BLAISE PASCAL
PT 2019-2020

Chapitre 20 – Électromagnétisme

Électromagnétisme en régime variable

Au programme

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 3 « Équations de Maxwell ».

Dans le bloc 3, une vision cohérente des lois de l'électromagnétisme est présentée. Le cadre adopté est celui de l'approximation des régimes quasi-stationnaires magnétiques où les effets des distributions de courants dominent ceux des distributions de charges.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Principe de la conservation de la charge : formulation locale.	Établir l'équation locale de la conservation de la charge dans le cas à une dimension.
Équations de Maxwell : formulations locale et intégrale.	Interpréter qualitativement le lien entre l'équation de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday. Écrire et interpréter les équations de Maxwell sous forme intégrale. Relier qualitativement le couplage spatio-temporel entre champ électrique et champ magnétique au phénomène de propagation. Déduire l'équation locale de la conservation de la charge.
Approximation des régimes quasi-stationnaires (ou quasi-permanents) magnétique.	Comparer une durée typique d'évolution des sources à une durée de propagation de l'onde électromagnétique.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 4 « Énergie du champ électromagnétique ».

Dans le bloc 4, on s'intéresse à l'aspect énergétique de l'électromagnétisme. Aucun modèle relatif à la loi d'Ohm locale n'est exigible ; l'accent est mis sur les échanges d'énergie entre la matière et le champ électromagnétique, sur l'utilisation du flux du vecteur de Poynting pour évaluer une puissance rayonnée à travers une surface et sur les bilans d'énergie et de puissance.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Densité volumique de force électromagnétique. Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.	Établir et utiliser l'expression de la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.
Loi d'Ohm locale. Densité volumique de puissance Joule.	Analyser les aspects énergétiques dans le cas particulier d'un milieu ohmique.
Densité volumique d'énergie électromagnétique et vecteur de Poynting : bilan d'énergie.	Utiliser le flux du vecteur de Poynting à travers une surface orientée pour évaluer la puissance rayonnée. Effectuer un bilan d'énergie sous forme locale et intégrale. Interpréter chaque terme de l'équation locale de Poynting, l'équation locale de Poynting étant donnée.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Au concours

▷ Écrit : épreuve A 2014 pour l'ARQS, tous les ans pour les équations de Maxwell.
▷ Oral : de temps en temps.

Plan du cours

Ce chapitre vise à introduire une vision plus complète de l'électromagnétisme : prise en compte des variations temporelles des champs, dont a déjà mentionné qu'elles vont introduire un couplage entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$; explicitation du lien entre densité de charge et densité de courant ; et enfin discussion sous l'angle énergétique.

I - Équations de Maxwell

I.1 - Formulations locales et intégrales

Vous connaissez déjà quasiment tout !

a) Équation de Maxwell-Gauss et théorème de Gauss

Espace 1

Sens physique : les charges électriques sont source de champ électrique.

L'équation de Maxwell-Gauss est identique en régime statique et en régime variable, le théorème de Gauss peut donc s'appliquer même en régime variable tant que la surface de Gauss choisie est fixe et indéformable.

b) Équation de Maxwell-Thomson et conservation du flux magnétique

Espace 2

L'équation de Maxwell-Thomson est identique en régime statique et en régime variable, la conservation du flux magnétique (ou l'égalité du flux au travers de toute surface s'appuyant sur un même contour fermé) est valable également en régime variable.

c) Équation de Maxwell-Ampère et théorème d'Ampère

Espace 3

où le terme $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est appelé **courant de déplacement**,
I_D représentant l'intensité de déplacement enlacée par le circuit.

Sens physique : les courants électriques sont source de champ magnétique, les variations de champ électrique également.

> ***Remarque pratique :*** *la version intégrale n'est quasiment jamais utilisée en régime dépendant du temps.*

> ***Remarque culturelle :*** *C'est Maxwell lui-même qui a compris la nécessité d'ajouter le courant de déplacement à son jeu d'équations pour que la théorie de l'électromagnétisme soit complète.*

d) Équation de Maxwell-Faraday et loi de Faraday

- **Version locale**

Espace 4

Sens physique : les variations de champ magnétique sont source de champ électrique.

⇝ c'est le phénomène d'induction électromagnétique.

Conséquence : comme $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} \neq \vec{0}$, alors, en présence d'un champ magnétique variable, $\vec{E}$ ne dérive plus d'un potentiel.

- **Version intégrale**

La version intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday est la loi de Faraday, admise l'an dernier dans le cours sur l'induction. Pour rendre le lien explicite, raisonnons sur une surface $\mathcal{S}$ s'appuyant sur un circuit électrique filiforme $\mathcal{C}$.

Espace 5

⇝ en régime variable, la circulation de $\vec{E}$ le long d'un circuit fermé n'est plus nulle.

> ***Rappel d'électrostatique :*** *par définition du potentiel électrostatique V,*
>
> $$\int_{\widehat{AB}} \vec{E}\cdot\vec{d\ell} = V(A) - V(B) \qquad \text{donc} \qquad \oint \vec{E}\cdot\vec{d\ell} = 0\,.$$

Modélisation électrocinétique équivalente : Il est toujours possible de raisonner en termes électrocinétiques, même en présence d'induction. La circulation de $\vec{E}$ s'interprète comme une tension : en présence d'induction, tout se passe comme si un générateur supplémentaire imposant une tension e appelée **force électromotrice induite** était ajouté au système réel.

⇝ Où se trouve le générateur induit dans un montage, par exemple de rails de Laplace ? Autrement dit, comment faut-il brancher un voltmètre pour mesurer la fém induite ?

Espace 6

Expression de la fém induite : À la condition que la surface d'intégration soit fixe, la dérivée temporelle et l'intégrale de surface peuvent être permutées :

$$\iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iint_{\mathcal{S}} \vec{B}\cdot\vec{\mathrm{d}S}\right) = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$$

Dans ces hypothèses, on retrouve la loi de Faraday. Pour être cohérent sur le plan des conventions, elle nécessite d'orienter le générateur induit en convention générateur par rapport à l'intensité dans le circuit.

Espace 7

> ***Remarque :*** *L'hypothèse de circuit fixe nécessaire pour passer de la forme locale à la forme intégrale explique les exceptions à la loi de Faraday que l'on peut rencontrer, par exemple pour un haut-parleur ou certaines machines tournantes. Les traiter dans une approche purement électromagnétique est possible mais trop technique à notre niveau : on utilise alors la conservation de la puissance,*
>
> $$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} + e_{\text{ind}} i = 0$$
>
> $\rightsquigarrow$ *cf. cours sur l'induction de PTSI.*

I.2 - Relations de passage

Les équations de Maxwell s'appliquent en présence de distributions de charge et de courant volumiques, mais on a constaté que dans certaines géométries il est plus naturel d'utiliser une modélisation surfacique, linéique ou ponctuelle de la distribution.

$\rightsquigarrow$ que deviennent les champs au voisinage de ces distributions ?

- **Distributions volumiques**

Espace 8

- **Distributions linéiques et ponctuelles**

Exemples :

▷ champ électrostatique créé par une charge ponctuelle :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\,\vec{e}_r$$

▷ champ magnétique créé par un fil infini (distribution linéique de courant) :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{e}_\theta\,.$$

Généralisation :

Espace 9

Il s'agit d'une limite de la modélisation : en réalité, les champs ne divergent pas mais le modèle linéïque ou ponctuel n'est plus valable à petite distance de la distribution.

- **Distributions surfaciques**

Espace 10

Ces propriétés de discontinuités se traduisent par des **relations de passage**, qui peuvent se démontrer à partir des équations de Maxwell.

> ***Remarque :*** *Officiellement, les relations de passage doivent être rappelées par un énoncé ... en pratique, il peut être utile de se souvenir au moins de quelles composantes sont continues ou discontinues.*

Exemple : au passage d'une distribution plane située en $z = 0$,

$$\begin{cases} \vec{E}(z=0^+) - \vec{E}(z=0^-) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{e}_z \\ \vec{B}(z=0^+) - \vec{B}(z=0^-) = \mu_0\,\vec{j}_\mathrm{s} \wedge \vec{e}_z \end{cases}$$

Champ	$\vec{E}$	$\vec{B}$
Composantes continues		
Composantes discontinues		

Généralisation :

Au passage d'une interface,
- ▷ les composantes tangentielles de $\vec{E}$ sont toujours continues ;
- ▷ la composante normale de $\vec{B}$ est toujours continue.

Les autres composantes peuvent être discontinues.

I.3 - Approximation des régimes quasi-stationnaires magnétiques

- **Comparaison des échelles de temps**

La variation d'une source de champ (ρ ou $\vec{j}$) en un point P va modifier les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en ce point, et de proche en proche le champ électromagnétique en tout point M de l'espace. Ces modifications se transmettent sous forme sous forme d'une **onde électromagnétique**, à la célérité c dans le vide.

⇝ durée nécessaire pour atteindre un point M :

Espace 11

Cette durée peut-elle être suffisamment courte pour être négligée ?

Espace 12

L'**approximation des régimes quasi-stationnaires** (ou quasi-permanents) consiste à négliger le temps τ de propagation de l'onde électromagnétique au travers du système devant le temps caractéristique T de variation des sources de champ,

$$\tau \ll T$$

Exemple : *Considérons un circuit électronique de TP, de longueur $\ell \sim 30\,\mathrm{cm}$, alimenté par une tension de fréquence 1 kHz.*

▷ *Temps de propagation de l'onde électromagnétique :*

Espace 13 ;

▷ *Temps caractéristique de variation des sources de champ :*

Espace 14

Conclusion :

Espace 15

- **Comparaison des effets des charges et des courants**

De plus, pour un système donné, les charges électriques (via ρ) et les courants électriques (via $\vec{j}$) ont une importance relative généralement différente.

⇝ la plupart du temps, l'effet des charges est négligeable devant celui des courants.

La combinaison de cette hypothèse avec celle d'ARQS forme l'**ARQS magnétique**.

- **Équations de Maxwell dans l'ARQS magnétique**

On admet :

Dans le cadre de l'ARQS magnétique, le courant de déplacement est négligeable.

$$\left|\left|\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right|\right| \ll ||\vec{j}\,||$$

L'équation de Maxwell-Ampère et le théorème d'Ampère s'écrivent alors comme en régime stationnaire, et ce même si l'intensité dépend du temps,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}(M,t) = \mu_0\,\vec{j}\,(M,t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \oint \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0\, I_{\mathrm{enl}}(t)\,.$$

L'équation de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday conservent leur forme générale,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}(M,t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M,t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\,.$$

> ***Remarque :*** *Exception notable à l'ARQS magnétique : le condensateur ! Il n'y a aucun courant dans l'isolant et seulement des charges électriques sur les armatures, donc l'effet des charges l'emporte sur celui des courants.*
>
> *La description exhaustive d'un condensateur en régime quasi-stationnaire nécessite une hypothèse d'ARQS électrique (hors programme), dans laquelle l'équation de Maxwell-Faraday s'écrit comme en régime stationnaire alors que l'équation de Maxwell-Ampère conserve sa forme générale. À notre niveau, il ne sera jamais utile d'exprimer le champ magnétique créé par un condensateur en régime lentement variable. On se contentera donc d'admettre que le champ électrique au sein d'un condensateur et les calculs qui en découlent (potentiel, capacité) sont inchangés en régime lentement variable par rapport au régime statique.*

II - Conducteurs électriques

II.1 - Loi d'Ohm locale

Exercice C1 : De la conductivité à la résistance

Considérons un conducteur ohmique unidimensionnel d'axe (Oz), de longueur ℓ et section S, fait d'un matériau de conductivité γ. Retrouver la loi d'Ohm intégrale à partir de la loi d'Ohm locale, et relier sa résistance R à sa conductivité γ.

Ordres de grandeur de conductivité électrique :

Cuivre (bon conducteur)	Silicium (semi-conducteur)	Eau pure (isolant)
$6\cdot10^7\,\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$	$1\,\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$	$1\cdot10^{-2}\,\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$

La conductivité du silicium s'entend ici en l'absence de dopage, c'est-à-dire de traitement spécifique destiné à contrôler et améliorer cette conductivité.

II.2 - Équation locale de conservation de la charge

II.3 - Conservation de la charge dans l'ARQS : loi des nœuds

III - Énergie du champ électromagnétique

III.1 - Densité volumique d'énergie électromagnétique

III.2 - Puissance cédée aux porteurs de charge

III.3 - Puissance rayonnée : vecteur de Poynting

III.4 - Bilan d'énergie

- **Complément : démonstration de l'équation de Poynting à partir des équations de Maxwell**

Multiplions scalairement l'équation de Maxwell-Ampère par $\vec{E}$,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\cdot\vec{E} = \mu_0\vec{j}\cdot\vec{E} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot\vec{E}\,. \qquad \text{soit} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\cdot\vec{E} = \mu_0\vec{j}\cdot\vec{E} + \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2\right)\,.$$

En divisant par μ_0 et en utilisant l'identité d'analyse vectorielle $\mathrm{div}(\vec{E}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} - \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}$, on en déduit

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} - \mathrm{div}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right) = \vec{j}\cdot\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2\right)\,.$$

L'équation de Maxwell-Faraday conduit à

$$-\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \mathrm{div}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right) = \vec{j}\cdot\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2\right)$$

soit

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2\right) - \mathrm{div}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right) = \vec{j}\cdot\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2\right)$$

En réorganisant les termes de part et d'autre de l'égalité, on aboutit à l'équation de Poynting :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2\right) = -\,\mathrm{div}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right) - \vec{j}\cdot\vec{E}$$

$$\boxed{\frac{\partial u_{\mathrm{em}}}{\partial t} = -\,\mathrm{div}\,\vec{\Pi} - \vec{j}\cdot\vec{E}\,.}$$