ électrostatique extérieur.	Établir et exploiter l'expression de l'énergie potentielle d'une charge ponctuelle placée dans un champ électrostatique extérieur.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 3 « Équations de Maxwell ».

Les équations locales des champs statiques sont introduites comme des cas particuliers des équations de Maxwell. Les lois locales de l'électrostatique relatives au potentiel constituent un support pertinent pour procéder à une approche numérique de la résolution d'une équation différentielle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Équations de Maxwell : formulation locale et intégrale.	Écrire et interpréter les équations de Maxwell sous forme intégrale.
Cas des champs statiques : équations locales.	Établir les lois locales des champs statiques à partir des équations de Maxwell.
Équation de Poisson et de Laplace de l'électrostatique.	Établir les équations de Poisson et de Laplace de l'électrostatique. **Approche numérique :** mettre en œuvre une méthode de résolution numérique pour déterminer une solution à l'équation de Laplace, les conditions aux limites étant données.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Au concours

▷ Écrit : tous les ans à l'épreuve A, le condensateur étant un grand classique.
▷ Oral : souvent.

Plan du cours

I - Une autre formulation de l'électrostatique

I.1 - Définition du potentiel électrostatique

I.2 - Interprétation énergétique

I.3 - Équation de Poisson

I.4 - Calculer le potentiel à partir du champ

Exercice C1 : Potentiel créé par une charge ponctuelle

Rappeler le champ électrique créé par une charge ponctuelle située en O (origine du repère). En déduire le potentiel dont dérive ce champ en supposant qu'il est nul à l'infini.

Exercice C2 : Potentiel créé par un cylindre uniformément chargé

Considérons un cylindre de rayon R et de hauteur infinie, uniformément chargé en volume avec la densité ρ_0. Le champ créé peut se déterminer à partir du théorème de Gauss : nous l'avons fait au chapitre précédent. En coordonnées cylindriques d'axe (Oz) confondu avec l'axe du cylindre, il s'écrit

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}\vec{e}_r & \text{si } r < R \\ \dfrac{\rho_0 R^2}{2r\varepsilon_0}\vec{e}_r & \text{si } r > R \end{cases}$$

Calculer le potentiel dont dérive ce champ en supposant qu'il est nul en $r = R$

II - Lignes de champ et surfaces équipotentielles

Une **ligne de champ** est une courbe en tout point tangente au champ électrostatique, orientée dans le sens du champ. Une **surface équipotentielle** ou **isopotentielle** est une surface sur laquelle le potentiel électrostatique a la même valeur en tout point.

II.1 - Direction du champ et sens de variation de potentiel

Les lignes de champ électrostatiques sont orthogonales aux équipotentielles.

Il s'agit d'une conséquence d'une propriété mathématique générale concernant le gradient : le gradient d'une fonction est orthogonal aux surfaces où cette fonction est constante.

Complément : démonstration « physique »

Soit M un point appartenant à une surface équipotentielle, et M' un point infiniment voisin se trouvant sur la ***même*** *équipotentielle :*

$$V(M') - V(M) = 0\,.$$

Par ailleurs, les deux points étant infiniment proches on peut approximer leur différence de potentiel par une différentielle, et exprimer celle-ci à partir du gradient :

$$V(M') - V(M) = dV = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V \cdot \overrightarrow{MM'}$$

Enfin, en combinant ces deux résultats avec la définition du potentiel électrostatique on obtient

$$\vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{MM'} = 0$$

ce qui montre que $\vec{E}(M)$ est orthogonal à $\overrightarrow{MM'}$. Le point M' étant quelconque, ce résultat est vrai pour tout point M' infiniment proche de M sur son équipotentielle, autrement dit pour tout vecteur $\overrightarrow{MM'}$ tangent à l'équipotentielle passant par M.

On en déduit que le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est orthogonal à l'équipotentielle passant par M, et donc que la ligne de champ associée l'est aussi.

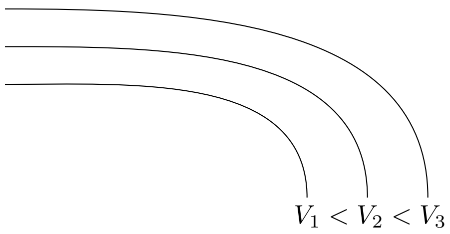
L'orthogonalité indique la *direction* des lignes de champ, mais pas un leur *sens*.

$\rightsquigarrow$ sens du gradient d'un champ scalaire :

Espace 1

Comme $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$,

Espace 2



Conséquence : comme les lignes de champ ne peuvent pas « remonter » les potentiels,

Espace 3

$\rightsquigarrow$ où sont situés le début et la fin ?

II.2 - Voisinage des charges électriques

- **Pour le champ**

Exemple d'une charge ponctuelle :

$$\overrightarrow{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\,\overrightarrow{e}_r$$

- $q > 0$
- $q < 0$

Généralisation :

Les lignes de champ électrostatique « partent » des charges positives
et « se terminent » sur les charges négatives.

> ***Remarque :*** *Si les lignes de champ se coupent en un point, deux cas sont possibles :*
> ▷ *si elles sont toutes convergentes ou toutes divergentes alors il y a une charge ponctuelle en ce point ;*
> ▷ *si elles ne sont que sécantes alors le champ électrostatique y est nul.*

- **Pour le potentiel**

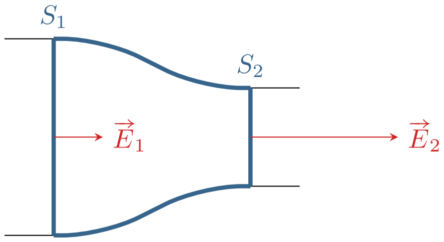
Exemple d'une charge ponctuelle :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r}$$

Les extrema locaux de potentiel se trouvent au niveau des charges électriques :
maximum au niveau d'une charge positive, minimum au niveau d'une charge négative.

II.3 - Intensité du champ

a) À partir des lignes de champ



Raisonnons sur un **tube de champ**, c'est-à-dire une surface délimitée par un ensemble de lignes de champ, tronqué par deux sections droites orthogonales. On le suppose suffisamment fin pour pouvoir approximer que le champ est uniforme sur les deux sections droites. On suppose également se placer dans une zone vide de charge : $\rho = 0$.

Traduction à l'échelle locale :

Espace 4

Conséquence à l'échelle gloable :

Espace 5

Un resserrement des lignes de champ dans une zone vide de charge
traduit un champ électrique plus intense.

Conséquence de la conservation du flux entre l'entrée et la sortie, elle-même conséquence d'un champ de divergence nulle en tout point.

> ***Remarque :*** *nous avons en fait déjà rencontré ce résultat en mécanique des fluides : un resserrement des lignes de courant indique une augmentation de la vitesse d'un écoulement incompressible ... pour lequel* $\operatorname{div} \vec{v} = 0$.

Attention ! Ce résultat n'est plus vrai à l'intérieur d'une distribution de charge où $\rho \neq 0$.

b) À partir des équipotentielles

Par définition le champ est relié aux dérivées du potentiel : il est donc élevé là où le potentiel varie fortement. Dans une image en lignes de niveau, on comprend que ces variations rapides se traduisent graphiquement par des équipotentielles rapprochées.

Un resserrement des équipotentielles traduit un champ électrique plus intense.

III - Modélisation électrostatique d'un condensateur

III.1 - Propriétés d'un conducteur en équilibre électrostatique

III.2 - Modèle du condensateur plan infini

III.3 - Champ électrique

III.4 - Capacité

- **Retour sur l'hypothèse d'armatures infinies**

Un condensateur plan de taille finie est simulé numériquement par une juxtaposition de charges ponctuelles, le champ étant calculé par la loi de Coulomb. La figure de gauche représente les directions du champ vectoriel, la figure de droite est une représentation des lignes de champ et des équipotentielles. Les valeurs ont été normalisées. On constate que les effets de bord ont un effet notable sur le champ à l'intérieur du condensateur sur une distance de l'ordre de l'épaisseur interarmatures.