Potentiel électrostatique

Exercices

Exercice 1 : Potentiel créé par une sphère uniformément chargée [1 | 1 |]

La distribution de charge est de taille finie, on peut donc considérer le potentiel nul à l'infini. Par définition et compte tenu des symétries,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -E_r$$

Ainsi, pour $r > R$,

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \text{donc} \qquad V(r > R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + A$$

La condition limite s'écrit

$$\lim_{r\to\infty} V(r) \underbrace{=}_{\text{CL}} 0 \underbrace{=}_{\text{sol}} A\,.$$

Pour $r < R$, on a

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3} \qquad \text{donc} \qquad V(r < R) = -\frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{r^2}{R^3} + A'\,.$$

La condition limite est donnée par la continuité du potentiel en $r = R$,

$$V(r = R) \underbrace{=}_{r\leq R} -\frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{R^2}{R^3} + A' \underbrace{=}_{r\geq R} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad \text{d'où} \qquad A' = 3\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

On en déduit finalement

$$\boxed{V(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \dfrac{r^2}{R^2}\right) & \text{si } r < R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & \text{si } r > R \end{cases}}$$

Exercice 2 : Lecture d'une carte de champ [2 | 0]

1 Les lignes de champ électrique divergent des charges positives et convergent vers les charges négatives. On en déduit que toutes les charges sont positives hormis q_3.

2 Le plan orthogonal à la figure contenant l'axe $y = 0$ est un plan de symétrie du champ électrique, c'est donc aussi un plan de symétrie de la distribution de charge ... mais cela n'apporte aucune information sur les charges car elles sont toutes comprises dans ce plan.

On constate que le plan $x = 0$ est plan de symétrie du champ électrique, donc également de la distribution de charges. On en déduit

$$q_5 = q_1 \qquad \text{et} \qquad \boxed{q_4 = q_2\,.}$$

3 Les lignes de champ semblent « éviter » les points où $\mathcal{S}$ croise les plans de symétrie : cela signifie en fait qu'il existe deux lignes de champ « médianes » (l'une colinéaire à $\vec{u}_x$, l'autre colinéaire à $\vec{u}_y$) qui s'y coupent. La seule possibilité pour que $\vec{E}$ soit tangent à deux lignes de champ orthogonales en ces points est qu'il soit nul.

4 Le champ est nul en tout point de $\mathcal{S}$, donc son flux au travers de cette surface est nul, donc d'après le théorème de Gauss la charge intérieure à cette surface est nulle :

$$q_2 + q_3 + q_4 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{q_3 = -2q_2}$$

Exercice 3 : Potentiel de Yukawa

[2 ou 3 | 2 |]

1 Dans la limite $r \ll a$, $\mathrm{e}^{-r/a} \simeq 1$ donc

$$V(r) \simeq \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

On reconnaît le potentiel créé par une charge ponctuelle placée en O : c'est a priori le proton du noyau.

Dans le limite $r \gg a$, $V(r) \longrightarrow 0$: le potentiel est nul à grande distance de l'atome, ce qui est logique car c'est une distribution de charge contenue dans un volume fini.

> *Attention, le potentiel n'est pas toujours nul à l'infini : il ne l'est pas pour les distributions de charge infinies, par exemple un plan ou un cylindre infini.*

2 Par définition,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{u}_r = -\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-\dfrac{1}{a}\,\mathrm{e}^{-r/a} \times r - \mathrm{e}^{-r/a} \times 1}{r^2}\vec{u}_r$$

soit en simplifiant

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(1 + \frac{r}{a}\right)\frac{\mathrm{e}^{-r/a}}{r^2}\vec{u}_r\,.}$$

3 Appliquons le théorème de Gauss à une sphère de rayon r, orientée vers l'extérieur. D'après la question précédente,

$$\oiint_{\text{sphère}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(1 + \frac{r}{a}\right)\frac{\mathrm{e}^{-r/a}}{r^2} \times 4\pi r^2$$

d'où on déduit

$$\boxed{q(r) = q_0\left(1 + \frac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{-r/a}\,.}$$

4 L'expression précédente montre que lorsque le rayon r de la sphère tend vers 0 alors **$q(r)$ tend vers q_0** qui ne peut donc qu'être une charge ponctuelle localisée en O : cette charge modélise bien sûr le **proton** de l'atome.

La charge totale contenue dans l'espace vaut

$$\boxed{Q_{\text{tot}} = \lim_{r\to\infty} q(r) = 0}$$

par croissance comparée de l'exponentielle et de la fonction affine. Cela traduit le fait que l'atome est **globalement neutre**.

5 La relation donnée permet de calculer

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(1 + \frac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{-r/a}\right] = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\left[\frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{-r/a} - \frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{-r/a}\left(1 + \frac{r}{a}\right)\right] = -\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\, ra^2}\,\mathrm{e}^{-r/a}$$

D'après l'équation de Maxwell-Gauss, il vient

$$\rho(r) = \varepsilon_0\,\mathrm{div}\,\vec{E} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\rho(r) = -\frac{q_0}{4\pi\, ra^2}\,\mathrm{e}^{-r/a}\,.}$$

Pour un atome d'hydrogène on a bien sûr $q_0 = +e$, ce qui permet de déduire On en déduit

$$\boxed{P(r) = \frac{1}{4\pi a^2}\frac{\mathrm{e}^{-r/a}}{r}\,.}$$

6 La charge $\mathrm{d}q$ contenue dans la coquille sphérique s'écrit simplement

$$\mathrm{d}q = q(r + \mathrm{d}r) - q(r) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r = -q_0\,\frac{r}{a^2}\,\mathrm{e}^{-r/a}\mathrm{d}r\,.$$

La densité de probabilité de présence associée vaut donc

$$\boxed{p(r) = \frac{r}{a^2}\,\mathrm{e}^{-r/a}\,.}$$

Pour trouver à quelle valeur de r la densité de probabilité est maximale il suffit de la dériver,

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{-r/a}\,.$$

La fonction p est toujours positive, nulle en $r = 0$ et en $r \to \infty$, et sa dérivée s'annule effectivement en $r = a$: la densité de probabilité de présence de l'électron est donc maximale en $r = a$. Ainsi, a peut s'interpréter comme le **rayon de l'atome**.

> *On peut également procéder par une intégration angulaire de la fonction $P(r)$ déterminée à la question précédente.*

Exercice 4 : Gravure ionique [2 | 2]

1 Les grilles sont séparées de vide. D'après l'équation de Poisson, on a donc $\Delta V = 0$ en tout point, soit

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = 0 \qquad \text{soit} \qquad V(x) = ax + b\,.$$

Les constantes a et b se déterminent à partir des conditions aux limites.

▷ Comme $V(0) = 0$ et $V(d_0) = V_2 < 0$ alors dans la zone 1 entre $x = 0$ et $x = d_0$,

$$\begin{cases} 0 = a_1 \times 0 + b_1 \\ V_2 = a_1 d_0 + b_1 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} b_1 = 0 \\ a_1 = \dfrac{V_2}{d_0} < 0 \end{cases}$$

▷ De même, dans la zone 2 entre $x = d_0$ et $x = d_0 + d_1$,

$$\begin{cases} V_2 = a_2 d_0 + b_2 \\ V_3 = a_2(d_0 + d_1) + b_2 \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} V_3 - V_2 = a_2 d_1 \\ b_2 = V_2 - a_2 d_0 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} a_2 = \dfrac{V_3 - V_2}{d_1} \\ b_2 = V_2 - (V_3 - V_2)\dfrac{d_0}{d_1} \end{cases}$$

▷ Enfin, comme le champ est nul en dehors des grilles alors le potentiel est constant. Par continuité, on en déduit

$$V(x < 0) = V_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad V(x > d_0 + d_1) = V_3$$

On peut alors le représenter sur la figure 1.

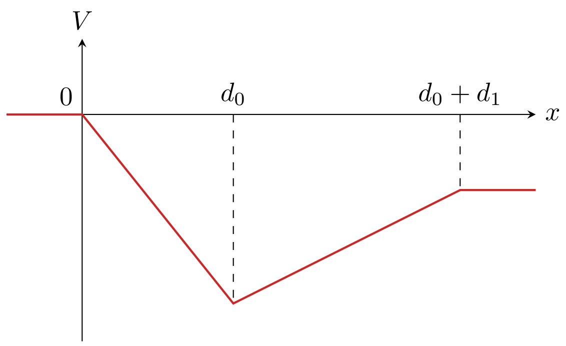

Figure 1 – Potentiel électrique dans le dispositif de contrôle du courant ionique.

2 L'ion n'est soumis qu'à la force de Lorentz électrique, qui dérive de l'énergie potentielle $E_\mathrm{p} = eV(x)$. Son énergie mécanique est donc constante, et comme l'ion part sans vitesse de la grille de potentiel nul on en déduit

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mv^2 + eV \underbrace{=}_{\text{CI}} 0$$

On en déduit qu'en tout x la vitesse s'écrit

$$\boxed{v(x) = \sqrt{-\frac{2eV(x)}{m}}\,.}$$

Comme le potentiel augmente en valeur absolue entre les grilles 1 et 2 alors l'ion accélère, puis il ralentit entre les grilles 2 et 3 où le potentiel diminue en valeur absolue.

3 En sortie du dispositif, le potentiel est uniforme et

$$\boxed{v_\mathrm{s} = \sqrt{-\frac{2eV_3}{m}}\,.}$$

La vitesse de sortie est donc contrôlée **uniquement par la grille 3**.

4 La situation est unidimensionnelle, donc le vecteur densité de courant $\vec{j}$ ne dépend que de x. Comme de plus le régime permanent alors l'équation de conservation de la charge se simplifie en

$$\frac{\mathrm{d}j_x}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad \text{soit} \qquad j_x = J_0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\vec{j} = J_0\,\vec{u}_x}\,.$$

5 D'après l'équation de Poisson

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} = 0\,.$$

Or la densité de courant et la densité de charge sont reliées par $J_0 = \rho(x)v(x)$, d'où

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} + \frac{J_0}{\varepsilon_0\, v(x)} = 0\,.$$

Enfin, la conservation de l'énergie mécanique d'un ion donne

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} + \frac{J_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{-2eV}} = 0\,.}$$

6 Imposer $V = V_2$ en $x = d$ permet de fixer J_0. En effet,

$$\frac{4}{3}(-V_2)^{3/4} = -2\sqrt{\frac{J_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/4} d \qquad \text{d'où} \qquad \frac{4}{3}(-V_2)^{3/2} = 4\frac{J_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}^{1/2} d^2$$

et donc

$$J_0 = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon_0}{d^2}\left(\frac{2e}{m}\right)^{1/2}(-V_2)^{3/2}$$

La densité de courant J_0 est donc uniquement fixée par la grille 2. Or on a montré précédemment que la vitesse des cations n'était fixée que par le potentiel V_3, grâce à la conservation de son énergie mécanique : modifier le potentiel V_2 ne modifie donc pas la vitesse de sortie.

Exercice 5 : Diode à vide

[inspiré oral banque PT | 2 | 2 |]

1 Un problème physique est dit à symétrie cylindrique lorsqu'il est invariant par toute rotation autour de l'axe (Oz).

2 L'espace entre les deux électrodes est vide, donc d'après l'équation de Poisson,

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) = 0\,.$$

Par une première intégration, on trouve

$$r\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = A = \text{cte} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = \frac{A}{r}$$

et une deuxième intégration donne

$$V(r) = A\ln r + B \qquad \text{avec} \qquad A, B = \text{cte}\,.$$

Les constantes se trouvent avec les conditions aux limites,

$$\begin{cases} V(r{=}R_A) \underbrace{=}_{\text{CL}} 0 \underbrace{=}_{\text{calcul}} A\ln R_A + B \\ V(r{=}R_C) \underbrace{=}_{\text{CL}} U_0 \underbrace{=}_{\text{calcul}} A\ln R_C + B \end{cases}$$

Par soustraction, il vient

$$U_0 = A \ln \frac{R_C}{R_A} \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{U_0}{\ln(R_C/R_A)}\,,$$

et on en déduit

$$B = -\frac{U_0}{\ln(R_C/R_A)} \ln R_A$$

Finalement,

$$V(r) = \frac{U_0}{\ln(R_C/R_A)} \ln r - \frac{U_0}{\ln(R_C/R_A)} \ln R_A \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{V(r) = \frac{\ln(r/R_A)}{\ln(R_C/R_A)} U_0\,.}$$

3 Un électron est une particule chargée négativement, qui se déplace donc vers les zones de potentiel le plus élevé : pour que la diode soit passante, il faut que les électrons émis à l'anode migrent vers la cathode, soit $U_0 > 0$. Au contraire, si $U_0 < 0$ les électrons resteront bloqués au voisinage de l'anode et ne rejoindront jamais la cathode.

4 Le système étant par hypothèse à symétrie cylindrique, la vitesse d'un électron ne peut dépendre que de r. Sa vitesse initiale est nulle par hypothèse et il n'est soumis qu'à la force de Lorentz électrique, $\vec{F} = -e\vec{E}$, car son poids est négligeable. Comme V ne dépend que de r alors $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ est porté par $\vec{e}_r$, et une double intégration du PFD appliqué à un électron montre que sa vitesse est nécessairement radiale également.

La force de Lorentz dérive de l'énergie potentielle $E_\text{p} = -eV$. Comme l'électron n'est soumis qu'à cette seule force conservative, son énergie mécanique est une constante du mouvement. En l'exprimant en $r = R_A$, on obtient

$$E_\text{m} = \frac{1}{2} m v(r{=}R_A)^2 - e\,V(r{=}R_A) = 0\,.$$

En l'exprimant en r quelconque,

$$E_\text{m} = \frac{1}{2} m v(r)^2 - e\,V(r) = \frac{1}{2} m v(r)^2 - \frac{\ln(r/R_A)}{\ln(R_C/R_A)} e U_0\,.$$

Par conservation de l'énergie mécanique, on en déduit

$$\frac{1}{2} m v(r)^2 = \frac{\ln(r/R_A)}{\ln(R_C/R_A)} e U_0$$

et ainsi

$$\boxed{v(r) = \sqrt{\frac{2eU_0}{m} \frac{\ln(r/R_A)}{\ln(R_C/R_A)}}\,.}$$

> *On constate que ce résultat n'a pas de sens si $U_0 < 0$, ce qui signifie physiquement que l'électron ne peut pas atteindre la rayon r.*

5 Compte tenu de la symétrie cylindrique, le vecteur densité de courant s'écrit

$$\vec{j} = j(r)\,\vec{e}_r \qquad \text{avec} \qquad j(r) = -n(r)\,e\,v(r)\,.$$

L'intensité (orientée de la cathode vers l'anode, en sens opposé au mouvement des électrons) traversant un cylindre de rayon r est indépendante du rayon (conservation de la charge) et est reliée à j par

$$I = \iint \vec{j} \cdot (-\mathrm{d}S\,\vec{e}_r) = 2\pi r H\, j(r)\,.$$

Ainsi,

$$I = 2\pi r H\, n(r)\, e\, v(r) \qquad \text{soit} \qquad n(r) = \frac{I}{2\pi r H\, e\, v(r)}$$

et ainsi

$$\boxed{n(r) = \frac{I}{2\pi r H\, e} \sqrt{\frac{m}{2eU_0} \frac{\ln(R_C/R_A)}{\ln(r/R_A)}}\,.}$$

Annales de concours

Exercice 6 : Charge en surface d'un semi-conducteur [oral banque PT | 2 | 2 |]

La distribution de charge est schématisée qualitativement sur la figure À FAIRE.

1 Analysons les symétries de la distribution de charge pour déterminer la direction de $\vec{E}(M)$. Comme ρ ne dépend que de x et que σ_0 est uniforme dans le plan (yOz), on en déduit que tout plan passant par M et parallèle à l'axe (Ox) est plan de symétrie de la distribution de charge. Ainsi, $\vec{E}(M)$ est inclus dans l'intersection de tous ces plans, on en déduit qu'il est porté par $\vec{e}_x$:

$$\boxed{\vec{E} = E_0\,\mathrm{e}^{-x/\ell}\vec{e}_x\,.}$$

2 D'après l'équation de Maxwell-Gauss appliquée pour $x < 0$,

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\rho(x<0) = 0\,.}$$

Dans le domaine $x > 0$,

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}x} = -\frac{E_0}{\ell}\,\mathrm{e}^{-x/\ell} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\rho(x>0) = -\frac{\varepsilon_0\,E_0}{\ell}\,\mathrm{e}^{-x/\ell}\,.}$$

3 • **Théorème de Gauss :** Le flux du champ électrique au travers d'une surface de Gauss (surface fermée de normale orientée vers l'extérieur) est égal à la charge contenue à l'intérieur de cette surface divisée par la permittivité diélectrique du vide :

$$\oiint_{\mathrm{SG}} \vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}S} = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}\,.$$

- **Surface de Gauss :** cylindre fermé de rayon R dont les faces planes sont situées en $x_0 < 0$ et $x > 0$.
- **Flux sortant :**

$$\oiint \vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}S} = \iint_{\text{face } x_0} \underbrace{\vec{E}(x_0)}_{=0}\cdot(-\mathrm{d}S\,\vec{e}_x) + \iint_{\text{latérale}} \underbrace{E_x(x)\,\vec{e}_x\cdot(\mathrm{d}S\,\vec{e}_r)}_{\vec{e}_x\,\vec{e}_r=0} + \iint_{\text{face } x} \vec{E}(x)\cdot(\mathrm{d}S\,\vec{e}_x)$$

Ainsi,

$$\oiint \vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}S} = \pi R^2 E_0\,\mathrm{e}^{-x/\ell}\,.$$

- **Charge intérieure :** Comme la surface enjambe le plan $x = 0$,

$$\begin{aligned}
Q_{\mathrm{int}} &= \int_{x_0}^{x} \rho(x)\,\underbrace{\pi R^2\mathrm{d}x}_{=\mathrm{d}\tau} + \sigma_0\,\pi R^2\\
&= -\pi R^2\,\frac{\varepsilon_0 E_0}{\ell}\int_0^x \mathrm{e}^{-x/\ell}\mathrm{d}x + \sigma_0\,\pi R^2\\
&= -\pi R^2\,\frac{\varepsilon_0 E_0}{\ell}\left[-\ell\,\mathrm{e}^{-x/\ell}\right]_0^x + \sigma_0\,\pi R^2\\
Q_{\mathrm{int}} &= \pi R^2 \varepsilon_0 E_0(\mathrm{e}^{-x/\ell} - 1) + \sigma_0 \pi R^2
\end{aligned}$$

- **Conclusion :** d'après le théorème de Gauss, on a pour tout x

$$\pi R^2 E_0\,\mathrm{e}^{-x/\ell} = \pi R^2 E_0(\mathrm{e}^{-x/\ell} - 1) + \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\pi R^2$$

ce qui donne

$$E_0\,\mathrm{e}^{-x/\ell} = E_0\,\mathrm{e}^{-x/\ell} - E_0 + \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

et finalement

$$\boxed{\sigma_0 = \varepsilon_0 E_0\,.}$$

On aurait en fait pu donner ce résultat sans calcul en utilisant la relation de passage ... mais, en PT, elle n'est pas à connaître et doit être rappelée :

$$E_x(x=0^+) - E_x(x=0^-) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \qquad \textit{soit} \qquad E_0 - 0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,.$$

4 Par définition, $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$ ce qui donne en se plaçant dans le semi-conducteur

$$-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = E_0\,\mathrm{e}^{-x/\ell} \qquad \text{d'où} \qquad V(x>0) = +\ell E_0\,\mathrm{e}^{-x/\ell} + \mathrm{cte}\,.$$

D'après la condition limite donnée, la constante est nulle, donc

$$V(x>0) = \ell E_0\,\mathrm{e}^{-x/\ell}$$

et comme le potentiel est partout continu on trouve directement

$$\boxed{V(x=0) = \ell E_0\,.}$$

Dans le domaine $x<0$, le potentiel est constant et partout égal à cette même valeur ℓE_0 par continuité. Cet exemple permet de constater que, même si le champ électrostatique est nul, il n'y a aucune obligation que le potentiel le soit.

Exercice 7 : Plaques épaisses chargées

[oral banque PT | 1 | 2]

1 La charge totale contenue dans un cylindre d'axe Ox et de section S englobant toute la hauteur de la distribution vaut

$$e\rho S + 2e\rho' S \underbrace{=}_{\text{neutralité}} 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\rho' = -\frac{\rho}{2}\,.}$$

2 La distribution étant invariante dans les directions y et z, $\vec{E}$ ne dépend que de x. De plus, la distribution étant infinie, tout plan contenant le vecteur $\vec{e}_x$ est plan de symétrie de la distribution. On en déduit

$$\boxed{\vec{E} = E_x(x)\,\vec{e}_x\,.}$$

D'après l'équation de Maxwell-Gauss,

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}x} = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}\,.$$

Ainsi, pour $-e \leq x \leq 0$

$$E_x(x) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0} + A\,.$$

Par continuité en $x=-e$,

$$E_x(-e) \underbrace{=}_{\text{CL}} 0 \underbrace{=}_{\text{sol}} -\frac{\rho e}{\varepsilon_0} + A$$

d'où on déduit

$$\boxed{E_x(-e<x<0) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}(e-x)\,.}$$

De même, pour $0 \leq x \leq 2e$ on a

$$E_x(x) = \frac{\rho' x}{\varepsilon_0} + A' = -\frac{\rho x}{2\varepsilon_0} + A'\,.$$

Par continuité en $x = 2e$,

$$E_x(2e) \underbrace{=}_{\text{CL}} 0 \underbrace{=}_{\text{sol}} -\frac{\rho e}{\varepsilon_0} + A'$$

d'où on déduit

$$\boxed{E_x(0<x<2e) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(x-2e)}$$

On vérifie également que ces deux expressions sont compatibles avec la continuité en $x=0$.

Tracé figure 2.

3 Par définition,

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -E_x\,.$$

Par intégration des résultats obtenus précédemment, on obtient

$$V(-e < x < 0) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(ex - \frac{x^2}{2}\right) + B$$

et comme $V(x{=}0) = 0$ alors $B = 0$. De même,

$$V(0 < x < 2e) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x^2}{2} - 2ex\right) + B'$$

avec de même $B' = 0$. Enfin, comme le champ est nul alors le potentiel prend une valeur constante en dehors des plaques que l'on détermine par continuité :

$$V(x < -e) = V(x{=}-e) = \frac{3\rho e^2}{2\varepsilon_0}$$
$$V(x > 2e) = V(x{=}2e) = -\frac{\rho e^2}{\varepsilon_0}$$

Finalement,

$$\boxed{V(x) = \begin{cases} \dfrac{3\rho e^2}{2\varepsilon_0} & \text{si } x < -e \\ -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\left(e - \dfrac{x}{2}\right)x & \text{si } -e < x < 0 \\ \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\dfrac{x}{2} - 2e\right)x & \text{si } 0 < x < 2e \\ -\dfrac{\rho e^2}{\varepsilon_0} & \text{si } x > 2e \end{cases}}$$

Tracé figure 2 : le champ électrique, c'est-à-dire la dérivée du potentiel, est partout continu : c'est mathématiquement une fonction de classe $\mathcal{C}^0$. Le potentiel lui-même est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, c'est-à-dire qu'il est continu et ne présente aucun point anguleux (car ces points se traduiraient par des discontinuités de la dérivée). Les deux paraboles atteignent donc leur extremum en $x = -e$ et $x = 2e$ et se raccordent en $x = 0$ avec la même tangente.

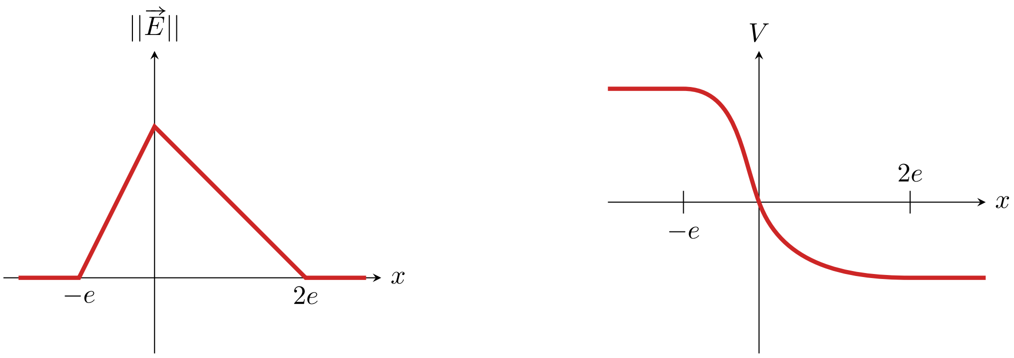

Figure 2 – **Champ et potentiel dans le système de deux plaques épaisses.**

Exercice 8 : Puissance transportée par un éclair [oral banque PT | 2 | 2]

On se place bien sûr en coordonnées sphériques.

1 • **Invariances et symétries :** on se place en un point M quelconque.

▷ la distribution est invariante par toute rotation autour du centre des sphères, donc le champ électrique ne dépend pas des coordonnées angulaires θ et φ ;

▷ tout plan contenant la droite (OM) est un plan de symétrie de la distribution de charges, donc le champ électrique doit se trouver dans chacun de ces plans : il est donc forcément colinéaire à $\overrightarrow{OM}$;

▷ en conclusion,

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\,\vec{e}_r\,.$$

- **Théorème de Gauss :** on choisit comme surface de Gauss une sphère de centre O.

▷ Flux sortant : comme le champ est uniforme sur la sphère,

$$\oiint_{\text{SG}} E_r(r)\,\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}S\,\vec{e}_r = 4\pi r^2\,E_r(r)\,.$$

▷ Charge intérieure :
→ si $r < R$ alors $Q_{\text{int}} = 0$;
→ si $R < r < R+h$ alors $Q_{\text{int}} = -Q$;
→ si $r > R+h$ alors $Q_{\text{int}} = 0$.

▷ Conclusion :

$$\boxed{\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < R \\ -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,r^2}\,\vec{e}_r & \text{si } R < r < R+h \\ \vec{0} & \text{si } r > R+h \end{cases}}$$

> *On peut en fait aller beaucoup plus vite : comme la distribution est à symétrie sphérique, alors le champ électrique qu'elle créé à une distance r du centre est identique à celui d'une charge ponctuelle égale à la charge intérieure à une sphère de rayon r qui serait placée au centre de la distribution. Il s'agit d'un résultat à connaître d'après le programme : vous pouvez donc l'utiliser tel quel, mais je vous recommande malgré tout d'être près dans un oral à ce que l'examinateur vous interroge sur le théorème de Gauss dans la foulée.*

2 Par définition du potentiel électrostatique,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V \qquad \text{soit} \qquad E_r = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,r^2}$$

En séparant les variables,

$$\int_0^V \mathrm{d}V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^{R+h}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}\,,$$

ce qui donne

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{R+h} + \frac{1}{R}\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{h}{R(R+h)}}\,.$$

> *Attention, comme on utilise l'expression de $\vec{E}$ entre les deux sphères alors l'expression de V que l'on obtient n'est valable que dans ce domaine.*

3 Par définition,

$$C = \frac{Q}{V-0} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{C = 4\pi\varepsilon_0\frac{R(R+h)}{h}}\,.$$

4 Comme $h \ll R$, on peut faire l'approximation $R+h \simeq R$, donc

$$\boxed{C = \varepsilon_0\frac{4\pi R^2}{h} = 7{,}6\cdot10^{-5}\,\text{F}\,.}$$

On reconnaît l'expression de la capacité d'un condensateur plan d'épaisseur h dont les armatures ont une surface $4\pi R^2$: comme la distance inter-armatures est très faible, elles sont localement vues comme des plans.

5 Sans plus de précision, on ne peut que supposer que l'éclair permet de décharger localement le condensateur formé par l'ionosphère et la Terre. La charge transférée vaut

$$Q = I\,\Delta t = 7{,}5\cdot10^2\,\text{C}\,,$$

ce qui signifie que la valeur initiale du potentiel V de l'ionosphère était de

$$V = \frac{Q}{C} \sim 1\cdot10^7\,\text{V}\,.$$

Le puissance moyenne au cours de l'éclair vaut donc

$$\boxed{\mathcal{P} \sim V\,I = 3\cdot10^{11}\,\text{W}\,.}$$

> *Le candidat indique dans son retour d'oral qu'il n'est plus certain de la dernière question ... et je ne suis pas non plus certain de ma reconstitution : un éclair n'a pas lieu entre l'ionosphère et le sol, mais entre le bas du nuage d'orage et le sol. En première approximation, on peut considérer que le nuage se trouve à quelques kilomètres du sol, disons 6 km pour pouvoir facilement comparer : h serait divisé par 10, donc C multiplié par 10, donc V divisé par 10. La puissance serait donc plutôt de l'ordre de $3 \cdot 10^{10}$ W ... ce qui correspond davantage à l'ordre de grandeur que l'on peut trouver sur des sites dédiés aux orages.*

Exercice 9 : Floculation d'une suspension colloïdale [oral banque PT | 3 | 3]

> *L'énoncé est fidèle à celui rapporté par le candidat, j'y ai juste ajouté le document pour préciser le contexte et donner du sens aux calculs.*

1 Le rayon d'un ion est similaire à celui d'un atome, de l'ordre de 10^{-10} m, très inférieur à celui du colloïde.

2 La densité de charge s'écrit

$$\rho(r) = zeN_+(r) - zeN_-(r) = zeN_0\left(\mathrm{e}^{-zeV(r)/k_\mathrm{B}T} - \mathrm{e}^{+zeV(r)/k_\mathrm{B}T}\right).$$

Comme $|zeV(r)| \ll k_\mathrm{B}T$, on peut développer au premier ordre

$$\rho(r) \simeq zeN_0\left(1 - \frac{zeV(r)}{k_\mathrm{B}T} - 1 - \frac{zeV(r)}{k_\mathrm{B}T}\right)$$

soit finalement

$$\boxed{\rho(r) \simeq -\frac{2z^2e^2N_0}{k_\mathrm{B}T}V(r)\,.}$$

3 • **Équation différentielle sur V :** D'après l'équation de Poisson,

$$\Delta V = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} = \frac{2z^2e^2N_0}{\varepsilon_0 k_\mathrm{B}T}V(r)\,.$$

En utilisant l'expression du laplacien fournie,

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(rV) = \frac{2z^2e^2N_0}{\varepsilon_0 k_\mathrm{B}T}V(r)\,,$$

ce que l'on écrit sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(rV) - \frac{2z^2e^2N_0}{\varepsilon_0 k_\mathrm{B}T}\,rV(r) = 0\,.$$

On reconnaît une équation différentielle du second ordre portant sur la fonction $u(r) = rV(r)$, et on introduit une longueur caractéristique

$$\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_\mathrm{B}T}{2z^2e^2N_0}}\,,$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} - \frac{1}{\delta^2}u = 0\,.$$

• **Résolution :** Le polynôme caractéristique associé à cette équation s'écrit

$$r^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad r_\pm = \pm 1/\delta\,.$$

Les solutions de cette équation sont donc de la forme

$$u(r) = A\,\mathrm{e}^{-r/\delta} + B\,\mathrm{e}^{r/\delta}\,,$$

soit

$$V(r) = \frac{A}{r}\,\mathrm{e}^{-r/\delta} + \frac{B}{r}\,\mathrm{e}^{r/\delta}\,.$$

En supposant le potentiel électrostatique nul à l'infini (possible car distribution finie), on en déduit que $B = 0$:

$$\boxed{V(r) = \frac{A}{r}\,\mathrm{e}^{-r/\delta}\,.}$$

4 Le champ électrique s'obtient par dérivation du potentiel,

$$E_r(r) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \qquad \text{soit} \qquad E_r(r) = \frac{A}{r^2}\,\mathrm{e}^{-r/\delta} - \frac{A}{r} \times \frac{-1}{\delta}\,\mathrm{e}^{-r/\delta}$$

ce qui s'écrit finalement

$$\boxed{E_r(r) = \frac{A}{r^2}\left(1 + \frac{r}{\delta}\right)\mathrm{e}^{-r/\delta}\,.}$$

On retrouve bien la forme de l'énoncé.

On raisonne sur une surface de Gauss sphérique de rayon R, identique à celle du colloïde. D'après le théorème de Gauss,

$$\oiint \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \text{soit} \qquad \frac{A}{R^2}\left(1 + \frac{R}{\delta}\right)\mathrm{e}^{-R/\delta} \times 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

d'où on déduit

$$A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(1 + \frac{R}{\delta}\right)\mathrm{e}^{-R/\delta}}$$

5 En l'absence des ions, $N_0 = 0$ donc $\delta \to \infty$. Le champ électrique créé par le colloïde pour $r > R$ équivaut à celui d'une charge ponctuelle, $E_r(r) = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$, qui décroît comme $1/r^2$. L'ajout des sels ioniques renforce nettement cette décroissance à grande distance ($r \gg \delta$) puisque le terme en $1/r^2$ est remplacé par $e^{-r/\delta}/r$. Ainsi, les ions permettent d'écranter le champ créé par le colloïde, et ce faisant de masquer sa présence aux colloïdes environnants, ce qui est favorable à la floculation.