

# Électromagnétisme en régime variable

## Exercices

### Exercice 1 : Manipulation des équations de Maxwell

[💡 1 | ✂️ 2]

1 Par définition,

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

ce qui est conforme à l'équation de Maxwell-Gauss car  $\rho = 0$  par hypothèse. De même,

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0$$

ce qui est là aussi conforme à l'équation de Maxwell-Thomson.

2 Compte tenu de la forme des champs,

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = f'(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_y \quad \text{et} \quad -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\tau} g(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_y$$

d'où on déduit de l'équation de Maxwell-Faraday

$$f'(z) = \frac{1}{\tau} g(z)$$

3 Compte tenu de la forme des champs,

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = -g'(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} f(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_x.$$

d'où on déduit de l'équation de Maxwell-Ampère

$$g'(z) = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\tau} f(z) e^{-t/\tau}.$$

4 En dérivant par rapport à  $z$  l'équation obtenue par Maxwell-Faraday, on obtient

$$f''(z) = \frac{1}{\tau} g'(z)$$

et en combinant avec la question précédente on obtient

$$f''(z) - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\tau^2} f(z) = 0.$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants portant sur la seule variable  $z$ . Son polynôme caractéristique admet pour racines

$$r_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\tau^2}} = \pm \frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}{\tau}$$

| Dans un cas aussi simple, pas besoin de passer par le discriminant !

La solution particulière est nulle et la solution homogène est

$$f(z) = \alpha \exp\left(-\frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} z}{\tau}\right) + \beta \exp\left(\frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} z}{\tau}\right)$$

Les conditions données par l'énoncé imposent que  $\beta = 0$  et que  $f(z=0) = E_0 = \alpha$ . On en déduit :

$$\vec{E} = E_0 \exp\left(-\frac{1}{\tau}(t + \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} z)\right) \vec{e}_x.$$

5 D'après ce qui précède,

$$g(z) = \tau f'(z) = -E_0 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \exp\left(-\frac{1}{\tau}(t + \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} z)\right)$$

d'où on déduit

$$\vec{B} = -E_0 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \exp\left(-\frac{1}{\tau}(t + \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} z)\right) \vec{e}_y.$$

## Exercice 2 : Chauffage par induction

[💡 1 | ⚡ 2 | ⓧ]

1 Voir la figure 1. En orientant l'axe  $z$  par rapport au courant  $i$  (règle de la main droite), le champ créé par le solénoïde s'écrit

$$\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e}_z$$

avec  $n$  le nombre de spires par unité de longueur. L'expression est identique dans l'ARQS et en magnétostatique.

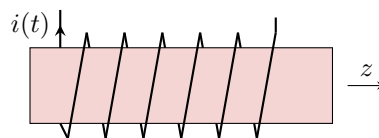


Figure 1 – Dispositif de soudure inductive.

2 L'équation de Maxwell-Faraday indique qu'un champ magnétique dépendant du temps est source de champ électrique. Au sein du métal, ce champ électrique va faire apparaître une densité de courant  $\vec{j}$  et céder de l'énergie au métal par effet Joule.

Une autre justification moins orientée « équations » consisterait à dire que le métal est un conducteur placé dans un champ magnétique variable, et est donc le siège d'un phénomène d'induction. Ce sont les courants induits (les courants de Foucault) qui vont chauffer le matériau par effet Joule.

3 D'après l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 n \frac{di}{dt} \vec{e}_z = +\mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \vec{e}_z$$

et en utilisant le formulaire

$$\text{rot } \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial r E_\theta}{\partial r} \vec{e}_z$$

d'où on déduit

$$\frac{\partial r E_\theta}{\partial r} = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t).$$

En intégrant par rapport à  $r$ ,

$$r E_\theta = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{r^2}{2} + f(t).$$

Comme on intègre une dérivée partielle pour laquelle certaines variables (ici  $t$ ) sont fixées, alors la constante d'intégration est une « constante partielle », c'est-à-dire une fonction des variables fixées.

On montre que la fonction  $f$  est nulle en se plaçant en  $r = 0$  : comme il n'y a « rien de spécial » en ce point, la composante  $E_\theta$  y prend une valeur finie. Finalement,

$$\vec{E} = \frac{1}{2} \mu_0 n r I_0 \omega \sin(\omega t) \vec{e}_\theta.$$

L'analyse des invariances est identique à celle menée en électrostatique. En revanche, celle des symétries est beaucoup plus subtile à cause du champ magnétique variable, et hors de portée en PT : comme c'est  $\vec{\text{rot}} \vec{E}$  qui intervient dans l'équation de Maxwell-Faraday, alors un plan de symétrie de  $\partial \vec{B} / \partial t$  est plan d'antisymétrie de  $\vec{E}$  ... ce qui est la propriété inverse par rapport à la charge électrique, car  $\rho$  apparaît dans l'équation de Maxwell-Gauss qui porte sur  $\text{div} \vec{E}$ .

4 D'après la loi d'Ohm locale,

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = \frac{1}{2} \mu_0 \gamma n r I_0 \omega \sin(\omega t) \vec{e}_\theta.$$

On en déduit la puissance volumique dissipée par effet Joule,

$$\mathcal{P} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{4} \gamma \mu_0^2 n^2 r^2 I_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t).$$

Elle est maximale lorsque  $r$  est maximal, c'est donc sur les bords du cylindre que le métal chauffe le plus et qu'il fond en premier.

On retrouve un phénomène d'effet de peau analogue à celui que nous rencontrerons en étudiant les ondes électromagnétiques : dans un conducteur en régime variable, les courants sont repoussés à l'extérieur du matériau.

### Exercice 3 : Émission radioactive

[ 2 | 2 ]

1 L'amas émet des charges positifs, il est donc logique que sa charge soit négative et décroissante. L'allure exponentielle est typique de la radioactivité. À l'instant initial, on a  $q(t=0) = 0$  : aucun atome ne s'est désintégré donc l'amas est neutre.

2 L'émission étant isotrope, le vecteur densité de courant est forcément à symétrie sphérique :  $\vec{j} = j_r(r) \vec{e}_r$ . Ainsi, tout plan contenant  $(OM)$  est plan de symétrie de la distribution de courant, donc  $\vec{B}(M, t)$  doit être orthogonal à chacun de ces plans et est donc forcément nul :

$$\vec{B}(M, t) = \vec{0}.$$

L'équation de Maxwell-Ampère indique qu'un champ électrique variable est également source de champ magnétique : dans un cas plus général, il faut donc également étudier les plans de symétrie de  $\partial \vec{E} / \partial t$ . Cependant, d'après le théorème de superposition, les propriétés de symétrie doivent être vérifiées pour chaque « famille » de sources. Les symétries des courants imposent d'avoir  $\vec{B} = \vec{0}$ , le champ électrique ne pourra donc rien y changer.

3 • **Symétries** : la distribution de charge possède les mêmes symétries que la distribution de courant, mais comme  $\vec{E}$  doit être inclus dans un plan de symétrie il n'est pas nul mais radial,

$$\vec{E}(M, t) = E_r(M, t) \vec{e}_r.$$

L'équation de Maxwell-Faraday indique qu'un champ magnétique variable est également source de champ électrique : dans un cas plus général, il faut donc également étudier les plans de symétrie de  $\partial \vec{B} / \partial t$  ... mais ce n'est pas la peine ici car  $\vec{B} = \vec{0}$ , tout se passe exactement comme en statique.

• **Invariances** : à tout instant la distribution de charge est invariante par rotation autour de l'amas, donc  $\vec{E}$  ne dépend que de  $r$ .

• **Théorème de Gauss**, qui s'applique aussi en régime variable : on raisonne sur une sphère de rayon  $r$  centré sur l'amas.

▷ calcul du flux :  $\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = 4\pi r^2 E_r$ .

▷ calcul de la charge intérieure : il faut un temps  $r/v_0$  pour qu'une particule  $\alpha$  sorte de la sphère de rayon  $r$ , donc la charge contenue dans la sphère à un instant  $t$  est la charge de l'amas à l'instant  $t - r/v_0$ .

$$Q_{\text{int}} = q \left( t - \frac{r}{v_0} \right)$$

• **Conclusion :**

$$\vec{E}(r, t) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \exp\left(-\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{r}{v_0}\right)\right) \vec{e}_r.$$

4 D'après l'équation de Maxwell-Gauss,

$$\begin{aligned} \rho(r, t) &= \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{Q_0}{4\pi} \frac{d}{dr} \left[ \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right) \right] \\ &= \frac{Q_0}{4\pi r^2} \times \frac{1}{v_0\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right) \end{aligned}$$

$$\rho(r, t) = \frac{Q_0}{4\pi v_0\tau r^2} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right)$$

D'après l'équation de Maxwell-Ampère,

$$\begin{aligned} \vec{j}(r, t) &= \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= \vec{0} - \frac{Q_0}{4\pi r^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right) \right] \vec{e}_r \\ &= -\frac{Q_0}{4\pi r^2} \times -\frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right) \vec{e}_r \end{aligned}$$

$$\vec{j}(r, t) = \frac{Q_0}{4\pi \tau r^2} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right) \vec{e}_r.$$

On retrouve  $\vec{j} = \rho v_0 \vec{e}_r$  ... on aurait pu s'y attendre!

#### Exercice 4 : Modélisation électromagnétique de la charge d'un condensateur [ 2 | 2 ]

Le condensateur étudié est schématisé figure 2.

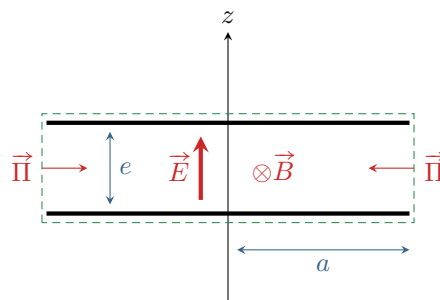


Figure 2 – Schéma des notations.

1 D'après la loi des mailles,

$$U_0 = Ri + u$$

et avec la loi de comportement du condensateur on en déduit

$$RC \frac{du}{dt} + u = U_0$$

ce qui se met sous forme canonique

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u = \frac{U_0}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC.$$

Cette équation admet  $U_0$  comme solution particulière, et les solutions homogènes sont de la forme  $A e^{-t/\tau}$ , ainsi

$$u(t) = A + U_0 e^{-t/\tau}$$

Comme le condensateur est initialement déchargé, alors

$$u(t=0) \underbrace{=}_0 \underbrace{=}_{\text{sol}} A + U_0$$

d'où on a finalement

$$u(t) = U_0 \left( 1 - e^{-t/\tau} \right).$$

**2** Par définitions, la charge stockée sur le condensateur vaut

$$q = \sigma \pi a^2 = C u = \varepsilon_0 \frac{\pi a^2}{e} u \quad \text{d'où} \quad \sigma = \frac{\varepsilon_0}{e} u$$

et ainsi

$$\vec{E} = \frac{u}{e} \vec{e}_z.$$

**3** Les sources de champ magnétique sont les courants et les variations de champ électrique. Il n'y a pas de courant entre les armatures, la seule source de champ magnétique est donc le champ électrique, ou plus exactement ses variations.

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

ce qui montre que  $\vec{j}$  et  $\partial \vec{E} / \partial t$  jouent un rôle analogue. Leurs symétries ont donc les mêmes conséquences sur le champ magnétique.

D'après la question précédente,

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{e} \frac{du}{dt} \vec{e}_z.$$

On se place en un point  $M$  quelconque. Le plan passant par  $M$  et contenant l'axe  $(Oz)$  (plan  $M, \vec{e}_r, \vec{e}_z$ ) est plan de symétrie de  $\partial \vec{E} / \partial t$ ,  $\vec{B}$  est donc orthogonal à ce plan,

$$\vec{B} = B_\theta(M) \vec{e}_\theta.$$

**4** L'équation de Maxwell-Thomson donne

$$\frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} = 0$$

c'est-à-dire que  $\vec{B}$  est indépendant de  $\theta$ . De plus, l'équation de Maxwell-Ampère donne

$$-\frac{\partial B_\theta}{\partial z} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_\theta)}{\partial r} \vec{e}_z = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{1}{e} \frac{du}{dt} \vec{e}_z.$$

On en déduit d'une part que

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial z} = 0$$

c'est-à-dire que  $\vec{B}$  est indépendant de  $z$ , et d'autre part que

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r B_\theta)}{\partial r} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{1}{e} \frac{du}{dt}.$$

Cette relation donne

$$\frac{\partial (r B_\theta)}{\partial r} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{1}{e} \frac{du}{dt} r$$

ce qui s'intègre en

$$r B_\theta = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{1}{e} \frac{du}{dt} \frac{r^2}{2} + f(t).$$

Le champ  $\vec{B}$  ne pouvant diverger en  $r = 0$  où ses sources n'ont pas de singularité, la fonction  $f(t)$  est forcément nulle. On en déduit donc

$$\vec{B} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mu_0 \frac{1}{e} \frac{du}{dt} r \vec{e}_\theta.$$

Comme on intègre une dérivée partielle, la « constante » d'intégration est en fait une « constante partielle », c'est-à-dire une fonction qui dépend des variables laissées constantes dans la dérivée partielle : ici,  $f$  doit a priori dépendre de  $z$ ,  $\theta$  et  $t$  ... mais elle ne dépend que de  $t$  car il a été montré par ailleurs que  $\vec{B}$  ne dépend ni de  $z$  ni de  $\theta$ .

5 Par définition,

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \left( \frac{u}{e} \vec{e}_z \right) \wedge \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{1}{e} \frac{du}{dt} r \vec{e}_\theta \right)$$

ce qui se simplifie en

$$\vec{\Pi} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{1}{e^2} u \frac{du}{dt} r \vec{e}_r.$$

Le flux du vecteur de Poynting correspond à une puissance sortant, la puissance entrant dans le condensateur s'écrit donc (on intègre sur la surface en pointillés verts de la figure 2)

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= - \oiint_{\text{condensateur}} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \\ &= - \iint_{\text{sup}} \Pi_r \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_z - \iint_{\text{sup}} \Pi_r \vec{e}_r \cdot (-dS \vec{e}_z) - \iint_{\text{lat}} \Pi_r \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{1}{e^2} u \frac{du}{dt} a \times 2\pi a e \end{aligned}$$

$$\mathcal{P} = \varepsilon_0 \frac{1}{e} u \frac{du}{dt} \pi a^2.$$

Cette puissance vient de l'extérieur du condensateur, et la direction de  $\vec{\Pi}$  montre qu'elle entre par les parois latérales. Un bilan analogue appliqué au générateur montrerait qu'il cède de la puissance.

On peut en fait montrer que le générateur cède une puissance  $2\mathcal{P}$ , la moitié étant stockée par le condensateur et l'autre moitié dissipée par la résistance.

6 On peut réécrire la puissance reçue sous la forme

$$\mathcal{P} = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{e} u \frac{du}{dt} = Cu \frac{du}{dt} \quad \text{soit} \quad \mathcal{P} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Cu^2 \right).$$

On reconnaît l'expression de l'énergie stockée dans le condensateur.

7 L'énergie reçue s'écrit

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty \mathcal{P} dt = \left[ \frac{1}{2} Cu^2 \right]_0^\infty$$

Avec l'expression de  $u$  déterminée à la première question (ou avec la condition initiale et la solution particulière), on obtient

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} CU_0^2.$$

## Annales de concours

### Exercice 5 : Bilan de puissance d'un conducteur

[oral banque PT | 💡 2 | ⚡ 2 | ⓧ]

1 Il s'agit de la **conductivité électrique**, notée  $\gamma$ . Celle du cuivre, l'un des meilleurs conducteurs, est de  $6 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$  ; à titre de comparaison celle de l'eau de mer n'est que de l'ordre de  $5 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ .

2 D'après la loi d'Ohm locale,

$$\vec{j} = \gamma \vec{E},$$

d'où on déduit l'intensité par calcul du flux au travers d'une section transverse, c'est-à-dire un cercle,

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \text{soit} \quad I = \pi R^2 \gamma E.$$

Pour le calcul du champ magnétique, plaçons nous en un point  $M$  repéré par ses coordonnées cylindriques, voir figure 3.

• **Invariances et symétries :**

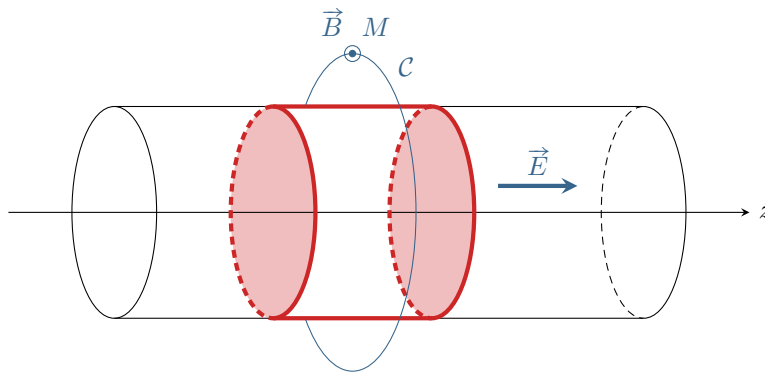


Figure 3 – Bilan de puissance électromagnétique d'un cylindre.

- ▷ La distribution de courant est invariante par translation le long de l'axe ( $Oz$ ) et par rotation autour de cet axe, le champ magnétique ne dépend donc que du rayon  $r$ .
- ▷ Le plan passant par  $M$  est contenant l'axe  $Oz$  est plan de symétrie de la distribution de courant, le champ magnétique lui est donc orthogonal : on en déduit qu'il est porté par  $\vec{u}_\theta$ .
- ▷ Conclusion :

$$\vec{B} = B_\theta(r) \vec{u}_\theta.$$

- **Théorème d'Ampère** : Raisonnons sur un contour  $\mathcal{C}$  circulaire de rayon  $r$  centré sur l'axe ( $Oz$ ) et passant par  $M$ . Comme le champ est de même norme sur ce contour, alors

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r B_\theta(r)$$

Le courant enlacé dépend de la position de  $M$  :

- ▷ si  $r > R$  alors  $I_{\text{enl}} = I = \pi R^2 \gamma E$  ;
- ▷ si  $r < R$  alors  $I_{\text{enl}} = \pi r^2 j = \pi r^2 \gamma E$

Finalement,

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 \pi R^2 \gamma E}{2\pi r} \vec{u}_\theta & r \geq R \\ \frac{\mu_0 \pi r^2 \gamma E}{2\pi r} \vec{u}_\theta & r \leq R \end{cases}$$

d'où en simplifiant

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 R^2 \gamma E}{2r} \vec{u}_\theta & r \geq R \\ \frac{\mu_0 r \gamma E}{2} \vec{u}_\theta & r \leq R \end{cases}$$

- 3** La puissance volumique dissipée par effet Joule s'écrit

$$p_{J,\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2.$$

La puissance dissipée dans le tronçon vaut donc

$$\mathcal{P}_J = \gamma E^2 \ell \pi R^2.$$

- 4** Le vecteur de Poynting s'écrit

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$$

Comme  $\vec{E}$  est porté par  $\vec{u}_z$  et  $\vec{B}$  par  $\vec{u}_\theta$  alors  $\vec{\Pi}$  est porté par  $\vec{u}_r$ .

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \times E \times \frac{\mu_0 r \gamma E}{2} (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta) = -\frac{r \gamma E^2}{2} \vec{u}_r.$$

Enfin, la puissance rayonnée au travers des parois du tronçon de cylindre est égale au flux sortant du vecteur de Poynting en  $r = R$ . Sur les surfaces verticales du cylindre (colorées de la figure 3), son flux est nul. Ainsi,

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \oint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{\Pi} \cdot dS \vec{u}_r,$$

d'où

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = -\frac{R\gamma E^2}{2} \times 2\pi R\ell$$

soit

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{ray}} = -\gamma E^2 \pi R^2 \ell.}$$

La puissance rayonnée est négative, ce qui signifie que l'énergie ne sort pas mais entre dans le cylindre au travers des parois.

5 On constate l'égalité des deux termes,

$$\mathcal{P}_J + \mathcal{P}_{\text{ray}} = 0.$$

Cela signifie que toute la puissance dissipée par effet Joule dans le cylindre y entre par rayonnement, ce qui est logique puisqu'il n'y a pas d'autre source de puissance dans le tronçon de cylindre étudié. Ce résultat est par ailleurs cohérent avec l'équation intégrale de Poynting,

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{em}}}{dt} = -\oint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} - \mathcal{P}_J = 0,$$

car en régime stationnaire l'énergie électromagnétique  $\mathcal{E}_{\text{em}}$  contenue dans le système est constante.