BLAISE PASCAL
PT 2019-2020

TD 20 – Électromagnétisme

Électromagnétisme en régime variable

- Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
- Difficulté technique et calculatoire ;
- Exercice important.

Flasher ce code pour accéder aux corrigés

Exercices

Exercice 1 : Manipulation des équations de Maxwell [1 | 2]

On suppose que règne dans l'espace le champ électromagnétique

$$\begin{cases} \vec{E}(M,t) = f(z)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\vec{e}_x \\ \vec{B}(M,t) = g(z)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\vec{e}_y \end{cases}$$

où τ est une constante de temps et f, g deux fonctions que l'on cherche à déterminer. On suppose que l'espace est vide de charges et de courants.

1 - Vérifier que la forme de ces deux champs est compatible avec les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson.

2 - Montrer que l'équation de Maxwell-Faraday impose une relation entre $g(z)$ et $f'(z)$.

3 - Montrer que l'équation de Maxwell-Ampère impose une relation entre $f(z)$ et $g'(z)$.

4 - En déduire une équation différentielle vérifiée par f. La résoudre en supposant que $\vec{E}(z{=}0, t{=}0) = E_0\,\vec{e}_x$ et que le champ électrique est nul en $z \to +\infty$ à tout instant.

5 - En déduire l'expression complète du champ électromagnétique.

Exercice 2 : Chauffage par induction [1 | 2 |]

On étudie dans cet exercice un dispositif modèle permettant de chauffer un cylindre métallique par induction électromagnétique, potentiellement jusqu'à une température supérieure à sa température de fusion. Il s'agit d'une bobine parcourue par un courant alternatif $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ de forte intensité. Au centre de cette bobine est placé un cylindre conducteur, qui est le métal à chauffer, de conductivité électrique γ. Ce principe est par exemple utilisé dans des dispositifs de soudure électromagnétique.

1 - Faire un schéma du dispositif et donner sans calcul l'expression du champ créé par la bobine. Pour simplifier, on négligera tout effet de bord, ce qui revient à l'assimiler à un solénoïde infini.

2 - Justifier qu'un champ électrique apparaît au sein de la bobine. En déduire qualitativement pourquoi le métal placé au centre chauffe.

On peut montrer que le champ électrique induit dans le métal est de la forme $\vec{E} = E_\theta(r,t)\vec{e}_\theta$.

3 - Exprimer $\vec{E}$ en fonction notamment de r et I_0.

4 - En déduire la densité de courant induite dans le matérieau, puis l'expression de la puissance volumique dissipée par effet Joule. Où le métal va-t-il fondre en premier ?

Donnée : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$

Exercice 3 : Émission radioactive [2 | 2]

Un amas d'atomes radioactifs, supposé ponctuel, émet à partir de l'instant $t = 0$ des particules α avec une vitesse constante v_0. On suppose la distribution de la direction d'émission isotrope. On rappelle que les particules α sont des noyaux d'hélium ${}^4_2\mathrm{He}$, et on admet qu'à l'instant t la charge électrique de l'amas vaut

$$q(t) = Q_0\left(\mathrm{e}^{-t/\tau} - 1\right) \qquad \text{avec} \qquad Q_0 > 0\,.$$

1 - Vérifier qualitativement la cohérence de la loi $q(t)$.

2 - Montrer par étude des symétries que le champ magnétique est nul en tout point de l'espace.

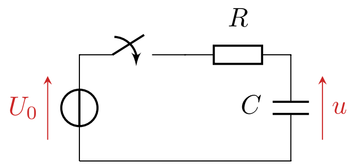
3 - Calculer le champ électrique $\overrightarrow{E}(M,t)$ en tout point M de l'espace. On pourra l'exprimer en fonction de $t - r/v_0$.

4 - Déterminer les densités volumiques de charge $\rho(M,t)$ puis de courant $\overrightarrow{j}(M,t)$.

Donnée : En coordonnées sphériques, on donne pour un champ $\overrightarrow{A} = A_r(r,t)\overrightarrow{u_r}$

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} = \overrightarrow{0}\,.$$

Exercice 4 : Modélisation électromagnétique de la charge d'un condensateur [2 | 2]



Le but de l'exercice est d'étudier le bilan énergétique du circuit ci-contre par une approche électromagnétique. Le condensateur est initialement déchargé, et l'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$.

1 - Déterminer l'évolution de $u(t)$ par une approche électrocinétique.

Le condensateur est modélisé par deux disques parallèles de rayons a, d'axe (Oz), séparés une épaisseur $e \ll a$, de sorte que l'on puisse considérer que le condensateur est un plan chargé infiniment grand. Le milieu entre les armatures est assimilé au vide. On suppose la charge suffisamment lente pour pouvoir généraliser les résultats obtenus en électrostatique : $C = \varepsilon_0 \pi a^2/e$ et dans l'espace inter-armatures

$$\overrightarrow{E}(M,t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}\overrightarrow{e_z}\,.$$

2 - Exprimer $\overrightarrow{E}$ en fonction de u dans l'espace inter-armatures.

3 - Quelles sont les sources de champ magnétique entre les armatures ? Justifier à partir d'une équation de Maxwell que les propriétés de symétrie de $\overrightarrow{j}$ et de $\partial\overrightarrow{E}/\partial t$ ont les mêmes conséquences sur le champ magnétique. En déduire que $\overrightarrow{B} = B_\theta \overrightarrow{e_\theta}$.

4 - En utilisant les équations de Maxwell, déterminer $\overrightarrow{B}$ en fonction de u dans l'espace inter-armatures.

5 - Exprimer le vecteur de Poynting à l'intérieur du condensateur. En déduire l'expression de la puissance rentrant dans le volume entre les armatures. D'où vient cette puissance ?

6 - Réécrire la puissance entrante comme la dérivée temporelle d'une fonction de C et u. Commenter le résultat obtenu.

7 - En déduire l'expression de l'énergie électromagnétique qui est entrée dans le condensateur pendant la charge en fonction de C et U_0.

Donnée :

- ▷ $\mathrm{div}\,\overrightarrow{B} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial B_z}{\partial z}$
- ▷ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} = \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial B_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial B_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\dfrac{\partial B_r}{\partial z} - \dfrac{\partial B_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial B_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$

Annales de concours

Exercice 5 : Bilan de puissance d'un conducteur [oral banque PT | 2 | 2 |]

Considérons un conducteur cylindrique de rayon R, infini, d'axe Oz, soumis à un champ électrique $\overrightarrow{E}$ uniforme et stationnaire orienté suivant $\overrightarrow{u_z}$. On raisonne sur un tronçon de cylindre de longueur ℓ.

1 - Quel paramètre caractérise l'aspect conducteur d'un matériau ? Donner son unité et un ordre de grandeur.

2 - Calculer l'intensité traversant le cylindre. En déduire le champ magnétique créé par le cylindre.

3 - Déterminer la puissance dissipée par effet Joule.

4 - Exprimer la puissance rayonnée à travers les parois du cylindre.

5 - En déduire le bilan de puissance et le commenter.