TD 19 – Électromagnétisme

Champ magnétostatique

Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
Difficulté technique et calculatoire ;
Exercice important.

Flasher ce code pour accéder aux corrigés

Exercices

Exercice 1 : Cylindre parcouru par un courant inhomogène [1 | 2 |]

On considère un câble cylindrique de rayon R et d'axe z parcouru par un courant d'intensité I réparti de façon non uniforme au sein du câble,

$$\vec{j}\,(r) = J_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \vec{e}_z\,.$$

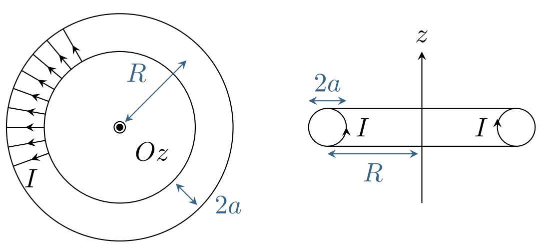
1 - Exprimer J_0 en fonction de I.

2 - Calculer le champ magnétostatique créé par ce câble en tout point de l'espace.

3 - Vérifier que le champ trouvé obéit bien à l'équation de Maxwell-Ampère.

Donnée : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial B_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial B_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\dfrac{\partial B_r}{\partial z} - \dfrac{\partial B_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial (rB_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial B_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$

Exercice 2 : Bobine torique [2 | 1 |]



Une bobine torique est un enroulement de fil conducteur sur un support en forme de tore, c'est-à-dire la forme d'une bouée. Le support torique est caractérisé par un rayon moyen R autour de son axe de symétrie (Oz) et une section circulaire de rayon $a < R$.

L'enroulement comporte $N \gg 1$ spires que l'on modélisera par des spires planes circulaires de rayon a. Le nombre de spires est suffisamment grand pour que l'on puisse considérer les spires comme continûment réparties le long du tore. On note I le courant circulant dans cette bobine. On se place en coordonnées cylindriques d'axe (Oz).

Montrer que le champ magnétostatique créé par cette bobine s'écrit $\vec{B} = B(r,z)\vec{e}_\theta$, et le calculer en tout point M, en distinguant les cas selon que M se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur de la bobine.

Exercice 3 : Plan parcouru par un courant [2 | 1]

Entre les deux plans $z = -a$ et $z = +a$ existe un courant de densité volumique uniforme $\vec{j} = j_0\,\vec{u}_x$. Calculer le champ magnétique en tout point de l'espace et le représenter graphiquement.

Annales de concours

Exercice 4 : Solénoïdes imbriqués [oral CCP PSI | 2 | 2 |]

Deux solénoïdes $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ de même axe (Oz), de même longueur ℓ et de rayons r_1 et $r_2 > r_1$ sont emboîtés l'un dans l'autre, voir figure 1. Ils présentent tous deux le même nombre de spires N. On suppose que la longueur ℓ est très supérieure aux rayons.

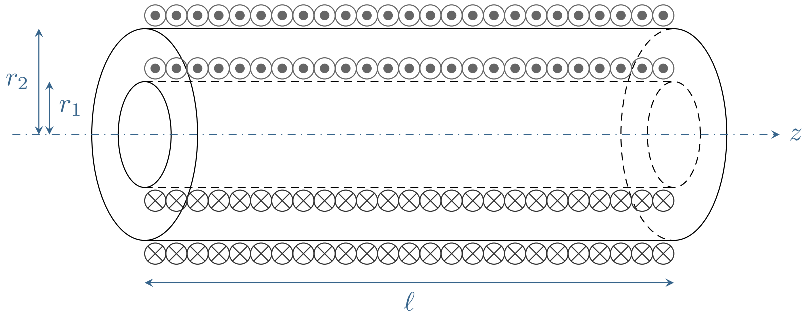


Figure 1 – Solénoïdes imbriqués.

La bobine intérieure est parcourue par un courant $i_1(t) = I\cos(\omega t)$, avec $I = 1\,\mathrm{A}$, avec ω une pulsation suffisamment basse pour que l'ARQS magnétique s'applique[1]. La bobine extérieure est en court-circuit.

1 - Sachant que le champ est nul à l'extérieur, déterminer le champ à l'intérieur d'un solénoïde infini.

2 - Déterminer les coefficients d'induction propre L_1, L_2, et le coefficient d'induction mutuelle M.

3 - En négligeant les résistances internes des fils, déterminer le courant $i_2(t)$ parcourant la bobine extérieure. Quelle est son amplitude ?

4 - Que vaut le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde central ?

Exercice 5 : Fil conducteur creux [oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2]

Un fil conducteur épais de rayon R et d'axe $\vec{u}_z$ est parcouru par un courant de densité $j\vec{u}_z$ uniforme.

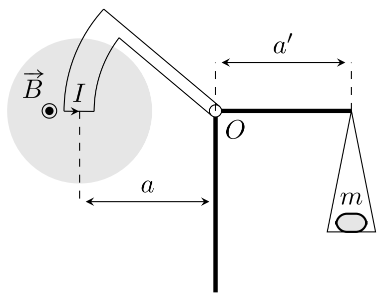
1 - Déterminer le champ $\vec{B}_0$ en tout point M de l'espace.

2 - Exprimer $\vec{B}_0$ en fonction de $\vec{u}_z$ et $\overrightarrow{OM}$.

On suppose maintenant que le fil est creux et présente une cavité cylindrique parallèle à l'axe du cylindre mais décentrée par rapport à cet axe. Dans le reste du cylindre, la densité de courant est toujours égale à j.

3 - Calculer le champ magnétique dans la cavité.

Exercice 6 : Balance de Cotton [Mines PSI 2016 | 💡 3 | ✂ 2]



La balance de Cotton est un dispositif ancien, développé au tout début du XX$^{\mathrm{e}}$ siècle par Aimé Cotton pour mesurer avec précision des champs magnétiques. Elle est constituée de deux bras rigidement liés l'un à l'autre en O. La partie de gauche comprend sur sa périphérie un conducteur métallique qui est parcouru par un courant et dont une partie est placée dans le champ magnétique uniforme et permanent à mesurer, représenté par la zone grisée. Dans cette partie, les conducteurs aller et retour sont des arcs de cercle de centre O, reliés par une portion horizontale de longueur L. Le partie droite comporte un plateau sur lequel est déposée une masse m afin d'équilibrer la balance.

La balance peut tourner sans frottement dans le plan de la figure autour du point O. À vide, c'est-à-dire sans champ magnétique ni masse m, la position du plateau est ajustée afin que la balance soit à l'équilibre avec le bras de droite parfaitement horizontal.

1 - Montrer que le moment en O des forces de Laplace s'exerçant sur les parties en arc de cercle est nul.

2 - À l'équilibre, en présence de courant et de champ magnétique, établir l'expression du moment en O des forces de Laplace.

3 - En déduire la relation entre la masse m à poser sur le plateau pour retrouver la configuration d'équilibre et le champ magnétique B, à exprimer en fonction de a, a' , ℓ, I et de l'intensité de la pesanteur g.

4 - La sensibilité de la balance étant de $\delta m = 0{,}05\,\mathrm{g}$, en déduire la plus petite valeur de B mesurable pour $a = a' = 25\,\mathrm{cm}$, $L = 5\,\mathrm{cm}$ et $I = 5\,\mathrm{A}$. En comparant cette valeur avec une ou des références connues, conclure quant à l'utilisabilité de la balance.

1. Ce qui a pour conséquence pratique ici de pouvoir appliquer le théorème d'Ampère exactement comme en statique bien que i_1 soit variable.