



Champ magnétostatique

Exercices

Exercice 1 : Cylindre parcouru par un courant inhomogène

[💡 1 | ✂ 2 | ⊗]

1 Par définition, l'intensité qui parcourt le cylindre vaut

$$I = \iint_{\text{section}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint J_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dS.$$

Sachant qu'en coordonnées cylindriques $dS = r dr d\theta$,

$$I = 2\pi J_0 \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr = 2\pi J_0 \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R = 2\pi J_0 \frac{R^2}{4}$$

d'où on déduit

$$J_0 = \frac{2}{\pi R^2} I.$$

2 Soit M un point de l'espace où l'on cherche à calculer le champ magnétique.

• **Symétries** : le plan passant par M et contenant l'axe du cylindre est plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B}(M)$ est orthogonal à ce plan, c'est-à-dire

$$\vec{B}(M) = B_\theta(M) \vec{e}_\theta.$$

Ceci est cohérent avec le fait que le plan passant par M et orthogonal à l'axe du cylindre est plan d'antisymétrie de la distribution de courant, si bien que \vec{B} appartient à ce plan.

• **Invariances** : la distribution de courant est invariante par translation le long de (Oz) et par rotation autour de cet axe. Le champ $\vec{B}(M)$ ne dépend donc ni de z ni de θ , c'est-à-dire

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta.$$

• **Théorème d'Ampère** : on raisonne sur un cercle \mathcal{C} de rayon r et de normale \vec{e}_z .

Circulation de \vec{B} :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B_\theta(r) \vec{e}_\theta \cdot dl \vec{e}_\theta = 2\pi r B_\theta(r).$$

Courant enlacé :

▷ si $r \geq R$: $I_{\text{enl}} = I$;

▷ si $r \leq R$:

$$I_{\text{enl}} = \iint_{\text{disque}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 2\pi J_0 \int_0^r \left(r' - \frac{r'^3}{R^2}\right) dr' = 2\pi J_0 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right) \quad \text{d'où} \quad I_{\text{enl}} = \frac{2I}{R^2} \left(r^2 - \frac{r^4}{2R^2}\right).$$

Conclusion :

$$2\pi r B_\theta(r) = \begin{cases} \mu_0 I & \text{si } r \geq R \\ \mu_0 \frac{2I}{R^2} \left(r^2 - \frac{r^4}{2R^2}\right) & \text{si } r \leq R \end{cases}$$

soit finalement

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta & \text{si } r \geq R \\ \frac{\mu_0 2I}{2\pi R^2} \left(r - \frac{r^3}{2R^2} \right) \vec{e}_\theta & \text{si } r \leq R \end{cases}$$

3 D'après l'expression donnée et celle de \vec{B} ,

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} \vec{e}_z$$

Si $r \geq R$ alors on constate que $rB_\theta = \mu_0 I / 2\pi$, ce qui ne dépend pas de r , cohérent avec $\vec{j}(r > R) = \vec{0}$.

Si $r \leq R$, alors

$$rB_\theta = \frac{\mu_0 2I}{2\pi R^2} \left(r^2 - \frac{r^4}{2R^2} \right) \quad \text{donc} \quad \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} = \frac{\mu_0 2I}{2\pi R^2} \left(2r - \frac{4r^3}{2R^2} \right) = \frac{\mu_0 4I}{2\pi R^2} \left(r - \frac{r^3}{R^2} \right)$$

ce qui donne bien, en réorganisant,

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \frac{2I}{\pi R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \vec{e}_z = \mu_0 \vec{j}$$

Exercice 2 : Bobine torique

[2 | 1 |]

Soit M un point quelconque de l'espace.

• **Symétries** : le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ (plan de la figure de droite de l'énoncé) est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B}(M)$ est orthogonal à ce plan.

$$\rightsquigarrow \vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_\theta.$$

• **Invariances** : comme les spires sont supposées réparties continûment, alors la distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe Oz . Le champ $\vec{B}(M)$ ne dépend donc pas de θ , d'où

$$\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{e}_\theta.$$

• **Théorème d'Ampère** :

- ▷ On raisonne sur un cercle passant par M et d'axe Oz , orienté par la règle de la main droite selon l'axe Oz .
- ▷ Circulation :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B(r, z) \vec{e}_\theta \cdot dl \vec{e}_\theta = 2\pi r B(r, z).$$

- ▷ Courant enlacé : en raisonnant sur les schémas on peut facilement comprendre que le courant enlacé vaut

$$I_{\text{enl}} = \begin{cases} NI & \text{si } M \in \text{bobine} \\ 0 & \text{si } M \notin \text{bobine} \end{cases}$$

Il faut toujours se méfier du signe des courants enlacés, par règle de la main droite avec l'orientation du contour : ici c'est positif.

- ▷ Conclusion : d'après le théorème d'Ampère,

$$2\pi r B(r, z) = \begin{cases} \mu_0 NI & \text{si } M \in \text{bobine} \\ 0 & \text{si } M \notin \text{bobine} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \vec{B}(M) = \begin{cases} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \vec{e}_\theta & \text{si } M \in \text{bobine} \\ \vec{0} & \text{si } M \notin \text{bobine} \end{cases}$$

On peut constater sur cet exemple que la disjonction des cas n'est pas toujours simple à exprimer en fonction des coordonnées.

Par ailleurs, on peut noter que si $R \gg a$ alors en tout point à l'intérieur de la bobine $r \simeq R$. Cela permet d'identifier $N/2\pi R$ comme étant une densité linéique de spires, et on peut reconnaître le champ à l'intérieur d'un solénoïde droit infini : la courbure du tore devient négligeable.

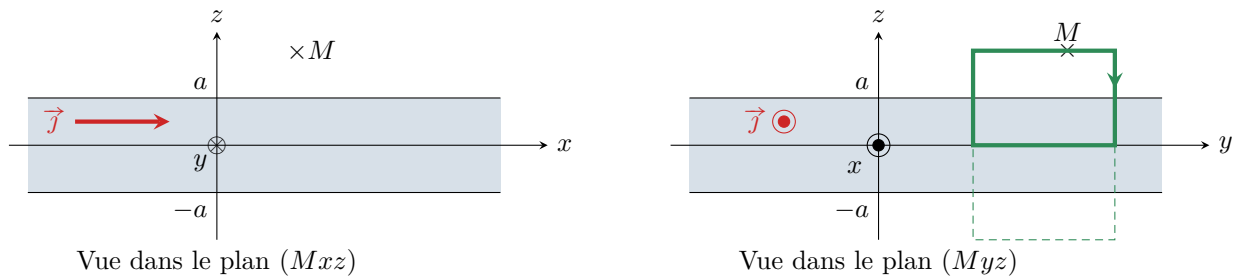


Figure 1 – Plan épais parcouru par un courant.

Exercice 3 : Plan parcouru par un courant

[💡 2 | ✂ 1]

Raisonnons sur la figure 1. On se place en un point M quelconque.

- **Symétries** : Le plan Mxz (plan de la figure de gauche) est plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B}(M)$ est orthogonal à ce plan.

↪ on en déduit $\vec{B}(M) = B_y(M) \vec{e}_y$.

Ceci est (heureusement !) cohérent avec le fait que le plan (Mxy) soit un plan d'anti-symétrie de la distribution de courants, et donc que $\vec{B}(M)$ soit inclus dans ce plan.

- **Invariances** : la distribution de courant est invariante par toute translation dans les directions x et y , donc $\vec{B}(M)$ ne dépend pas de ces deux variables.

↪ on en déduit $\vec{B}(M) = B_y(z) \vec{e}_y$.

- **Choix du contour d'Ampère** : le plus naturel est de raisonner sur un cadre rectangulaire dont les côtés sont respectivement colinéaires aux vecteurs \vec{e}_y (un côté à la cote z du point M , l'autre à discuter) et \vec{e}_z (circulation nulle). Pour fermer ce rectangle, deux possibilités qui reposent toutes les deux sur le fait que le plan d'équation $z = 0$ est un plan de symétrie de la distribution de courant.

▷ ou bien on note qu'en M' symétrique de M par rapport à ce plan les champs sont antisymétriques, donc ici

$$\vec{B}(M') = B_y(z' = -z) \vec{e}_y = -B_y(z) \vec{e}_y$$

et on complète ainsi le rectangle (même type de raisonnement que pour le plan chargé en électrostatique) : c'est le contour représenté en traits pointillés sur la figure 1 ;

▷ ou bien on note qu'en tout point du plan $z = 0$ le champ magnétique doit être orthogonal à ce plan, donc porté par \vec{e}_z ... mais on a déjà montré au préalable que le champ devait être porté par \vec{e}_y , ce qui impose donc

$$\vec{B}(z=0) = \vec{0},$$

et on complète ainsi le rectangle : c'est le contour représenté en traits épais sur la figure 1

Je choisis ici la deuxième possibilité, en notant ℓ la longueur des côtés parallèles à (Oy) et ℓ' celle des côtés parallèles à (Oz) .

- **Application du théorème d'Ampère** :

▷ Circulation du champ :

$$\begin{aligned} \oint_{CA} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{\text{haut}} B_y(z) \vec{e}_y \cdot d\vec{\ell} \vec{e}_y + \int_{\text{droit}} B_y(z) \vec{e}_y \cdot (-d\vec{\ell} \vec{e}_z) + \int_{\text{bas}} B_y(z) \vec{e}_y \cdot (-d\vec{\ell} \vec{e}_y) + \int_{\text{gauche}} B_y(z) \vec{e}_y \cdot d\vec{\ell} \vec{e}_z \\ &= B_y(z) \ell + 0 + 0 + 0. \end{aligned}$$

▷ Courant enlacé par le contour d'Ampère :

→ si $z > a$:

$$I_{\text{enl}} = \iint \vec{j} \cdot (-dS \vec{e}_x) = -j_0 \ell a$$

→ si $z < a$: la partie « supérieure » du plan n'est pas enlacée par le contour d'Ampère, donc

$$I_{\text{enl}} = -j_0 \ell z.$$

▷ Conclusion : d'après le théorème d'Ampère,

$$B_y(z)\ell = \begin{cases} -\mu_0 j_0 \ell a & \text{si } z \geq a \\ -\mu_0 j_0 \ell z & \text{si } 0 \leq z \leq a \\ +\mu_0 j_0 \ell z & \text{si } -a \leq z \leq 0 \\ +\mu_0 j_0 \ell a & \text{si } z \leq -a \end{cases}$$

d'où on déduit finalement en tenant compte de l'antisymétrie par rapport au plan $z = 0$.

$$\vec{B} = \begin{cases} -\mu_0 j_0 a \vec{e}_y & \text{si } z \geq a \\ -\mu_0 j_0 z \vec{e}_y & \text{si } 0 \leq z \leq a \\ +\mu_0 j_0 z \vec{e}_y & \text{si } -a \leq z \leq 0 \\ +\mu_0 j_0 a \vec{e}_y & \text{si } z \leq -a \end{cases}$$

On peut vérifier qualitativement le sens du champ avec la règle de la main droite ... et on n'oublie surtout pas de conclure sur ce qui se passe pour $z < 0$!

Annales de concours

Exercice 4 : Solénoïdes imbriqués

[oral CCP PSI | 💡 2 | ✂ 2 | ⊗]

1 Cf. cours : pour un solénoïde parcouru par un courant i , d'axe (Oz) orienté par la règle de la main droite par rapport au sens de i , le champ est uniforme à l'intérieur et vaut

$$\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e}_z,$$

où n est le nombre de spires par unité de longueur.

2 Par hypothèse, $L \gg r_1$ et r_2 , ce qui justifie d'approximer les solénoïdes comme infinis. En notant i_1 et i_2 les courants qui y circulent et compte tenu de l'orientation des spires, le champ qu'ils créent en leur intérieur vaut

$$\vec{B}_{1,2} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i_{1,2} \vec{e}_z.$$

Inductance propre L_1 :

▷ Flux créé par \mathcal{S}_1 au travers d'une spire s_1 de \mathcal{S}_1 :

$$\phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow s_1} = \iint_{M \in s_1} \vec{B}_1(M) \cdot dS \vec{e}_z = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N}{\ell} i_1$$

▷ Flux total créé par \mathcal{S}_1 au travers de lui-même :

$$\phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1} = N \phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow s_1} \quad \text{donc} \quad \phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1} = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell} i_1.$$

▷ Inductance propre : par définition, $\phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1} = L_1 i_1$ donc

$$L_1 = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell}.$$

Inductance propre L_2 : par la même démarche,

$$L_2 = \pi r_2^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell}.$$

Inductance mutuelle M : comme le champ créé par \mathcal{S}_2 est uniforme à l'intérieur de \mathcal{S}_1 alors que la réciproque n'est pas vraie, il est plus simple de calculer M à partir du flux créé par \mathcal{S}_2 au travers de \mathcal{S}_1 .

▷ Flux créé par \mathcal{S}_2 au travers d'une spire s_1 de \mathcal{S}_1 :

$$\phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow s_1} = \iint_{M \in s_1} \vec{B}_2(M) \cdot dS \vec{e}_z = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N}{\ell} i_2$$

▷ Flux total créé par \mathcal{S}_2 au travers de \mathcal{S}_1 :

$$\phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1} = N \phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow s_1} \quad \text{donc} \quad \phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1} = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell} i_2.$$

▷ Inductance mutuelle : par définition, $\phi_{S_2 \rightarrow S_1} = M i_2$ donc

$$M = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell}.$$

3 Le circuit équivalent est tracé figure 2. Le circuit 1 contient une bobine et un générateur de courant imposant le courant i_1 , le circuit 2 ne contient qu'une bobine court-circuitée. Il y a un couplage inductif entre les deux circuits. Compte tenu de la convention récepteur,

$$u_1 = +L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = +L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

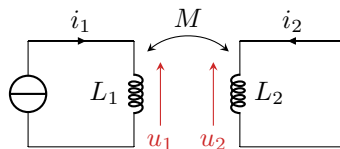


Figure 2 – Circuit électrique équivalent.

D'après la loi des mailles, $u_2 = 0$ donc

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{M}{L} \frac{di_1}{dt}$$

et par intégration

$$i_2 = -\frac{M}{L} i_1 + \text{cte.}$$

Comme le solénoïde S_2 n'est pas relié à un générateur, on peut supposer qu'il n'y a pas de courant continu qui serait physiquement impossible à cause des résistances des fils, même si elles sont faibles. Finalement,

$$i_2(t) = -\frac{M}{L} I \cos(\omega t),$$

d'amplitude

$$I_2 = \frac{M}{L} I.$$

4 D'après le principe de superposition, en un point M se trouvant à l'intérieur des deux solénoïdes,

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M) = \mu_0 \frac{N}{\ell} (i_1 + i_2) \vec{e}_z$$

d'où en remplaçant

$$\vec{B}(M) = \mu_0 \frac{N}{\ell} \left(1 - \frac{M}{L}\right) I \cos(\omega t) \vec{e}_z.$$

Exercice 5 : Fil conducteur creux

[oral banque PT | 💡 2 | ⚡ 2]

1 Cf. cours :

$$\vec{B}_0(M) = \begin{cases} \frac{\mu_0 j R^2}{2r} \vec{u}_\theta & \text{si } r \geq R \\ \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{u}_\theta & \text{si } r \leq R \end{cases}$$

2 Par définition, $\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r$. Il faut donc exprimer \vec{u}_θ en fonction de \vec{u}_z et \vec{u}_r , ce qui se fait grâce au produit vectoriel $\vec{u}_\theta = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r$. Ainsi,

$$\vec{u}_\theta = \frac{1}{r} \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM}.$$

On en déduit

$$\vec{B}_0(M) = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu_0 j \frac{R^2}{r^2} \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM} & \text{si } r \geq R \\ \frac{1}{2} \mu_0 j \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM} & \text{si } r \leq R \end{cases}$$

3 On applique le principe de superposition : la cavité est vue comme la superposition de deux distributions de courant $j\vec{u}_z$ et $-j\vec{u}_z$. À l'intérieur de la cavité, on a donc

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \frac{1}{2}\mu j\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM} - \frac{1}{2}\mu j\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{O'M}$$

avec O' un point origine sur l'axe du cylindre creux, ce qui se simplifie en

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \frac{1}{2}\mu j\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OO'}.$$

Le champ magnétique est donc uniforme à l'intérieur de la cavité.

Exercice 6 : Balance de Cotton

[Mines PSI 2016 | 💡 3 | ⚡ 2]

Introduisons des coordonnées cylindriques de centre O et d'axe Oz tel que $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

1 Les parties circulaires ont pour centre O , si bien que l'élément de courant $I\vec{dl}$ est porté par $\pm\vec{e}_\theta$ (\oplus pour le conducteur aller et \ominus pour le retour) et la force de Laplace élémentaire $I\vec{dl} \wedge \vec{B}$ par $\pm\vec{e}_r$. Toutes ces forces sont donc des forces centrales de centre O , dont le moment en O est donc nul.

2 Sur la partie rectiligne de longueur L , la force de Laplace vaut

$$\vec{F}_L = -IL\vec{e}_r \wedge B\vec{e}_z = ILB\vec{e}_\theta$$

Cette force s'applique au milieu du segment rectiligne, son bras de levier vaut donc a , d'où

$$\vec{M}_O(\vec{F}_L) = a\vec{e}_r \wedge ILB\vec{e}_\theta \quad \text{soit} \quad \vec{M}_O(\vec{F}_L) = aILB\vec{e}_z.$$

3 Le bras gauche de la balance est soumis à la force de Laplace et à son propre poids. Le bras droit de la balance est soumis à son propre poids et à celui de la masse m additionnelle qui a été déposée sur le plateau. L'énoncé indique qu'à vide la balance est équilibrée, ce qui veut dire que les moments en O du poids de chaque bras se compensent. Comme la balance est de nouveau à l'équilibre, le moment du poids de la masse m doit exactement compenser celui des forces de Laplace, c'est-à-dire

$$-a'mg\vec{e}_z + aILB\vec{e}_z = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad B = \frac{a'mg}{aIL}.$$

4 La plus petite valeur de champ magnétique mesurable est celle pour laquelle $m = \delta m$, c'est-à-dire

$$B_{\text{min}} = \frac{a'\delta m g}{aIL} = 2 \text{ mT}.$$

À titre de comparaison, le champ magnétique terrestre a pour norme $5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ et n'est pas mesurable avec la balance, mais le champ créé par un aimant permanent « basique » est de l'ordre de 100 mT . **La balance de Cotton est donc tout à fait utilisable.**