Chapitre 19 – Électromagnétisme

Champ magnétostatique

Au programme

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 2 « Magnétostatique ».

L'étude de la magnétostatique menée dans le bloc 2 s'appuie le plus possible sur les différents aspects qualitatifs et quantitatifs vus en première année de PTSI, les étudiants sont donc déjà familiarisés avec le concept de champ magnétostatique. La loi de Biot et Savart n'est pas introduite ; l'utilisation de celle-ci pour calculer un champ magnétostatique est donc exclue. Les distributions de courants surfaciques ne sont pas introduites à ce niveau du programme, elles le sont uniquement à l'occasion de la réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal parfait. On aborde les propriétés intégrales du champ et on utilise le théorème d'Ampère pour des calculs dans des cas présentant un haut degré de symétrie.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Courant électrique. Vecteur densité de courant volumique. Distributions de courant électrique filiformes.	Calculer l'intensité du courant électrique traversant une surface orientée. Justifier la modélisation d'une distribution de courant par une distribution filiforme.
Champ magnétostatique. Principe de superposition.	Citer quelques ordres de grandeur de champs magnétostatiques. Décomposer une distribution en des distributions plus simples dans le but de calculer un champ magnétostatique par superposition.
Symétries et invariances du champ magnétostatique.	Identifier les plans de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de courants. Identifier les invariances d'une distribution de courants. Exploiter les symétries et les invariances d'une distribution de courants pour caractériser le champ magnétostatique créé.
Propriétés de flux et de circulation. Théorème d'Ampère.	Reconnaître les situations pour lesquelles le champ magnétostatique peut être calculé à l'aide du théorème d'Ampère.
Applications au fil rectiligne infini de section non nulle et au solénoide infini.	Justifier le choix d'une modélisation d'une distribution de courants par une distribution infinie. Établir les expressions des champs magnétostatiques créés en tout point de l'espace par un fil rectiligne infini de section non nulle, parcouru par des courants uniformément répartis en volume et par un solénoide infini en admettant que le champ est nul à l'extérieur. Utiliser le théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie.
Lignes de champ, tubes de champ.	Orienter les lignes de champ du champ magnétostatique créé par une distribution de courants. Associer les variations de l'intensité du champ magnétostatique à l'évolution de la position relative des lignes de champ. Vérifier qu'une carte de ligne de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution.

Notions et contenus	Capacités exigibles
	Approche numérique : représenter des cartes de lignes de champ magnétostatique.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 3 « Équations de Maxwell ».

Les équations locales des champs statiques sont introduites comme des cas particuliers des équations de Maxwell. Les lois locales de l'électrostatique relatives au potentiel constituent un support pertinent pour procéder à une approche numérique de la résolution d'une équation différentielle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Équations de Maxwell : formulation locale et intégrale.	Écrire et interpréter les équations de Maxwell sous forme intégrale.
Cas des champs statiques : équations locales.	Établir les lois locales des champs statiques à partir des équations de Maxwell.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Au concours

- ▷ Écrit : épreuve A 2014 et 2015.
- ▷ Oral : de temps en temps.

Plan du cours

I - Ce que vous savez déjà

On appelle **champ magnétostatique** un champ magnétique indépendant du temps.

I.1 - Sources de champ magnétique et lignes de champ

Les sources de champ magnétostatique sont les courants électriques constants et la matière aimantée. Les lignes de champ sont des courbes fermées qui s'enroulent autour des sources, voir figure 1.

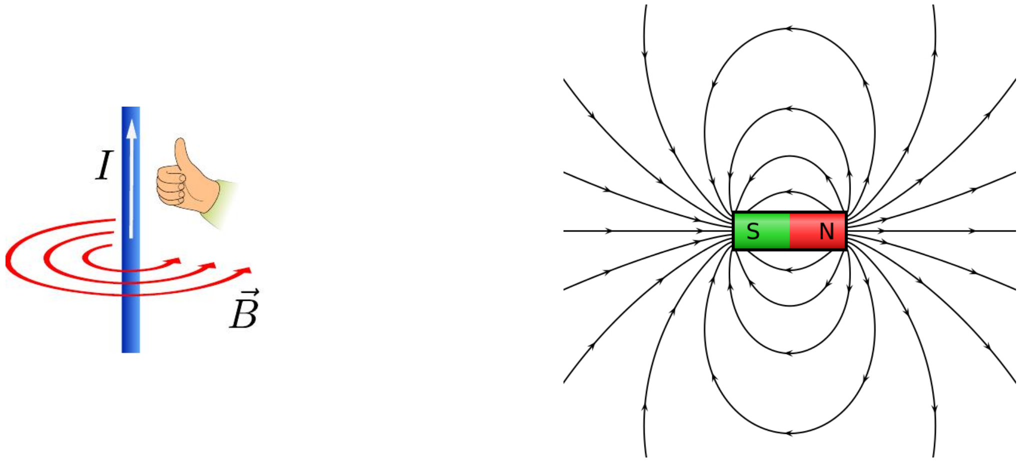


Figure 1 – Lignes de champ magnétique créées par un fil et un aimant droit.

Champ créé par un courant :

Espace 1

Champ créé par un aimant permanent :

Espace 2

Si on connaît la direction du champ magnétique, on peut également retrouver le sens du courant qui le créé par la règle de la main droite, voir figure 2.

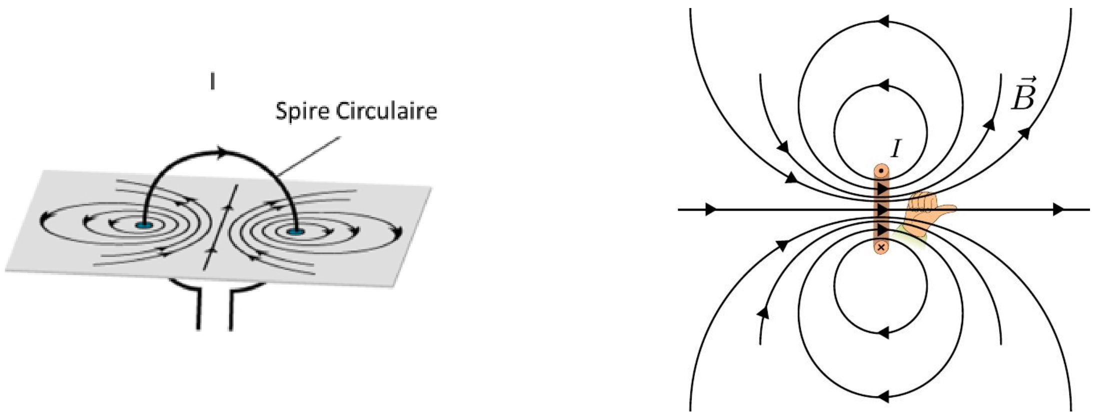


Figure 2 – Lignes de champ magnétique créées par une spire.

L'analogie entre les lignes de champ créé par une spire et un aimant amènent à la notion de **moment magnétique**. Le moment magnétique d'une spire plane de surface S et de normale $\vec{n}$ orientée par la règle de la main droite relative à l'intensité qui la parcourt vaut

$$\boxed{\vec{m} = iS\vec{n}\,.}$$

La donnée du moment magnétique est suffisante pour décrire le champ à grande distance de la spire. Le moment magnétique d'un aimant est par définition égal au moment magnétique d'une spire qui produit les mêmes lignes de champ à grande distance.

Les champs magnétiques s'expriment en Tesla T. Le tableau figure 3 récapitule certains ordres de grandeur.

Un champ magnétique de 1 T est un champ fort.

Exemple	Données	Ordre de grandeur de $\|\vec{B}\|$
Fil parcouru par un courant I	$I = 10\,\mathrm{A}$, on se place à $d = 2\,\mathrm{cm}$ du fil	$\|\vec{B}\| = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi d} \simeq 10^{-4}\,\mathrm{T}$
Bobine parcourue par un courant I, n spires par unité de longueur	$I = 10\,\mathrm{A}$, $n = 10\,\mathrm{mm}^{-1}$, sur l'axe de la bobine	$\|\vec{B}\| = \mu_0 n I \simeq 10^{-1}\,\mathrm{T}$
Aimant permanent au néodyme	à la surface	0,1 à 1 T
Champ magnétique terrestre	à la surface de la Terre	$\simeq 10^{-4}\,\mathrm{T}$
IRM		$\simeq 5\,\mathrm{T}$
Champ magnétique pulsé (électroaimant, production pendant qq ms)		$\simeq 100\,\mathrm{T}$
Étoile à neutron	à la surface	$\simeq 10^{11}\,\mathrm{T}$

Figure 3 – Ordres de grandeur de champs magnétiques.

I.2 - Force de Lorentz magnétique

Une particule test de charge q_0 placée en M et en mouvement à la vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ subit la **force de Lorentz magnétique**

Espace 3

⇝ cette force permet une définition « mécanique » du champ magnétostatique en termes de force par unité de charge, mais elle moins simple à donner que celle du champ électrostatique par la force de Lorentz électrique.

> ***Remarque :*** *elle sous-entend également que le champ magnétique dépend du référentiel dans lequel il est calculé.*

I.3 - Principe de superposition

Comme au chapitre précédent, le principe d'additivité des forces permet de justifier le principe de superposition des champs magnétiques.

Théorème de superposition :

Le champ magnétique créé par la réunion de plusieurs distributions de courants est la somme des champs créés par chacune des distributions prises individuellement.

Ce principe de superposition se retrouve dans la linéarité des équations de Maxwell.

II - Flux magnétique

Le théorème de Green-Ostrogradski nous enseigne que la traduction locale des propriétés (intégrales) de flux implique la divergence du champ vectoriel.

II.1 - Formulation locale : équation de Maxwell-Thomson

Équation de Maxwell-Thomson :

En tout point M de l'espace, $\operatorname{div} \vec{B} = 0$.

⇝ contrairement au champ électrique, la divergence du champ magnétique ne dépend pas des sources de champ.

Cette équation est parfois appelée « équation de Maxwell-flux ». Elle est valable aussi bien en régime stationnaire qu'en régime variable.

> ***Remarque culturelle :*** *En électrostatique, l'équation de Maxwell-Faraday s'écrit* $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$ *et une identité d'analyse vectorielle conduit au potentiel électrostatique* V,
>
> $$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V\,.$$
>
> *Une autre identité d'analyse vectorielle appliquée à l'équation de Maxwell-Thomson permet de montrer que le champ magnétique peut toujours être écrit à partir d'un potentiel vecteur* $\vec{A}$ *tel que*
>
> $$\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\,.$$
>
> *L'existence et plus encore l'utilisation du potentiel vecteur ne sont pas (du tout) au programme de PT.*

II.2 - Formulation intégrale : le champ magnétique est à flux conservatif

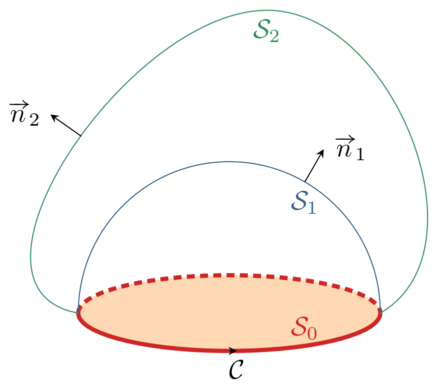
Soit $\mathcal{S}$ une surface fermée orientée vers l'extérieur [1], délimitant un volume $\mathcal{V}$.

Espace 4

Le flux du champ magnétique sortant d'une surface fermée est toujours nul.
Le champ magnétique est dit **à flux conservatif**.

II.3 - Flux magnétique au travers d'une surface s'appuyant sur un contour fermé

On dit qu'une surface $\mathcal{S}$ ouverte **s'appuie sur un contour** fermé $\mathcal{C}$ si $\mathcal{C}$ définit le bord de $\mathcal{S}$.



L'orientation (arbitraire) de $\mathcal{C}$ permet d'orienter de façon univoque les normales aux surfaces par la règle de la main droite.

Considérons deux surfaces $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ s'appuyant sur le même contour fermé $\mathcal{C}$. Montrons que le flux de $\vec{B}$ est le même au travers de ces deux surfaces.

Espace 5

1. Dans un autre contexte, on parlerait de surface de Gauss

Espace 6

Le flux du champ magnétique est identique au travers de toutes les surfaces s'appuyant sur un même contour fermé orienté.

⇝ on peut donc choisir librement (= au plus simple) la surface pour le calculer.

C'est important par exemple en induction.

II.4 - Conséquence pour les lignes de champ

La conservation du flux permet de démontrer la propriété bien connue :

Les lignes de champ sont d'autant plus resserrées que le champ magnétique est fort.

La démonstration est identique à celle menée dans le cours d'électrostatique en s'appuyant sur un tube de champ.

III - Des propriétés des distributions de courant à celles du champ magnétostatique

III.1 - Densité volumique de courant

- **Rappel : définition microscopique de l'intensité**

Considérons un fil conducteur de section (orientée) Σ, voir figure 4. Certains porteurs de charges, appelés **porteurs libres** (dans le cas d'un métal, on parle d'**électrons de conduction**) peuvent avoir un mouvement macroscopique globalement ordonné : le courant électrique.

⇝ intensité i :

Espace 7

C'est une grandeur algébrique, dont le signe dépend du sens conventionnel d'orientation de Σ.

Figure 4 – Définition microscopique et mésoscopique de l'intensité.

- **Définition mésoscopique**

La définition de l'intensité évoque clairement celle d'un flux, comme pouvait l'être le débit massique ou volumique en mécanique des fluides.

Par définition, l'intensité du courant électrique au travers d'une surface Σ est égale au flux du vecteur **densité volumique de courant électrique** au travers de cette surface,

$$i = \iint_\Sigma \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}\,.$$

La densité volumique de courant s'exprime en $\mathrm{A \cdot m^{-2}}$.

- **Lien entre les deux approches**

Pour simplifier, raisonnons sur un système unidimensionnel et supposons que le conducteur ne possède qu'un seul type de porteurs libres, de charge q et de densité volumique n. On raisonne en moyenne : tous les porteurs de charge sont supposés se déplacer à la même vitesse $\vec{v}$, qui est donc une vitesse moyenne mésoscopique appelée **vitesse d'ensemble**.

Espace 8

Dans le cas où il n'y a qu'un seul type de porteurs libres de se déplacer dans le conducteur,

$$\vec{j} = nq\vec{v} = \rho\vec{v}$$

avec q la charge de ces porteurs, n leur densité volumique, et $\vec{v}$ leur vitesse d'ensemble.

- **Cas limite d'une distribution filiforme**

> ***Exemple :*** *fil de diamètre négligeable.*

Dans le cas d'une distribution filiforme, parler de densité volumique de courant n'a plus grand sens car la section tend vers 0 : la seule grandeur pertinente dans ce cas est l'intensité.

Attention ! Deux critères doivent être vérifiés pour que la distribution puisse être considérée filiforme :
▷ le diamètre doit être très inférieur à la longueur totale du fil ;
▷ le diamètre doit être très inférieur à la distance d'observation.

$\rightsquigarrow$ un modèle filiforme peut donner des divergences (non physiques) à courte distance.

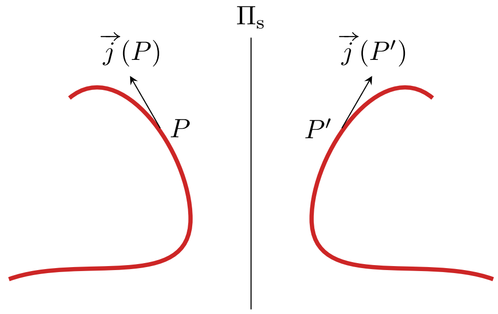
III.2 - Symétries de la distribution de courant, direction du champ magnétostatique

Il existe une loi analogue à la loi de Coulomb qui permet de calculer le champ magnétostatique en tout point par intégration sur la distribution volumique de courants, appelée loi de Biot et Savart (hors programme en PT). Cette loi permet de démontrer toutes les propriétés ci-dessous, que nous nous contenterons de constater par observation de cartes de champ magnétique.

a) Effet d'un plan de symétrie de la distribution de courant

Une distribution de courant possède un **plan de symétrie** Π_s
lorsque les densités de courant en tous points P et P' symétriques par rapport à Π_s
sont symétriques l'une de l'autre,

$$\vec{j}\,(P') = \mathrm{sym}_{\Pi_s} \vec{j}\,(P) \qquad \Longleftrightarrow$$



Observation d'une carte de champ : voir figure 5.

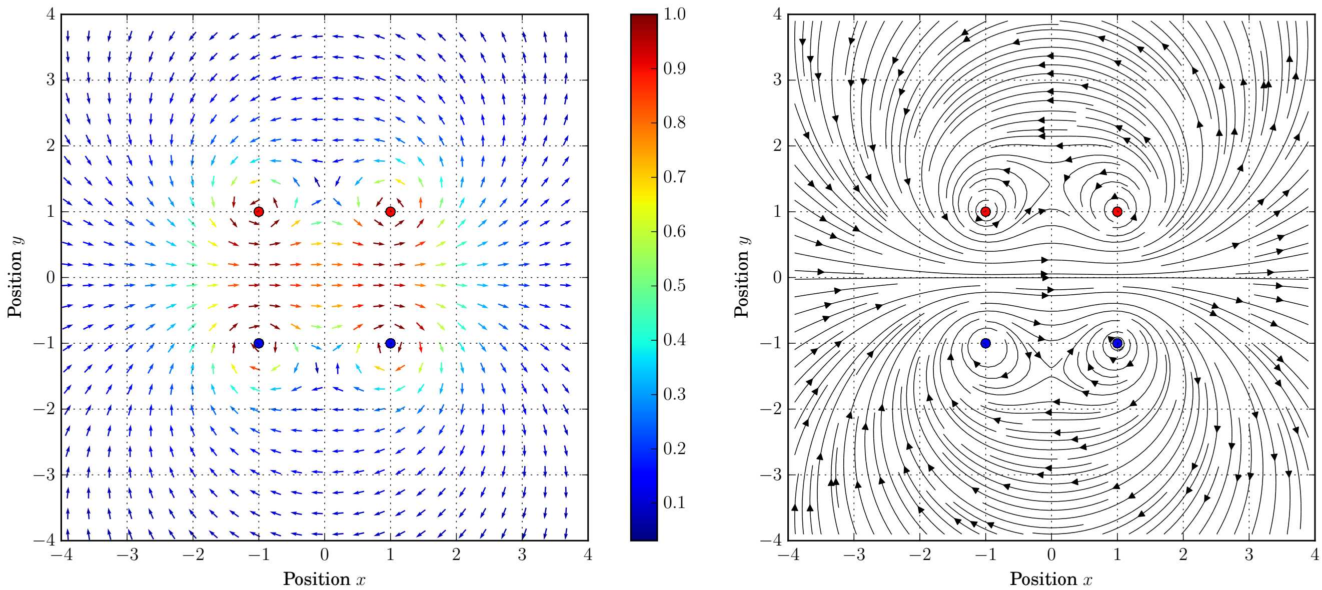


Figure 5 – Champ magnétique créé par une distribution de quatre courants. Les points notent des courants portés par des fils rectilignes orthogonaux à la feuille. Tous ces courants sont égaux. Toutes les valeurs ont été normalisées.

Sens des courants :

Espace 9

Identification d'un plan de symétrie :

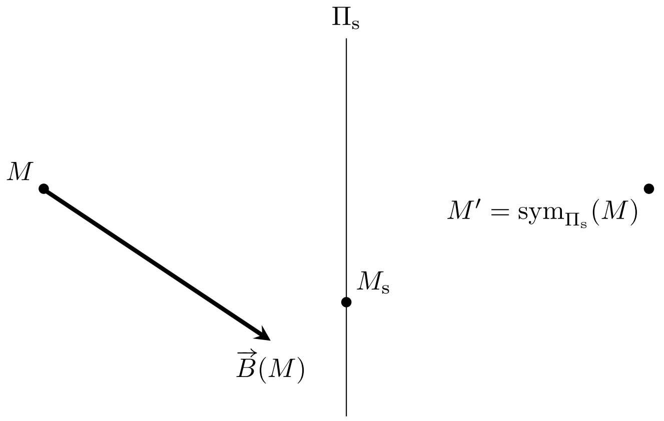
Espace 10

Généralisation : considérons une distribution de courant possédant un plan de symétrie Π_s.

Les champs magnétostatiques $\vec{B}(M)$ et $\vec{B}(M')$ en deux points M et M' symétriques par rapport au plan Π_s sont **anti-symétriques** par rapport à Π_s, c'est-à-dire

$$\vec{B}(M') = -\mathrm{sym}_{\Pi_s}\left(\vec{B}(M)\right) \qquad \Longleftrightarrow$$

Le champ magnétostatique $\vec{B}(M_s)$ en un point M_s appartenant au plan Π_s est orthogonal à ce plan.



Attention ! La propriété de symétrie est inversée par rapport au champ électrostatique.

Rappelons qu'être « anti-symétrique » signifie être « l'opposé du symétrique ».

Cas particulier important :

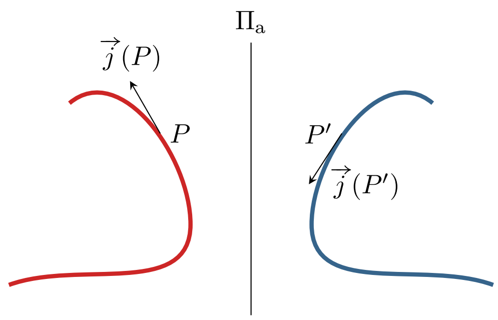
Si la distribution de courant est plane, alors ce plan est un plan de symétrie.

En effet : notons Π_0 le plan de la distribution.
- pour deux points P et P' symétriques par rapport à Π_0, on a bien $\vec{j}(P) = \vec{j}(P') = \vec{0}$;
- un point P_0 appartenant au plan Π_0 est son propre symétrique, et il est évident que $\vec{j}(P_0) = \vec{j}(P_0)$!

b) Effet d'un plan d'anti-symétrie de la distribution de courant

Une distribution de courant possède un **plan d'anti-symétrie** Π_a
lorsque les densités de courant en tous points P et P' symétriques par rapport à Π_a
sont anti-symétriques l'une de l'autre,

$$\vec{j}(P') = -\mathrm{sym}_{\Pi_a}\vec{j}(P) \qquad \Longleftrightarrow$$



Observation d'une carte de champ : voir figure 5.

Identification d'un plan d'anti-symétrie :

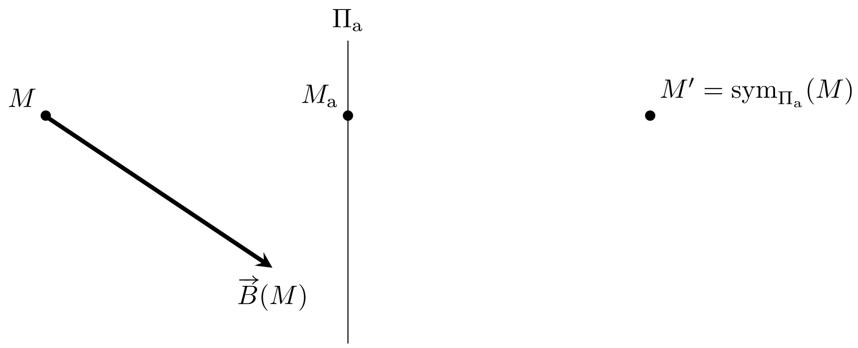
Espace 11

Généralisation : considérons une distribution de courant possédant un plan de symétrie Π_s.

Les champs magnétostatiques $\vec{B}(M)$ et $\vec{B}(M')$ en deux points M et M' symétriques par rapport au plan Π_a sont **symétriques** par rapport à Π_a, c'est-à-dire

$$\vec{B}(M') = \mathrm{sym}_{\Pi_a}\left(\vec{B}(M)\right) \qquad \Longleftrightarrow$$

Le champ magnétostatique $\vec{B}(M_a)$ en un point M_a appartenant au plan Π_a est inclus dans ce plan.



Attention ! La propriété de symétrie est inversée par rapport au champ électrostatique.

c) Exemple

Exercice C1 : Symétries du champ créé par une spire dans un plan méridien

Considérons une spire circulaire d'axe Oz parcourue par un courant I. On se place en coordonnées cylindriques.

1 - Schématiser la situation en trois dimensions puis vue en coupe dans le plan méridien.

2 - Identifier les plans de symétrie et d'anti-symétrie de la distribution de courant. Les dénombrer.

3 - En déduire la direction du champ magnétostatique créé en un point M_1 se trouvant dans le plan de la spire, et en un point M_2 se trouvant sur l'axe de la spire.

4 - Que peut-on dire du champ magnétostatique en un point M_3 appartenant à un plan méridien de la spire sans pour autant se trouver ni sur l'axe ni dans le plan de la spire ?

Espace 12

III.3 - Invariances de la distribution de courant, variables du champ magnétostatique

Exactement comme une distribution de charge, une distribution de courant peut présenter deux types d'invariance : par rotation et par translation.

Exemple de distribution invariante par translation :

Espace 13

Exemple de distribution invariante par rotation :

Espace 14

Attention ! Ne pas confondre : $\vec{j}(P) \neq \vec{j}(P')$ car la direction change au cours de la rotation.

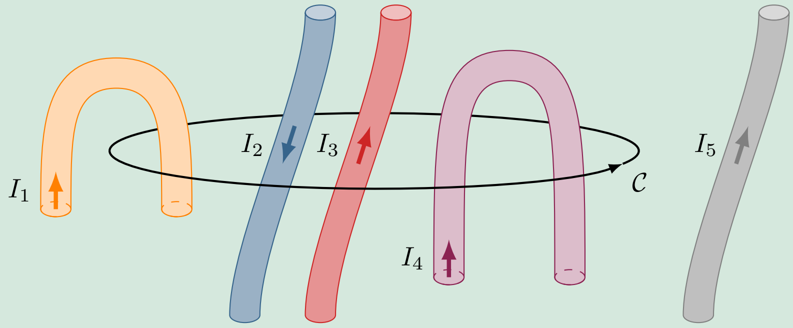
Les invariances des distributions ont les mêmes conséquences en électrostatique et magnétostatique : dans un système de coordonnées adapté, elles rendent le champ indépendant d'une ou plusieurs variables.

IV - Théorème d'Ampère

IV.1 - Démonstration à partir de l'équation de Maxwell-Ampère

Exercice C2 : Calcul de courant enlacé

Quel est le courant enlacé par le contour $\mathcal{C}$ ci-dessous ?



IV.2 - Exemple : champ créé par un cylindre parcouru par un courant uniforme

IV.3 - Exemple : champ créé par un solénoïde infini