



Ondes électromagnétiques

Exercices

Exercice 1 : Onde sphérique

[💡 1 | ✂ 1]

1 Le vecteur d'onde de l'onde sphérique est donné par $\vec{k} = k \vec{e}_r$.

2 Le champ magnétique est donné par

$$\vec{B} = \vec{e}_r \wedge \frac{\vec{E}}{c} = \frac{E_0(r)}{c} \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\varphi.$$

3 Par définition,

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0(r)^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kr) \vec{e}_r.$$

Sachant que $\langle \cos^2(\omega t - kr) \rangle = 1/2$, on en déduit

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0(r)^2}{\mu_0 c} \vec{e}_r.$$

4 La puissance rayonnée au travers d'une sphère de rayon r vaut

$$\mathcal{P} = \iint_{\text{sphère}} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S}.$$

Comme $\langle \vec{\Pi} \rangle$ est uniforme sur la sphère, on en déduit directement

$$\mathcal{P} = \frac{E_0(r)^2}{2\mu_0 c} \times 4\pi r^2 \quad \text{soit} \quad \mathcal{P} = \frac{2\pi r^2 E_0(r)^2}{\mu_0 c}.$$

Comme l'onde se propage dans le vide, elle n'est **ni absorbée ni amplifiée, elle ne fait que s'étaler** dans l'espace : la puissance \mathcal{P} est donc indépendante du rayon de la sphère. On en déduit

$$E_0(r)^2 = \frac{\mu_0 c}{2\pi r^2} \mathcal{P} \quad \text{d'où} \quad E_0(r) = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu_0 c}{2\pi} \mathcal{P}}.$$

Exercice 2 : Un exemple d'OPPM

[💡 1 | ✂ 3]

1 D'après la relation de dispersion,

$$f = \frac{c}{\lambda} = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}.$$

Cette onde appartient au domaine **optique**, comme le montre d'ailleurs sa longueur d'onde de 600 nm.

2 Par définition, on peut identifier

$$\exp \left[i \left(\frac{K}{3} (2x + 2y - z) - \omega t \right) \right] = \exp \left[i \left(\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \omega t \right) \right]$$

ce qui donne

$$k_x x + k_y y + k_z z = \frac{K}{3}(2x + 2y - z) \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{k} = \frac{2K}{3}\vec{e}_x + \frac{2K}{3}\vec{e}_y - \frac{K}{3}\vec{e}_z.}$$

On déduit

$$\|\vec{k}\| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = K\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = K \quad \text{d'où} \quad \boxed{K = \frac{2\pi}{\lambda} = 1,0 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}.}$$

3 Par définition, un plan d'onde est une surface sur laquelle le champ électrique est uniforme à tout instant, soit

$$\exp\left[i\left(\frac{K}{3}(2x + 2y - z) - \omega t\right)\right] = \text{cte.}$$

Ainsi, les plans d'onde sont tous les plans parallèles d'équation

$$\boxed{2x + 2y - z = \text{cte.}}$$

4 Compte tenu de la convention de signe dans l'exponentielle, l'équation de Maxwell-Gauss en représentation complexe s'écrit

$$+i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{soit} \quad k_x E_x + k_y E_y = 0 \quad \text{d'où} \quad E_y = -\frac{k_x}{k_y} E_x$$

Compte tenu de ce qui précède, $k_x = k_y$ donc on en déduit

$$\boxed{E_y = -E_x = -E_0 \exp\left[i\left(\frac{K}{3}(2x + 2y - z) - \omega t\right)\right].}$$

5 D'après la relation de structure appliquée à l'OPPM,

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{K E_x}{3\omega}(2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z) \wedge (\vec{e}_x - \vec{e}_y).$$

En développant le produit vectoriel par la droite,

$$(2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z) \wedge (\vec{e}_x - \vec{e}_y) = (\vec{0} - 2\vec{e}_z - \vec{e}_y) - (2\vec{e}_z + \vec{0} - \vec{e}_x) = -\vec{e}_x - \vec{e}_y - 4\vec{e}_z.$$

On en déduit alors

$$\boxed{\vec{B} = -\frac{K E_x}{3\omega}(\vec{e}_x + \vec{e}_y + 4\vec{e}_z).}$$

6 Avec les champs réels, la densité volumique d'énergie s'écrit

$$w_{\text{em}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

et donc avec les champs complexes

$$\langle w_{\text{em}} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\frac{\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E}^*}{2} + \frac{\vec{B} \cdot \vec{B}^*}{2\mu_0} \right].$$

Compte tenu des expressions précédentes, $\vec{E} = E_x(\vec{e}_x - \vec{e}_y)$ donc

$$\vec{E} \cdot \vec{E}^* = |E_x|^2 (1 + 1) = 2E_0^2$$

$$\text{et } \vec{B} = -\frac{E_x}{3c}(\vec{e}_x + \vec{e}_y + 4\vec{e}_z)$$

$$\vec{B} \cdot \vec{B}^* = \frac{|E_x|^2}{9c^2} (1 + 1 + 16) = \frac{2E_0^2}{c^2}$$

ce qui donne finalement

$$\langle w_{\text{em}} \rangle = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E_0^2 + \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \right) \quad \text{soit} \quad \boxed{\langle w_{\text{em}} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2}.$$

Elle est **uniforme**, comme attendu pour une OPPM.

7 La moyenne du vecteur de Poynting vaut

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0}.$$

En développant par la gauche, le produit vectoriel donne

$$(\vec{e}_x - \vec{e}_y) \wedge (\vec{e}_x + \vec{e}_y + 4\vec{e}_z) = (\vec{0} + \vec{e}_z - 4\vec{e}_y) - (-\vec{e}_z + \vec{0} + 4\vec{e}_x) = -4\vec{e}_x - 4\vec{e}_y + 2\vec{e}_z.$$

Ainsi,

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = -\frac{1}{2} \frac{|E_x|^2}{3c\mu_0} (-4\vec{e}_x - 4\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) \quad \text{soit} \quad \boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{3c\mu_0} (2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z)}.$$

Le vecteur de Poynting est **colinéaire au vecteur d'onde**, comme attendu pour une OPPM.

Exercice 3 : Loi de Malus

[2 | 1]

1 Voir figure 1.

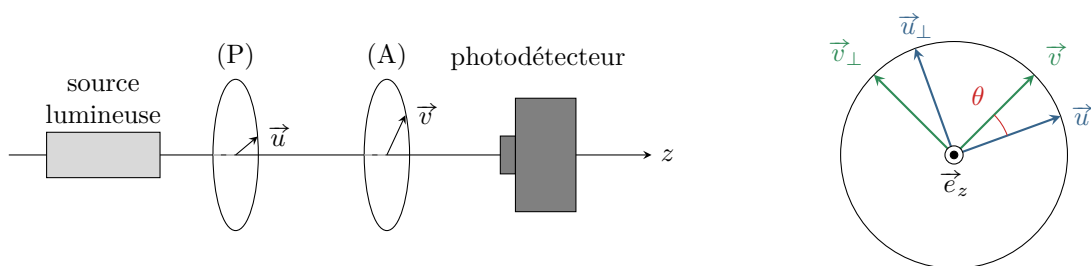


Figure 1 – Étude expérimentale de la loi de Malus.

2 Par définition, en sortie du polariseur, l'onde est polarisée rectilignement selon son axe passant. Ainsi,

$$\vec{E}_P(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k = \frac{2\pi}{\lambda} \\ \omega = kc = \frac{2\pi c}{\lambda} \end{cases},$$

d'où on déduit

$$\boxed{\vec{E}_P(z, t) = E_0 \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] \vec{u} .}$$

Comme l'onde est progressive dans le sens des z croissants, il n'y a pas de surprise à voir apparaître la variable $ct - z$.

3 En s'appuyant sur la figure 1 pour exprimer \vec{u} dans la base \mathcal{B}_A , on obtient

$$\boxed{\vec{E}_P(z, t) = E_0 \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] (\cos \theta \vec{v} - \sin \theta \vec{v}_\perp) .}$$

En sortie du polariseur, la composante sur son axe passante est transmise et la composante orthogonale est coupée, d'où

$$\boxed{\vec{E}_{PA}(z, t) = E_0 \cos \theta \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] \vec{v} .}$$

Le champ magnétique s'obtient par la relation de structure,

$$\vec{B}_{PA} = \vec{e}_z \wedge \frac{\vec{E}_{PA}}{c} = \frac{E_0}{c} \cos \theta \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] (\vec{e}_z \wedge \vec{v}),$$

et comme par construction de la base \mathcal{B}_A on a $\vec{e}_z \wedge \vec{v} = \vec{v}_\perp$, alors

$$\vec{B}_{PA}(z, t) = \frac{E_0}{c} \cos \theta \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] \vec{v}_\perp.$$

Enfin,

$$\vec{\Pi}_{PA} = \frac{\vec{E}_{PA} \wedge \vec{B}_{PA}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2 \theta \cos^2 \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] (\vec{v} \wedge \vec{v}_\perp)$$

et ainsi

$$\vec{\Pi}_{PA} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2 \theta \cos^2 \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] \vec{e}_z.$$

4 Par définition de l'intensité lumineuse, en notant z_0 la position du détecteur,

$$I = \left\langle \frac{1}{S} \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{S} \times \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2 \theta \cos^2 \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct - z_0) \right] S \right\rangle$$

car le vecteur de Poynting est uniforme sur toute la surface du détecteur (l'onde est plane) et $d\vec{S} = dS \vec{e}_z$. On en déduit directement

$$I = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2 \theta \left\langle \cos^2 \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct - z_0) \right] \right\rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2 \theta \times \frac{1}{2}$$

ce qui s'écrit bien sous la forme

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad \text{avec} \quad I_0 = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}.$$

Annales de concours

Exercice 4 : Blocage d'appel

[oral banque PT | 💡 1 | ⚡ 2 | ☹️]

1 Les téléphones mobiles émettent à des fréquences f de l'ordre de **2 GHz**, ce qui correspond à des longueurs d'onde $\lambda = c/f$ de l'ordre de **15 cm**.

2 On se place dans l'ARQS : le conducteur est neutre en volume et le courant de déplacement est négligeable. On exprime $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E})$ de deux façons différentes : d'une part

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) \underset{\text{MF}}{=} -\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) \underset{\text{MA}}{=} -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \underset{\text{Ohm}}{=} -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

et d'autre part

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} \underset{\text{MG}}{=} -\Delta \vec{E},$$

et ainsi en identifiant on obtient

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}.$$

L'équation de propagation dans le vide s'écrit

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

On constate que l'ordre de la dérivée temporelle n'est pas le même : au lieu d'une équation de d'Alembert, on obtient dans le conducteur une **équation de diffusion**. Cela traduit que l'onde électromagnétique **ne se propage pas** dans le métal, mais lui cède son énergie par effet Joule. L'onde **est absorbée par le métal**.

3 Cherchons une solution de la forme indiquée par l'énoncé. En injectant,

$$-\underline{k}^2 \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)} - i\gamma \mu_0 \omega \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)} = \vec{0}$$

et en simplifiant

$$-\underline{k}^2 - i\mu_0 \gamma \omega = 0 \quad \text{soit} \quad \underline{k}^2 = -i\mu_0 \gamma \omega.$$

En prenant la « racine carrée », $-i = e^{-i\pi/2} = (e^{-i\pi/4})^2 = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2$, il vient

$$\underline{k} = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_0 \gamma \omega}.$$

Dimensionnellement, on identifie une longueur caractéristique

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}.$$

Identifions la solution physique parmi les deux solutions mathématiques. En injectant l'expression de \underline{k} dans celle de l'onde cherchée, on trouve

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\pm z/\delta} e^{i(\omega t \pm z/\delta)}.$$

Comme on cherche une onde se propageant dans le sens des z croissants, c'est le signe \ominus qu'il faut garder :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)}.$$

Ces solutions **ne sont pas** des OPPH car leur amplitude diminue au cours de la propagation : on parle plutôt de pseudo-OPPH.

Les deux signes \pm apparaissant dans les exponentielles réelle et complexe ne sont pas indépendants ! C'est d'ailleurs physiquement rassurant : si les signes étaient choisis opposés, cela pourrait impliquer qu'une onde se propageant dans le sens des z croissants (signe \ominus dans l'exponentielle complexe) est amplifiée (!) au cours de sa propagation dans le métal (signe \oplus dans l'exponentielle réelle).

4 La longueur caractéristique sur laquelle le champ électrique s'atténue est bien sûr δ . Pour un métal, $\gamma \sim 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ (p.ex. $3,7 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ pour Al ou $6 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ pour Cu), d'où

$$\delta \sim 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$$

Ainsi, au delà de quelques microns, l'onde électromagnétique est **complètement absorbée par le métal**. Cela justifie l'hypothèse de plaque infinie : que sa longueur soit quelques millimètres, centimètres ou kilomètres il n'y a aucune onde transmise au travers de la plaque. Le second téléphone ne reçoit donc plus l'appel.

Exercice 5 : Onde électromagnétique confinée

[oral Mines-Ponts PSI | 💡 1 | ✂ 2 | ⊗]

1 D'après l'équation de d'Alembert,

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad -k^2 \vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \omega^2 = k^2 c^2$$

et avec ω et k positifs

$$\omega = kc.$$

2 Appelons ① le vide ($z < 0$) et ② le conducteur ($z > 0$), soit $\vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{e}_z$. En ne tenant compte que de l'onde incidente, d'après la relation de passage en $z = 0$,

$$-E_0 e^{i\omega t} \vec{e}_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z.$$

⚠ ⚠ ⚠ Attention ! La relation de passage s'exprime à l'interface, donc uniquement en $z = 0$: il ne faut pas garder de terme en kz lorsque vous l'écrivez.

Comme $E_0 \neq 0$, il y a **contradiction** : il existe une onde réfléchie de la forme

$$\vec{E}_r = E'_0 e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x.$$

J'ai traité le cas général en cours, mais dans un exercice qui ne précise pas la forme de l'onde réfléchie, je pense que vous pouvez sans peine admettre qu'il y a conservation de la polarisation à la réflexion, ce qui allège les calculs.

Comme l'onde totale est $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r$, la relation de passage donne cette fois

$$-(E_0 e^{i\omega t} + E'_0 e^{i\omega t}) = 0 \quad \text{soit} \quad E'_0 = -E_0.$$

Ainsi, l'onde réfléchie est en opposition de phase avec l'onde incidente, et l'onde totale s'écrit

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_0 e^{j\omega t} (e^{-jkz} - e^{jkz}) \vec{e}_x$$

soit

$$\vec{E} = -2jE_0 \sin(kz) e^{j\omega t} \vec{e}_x = 2E_0 \sin(kz) e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} \vec{e}_x.$$

Il s'agit d'une **onde stationnaire** : les variables de temps et d'espace sont découplées.

3 D'après l'équation de Maxwell-Faraday,

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot } \vec{E} = +\frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{e}_y$$

compte tenu des termes nuls. Ainsi,

$$-j\omega \vec{B} = -2jE_0 k \cos(kz) e^{j\omega t} \quad \text{d'où} \quad \vec{B} = \frac{2E_0}{c} \cos(kz) e^{j\omega t} \vec{e}_y,$$

en simplifiant $k/\omega = 1/c$.

Méthode alternative : L'onde incidente et l'onde réfléchie sont deux OPPH, qui vérifient donc chacune la relation de structure. Ainsi,

$$\vec{B}_i = \vec{e}_z \wedge \frac{\vec{E}_i}{c} = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_y$$

$$\vec{B}_r = -\vec{e}_z \wedge \frac{\vec{E}_r}{c} = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t + kz)} \vec{e}_y$$

et pour l'onde résultante, par superposition,

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} e^{j\omega t} (e^{-jkz} + e^{jkz}) \vec{e}_y \quad \text{soit} \quad \vec{B} = \frac{2E_0}{c} \cos(kz) e^{j\omega t} \vec{e}_y.$$

⚠ ⚠ ⚠ **Attention !** La relation de structure ne s'applique qu'à des OPPH. L'appliquer à une onde stationnaire est faux : le vecteur d'onde n'est même pas défini ...

4 D'après la relation de passage sur le champ magnétique appliquée en $z = 0$,

$$\mu_0 \vec{j}_s = \vec{e}_z \wedge \left(\vec{0} - \frac{2E_0}{c} e^{j\omega t} \vec{e}_y \right) \quad \text{soit} \quad \mu_0 \vec{j}_s = \frac{2E_0}{c} e^{j\omega t} \vec{e}_x.$$

Ainsi, il existe un courant surfacique à la surface du conducteur parfait valant

$$\vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} e^{j\omega t} \vec{e}_x.$$

Interprétons qualitativement cette expression. Le champ électrique incident met en mouvement les électrons en surface du conducteur, d'où la direction \vec{e}_x du courant de surface. En retour, ce courant de surface créé également un champ électrique : le champ réfléchi. Ce champ existe non seulement dans le vide, mais aussi dans le conducteur, à ceci près qu'il se déplace selon $+\vec{e}_z$. Comme il est de même amplitude mais en opposition de phase avec le champ incident, cela permet d'interpréter la nullité du champ total dans le conducteur.

5 Comme précédemment, la relation de passage en $z = -L$ impose que le champ total \vec{E} soit nul en $z = -L$ à tout instant, d'où on déduit

$$\sin(kL) = 0 \quad \text{d'où} \quad kL = n\pi, \quad n \text{ entier,} \quad \text{soit} \quad k = \frac{n\pi}{L}$$

Ces ondes sont les modes propres de la cavité formée des deux conducteurs. La relation précédente peut s'écrire en termes de longueurs d'onde ou de fréquence,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{n} \quad \text{et} \quad f = \frac{kc}{2\pi} = \frac{nc}{2L}.$$

On retrouve une claire analogie avec les modes propres d'une corde de Melde.

6 La puissance surfacique est reliée au vecteur de Poynting, qu'il faut calculer à partir des champs réels

$$\vec{E} = 2E_0 \sin(kz) \sin(\omega t) \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{2E_0}{c} \cos(kz) \cos(\omega t) \vec{e}_y$$

d'où

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c} \cos(kz) \sin(kz) \cos(\omega t) \sin(\omega t) \vec{e}_z$$

Or

$$\cos(\omega t) \sin(\omega t) = \frac{\sin(2\omega t)}{2} \quad \text{et} \quad \langle \sin(2\omega t) \rangle = 0$$

ce qui donne

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$$

En moyenne, l'énergie ne se propage pas dans la cavité, ce qui est cohérent avec le fait que les ondes y soient stationnaires.

Méthode alternative : En moyenne,

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2\mu_0} \times 2E_0 \sin(kz) \times \frac{2E_0}{c} \cos(kz) \times \operatorname{Re} \left(e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} e^{-j\omega t} \right) (-\vec{e}_y)$$

ce qui donne

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$$

car $e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} e^{-j\omega t} = e^{-j\pi/2} = -j$, c'est-à-dire un imaginaire pur.

Exercice 6 : Voile solaire

[oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 2]

1 Supposons que l'OPPM incidente se propage dans le sens des z croissants et qu'elle est polarisée selon (Ox). Elle s'écrit alors

$$\vec{E}_i = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x$$

On cherche l'onde réfléchie sous la forme d'une OPPM se propageant en sens inverse et de polarisation a priori quelconque,

$$\vec{E}_r = \underline{E}_r e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x + \underline{E}'_r e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_y$$

Supposons la voile située en $z > 0$ et le vide en $z < 0$. La relation de passage en $z = 0$ donne

$$\vec{0} - \left[\vec{E}_i(z=0^-, t) + \vec{E}_r(z=0^-, t) \right] = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

En projection sur \vec{e}_y on obtient de façon immédiate

$$\underline{E}'_r = 0$$

et en projection sur \vec{e}_x on trouve

$$E_0 + \underline{E}_r = 0 \quad \text{d'où} \quad \underline{E}_r = -E_0$$

Ainsi, l'onde réfléchie s'écrit

$$\vec{E}_r = -E_0 e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x$$

2 D'après la relation de structure, les champs magnétiques des ondes incidente et réfléchie s'écrivent respectivement

$$\begin{cases} \vec{B}_i = \vec{e}_z \wedge \frac{\vec{E}_i}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y \\ \vec{B}_r = (-\vec{e}_z) \wedge \frac{\vec{E}_r}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_y \end{cases}$$

Le champ magnétique total en $z = 0^-$ vaut donc

$$\vec{B}(z=0^-, t) = \vec{B}_i(z=0^-, t) + \vec{B}_r(z=0^-, t) = \frac{2E_0}{c} e^{i\omega t} \vec{e}_y$$

La relation de passage en $z = 0$ donne alors

$$\underline{\vec{j}}_s = \vec{e}_z \wedge \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{2E_0}{c} e^{i\omega t} \vec{e}_y \right) \quad \text{soit} \quad \boxed{\underline{\vec{j}}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} e^{i\omega t} \vec{e}_x .}$$

3 La densité volumique de force de Lorentz en présence d'une densité volumique de courant \vec{j} s'écrit

$$\vec{f}_{\text{vol}} = \vec{j} \wedge \vec{B} .$$

Par analogie, la densité surfacique de force de Lorentz peut ici s'écrire

$$\boxed{\vec{f}_{\text{surf}} = \underline{\vec{j}}_s(t) \wedge \vec{B}(z=0, t) .}$$

Sa valeur moyenne vaut

$$\langle \vec{f}_{\text{surf}} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\underline{\vec{j}}_s(t) \wedge \vec{B}^*(z=0, t) \right)$$

Rappelons que \vec{B}^* est le conjugué de \vec{B} .

Attention, l'expression de la force étant non linéaire il n'est pas possible de calculer sa valeur instantanée à partir des grandeurs complexes mais seulement sa valeur moyenne ... sans oublier ni la partie réelle ni le facteur $1/2$. Pour obtenir la valeur instantanée, il n'y a pas d'autre possibilité que de revenir aux grandeurs réelles.

À partir des expressions précédentes,

$$\underline{\vec{j}}_s(t) \wedge \vec{B}^*(z=0, t) = \frac{2E_0}{\mu_0 c} e^{i\omega t} \times \frac{2E_0}{c} e^{-i\omega t} (\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y) = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c^2} \vec{e}_z .$$

Comme $\mu_0 c^2 = 1/\varepsilon_0$, on en déduit finalement

$$\boxed{\langle \vec{f}_{\text{surf}} \rangle = 2\varepsilon_0 E_0^2 \vec{e}_z .}$$

Elle est dirigée selon $+\vec{e}_z$, c'est-à-dire dans le sens de propagation du rayonnement solaire, comme on pouvait s'y attendre.

Exercice 7 : Guide d'ondes

[oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2 | ⊕]

1 En développant les exponentielles complexes,

$$\vec{E} = A e^{i(\omega t - k_1 x + k_2 y)} \vec{e}_z + B e^{i(\omega t - k_1 x - k_2 y)} .$$

Il s'agit bien d'une superposition de deux OPPH, de vecteurs d'ondes respectifs $\vec{k}_{\pm} = k_1 \vec{e}_x \pm k_2 \vec{e}_y$.

2 Les champs sont **nuls** dans un conducteur parfait. Considérons le plan $y = 0$. Ce plan est de normale \vec{e}_y et le champ polarisé selon \vec{e}_z : il est donc continu à l'interface. Ainsi, pour tout x et tout t ,

$$\vec{E}(y=0) = \vec{0} \quad \text{soit} \quad (A + B) e^{i(\omega t - k_1 x)} = 0$$

d'où la relation

$$\boxed{A + B = 0 .}$$

De même, la condition limite en $y = a$ s'écrit

$$\vec{E}(y=a) = \vec{0} \quad \text{soit} \quad A e^{ik_2 a} + B e^{-ik_2 a} = 0$$

et comme $A = -B$ alors

$$e^{ik_2 a} - e^{-ik_2 a} = 2i \sin(k_2 a) = 0 .$$

En introduisant un entier n positif, on en déduit

$$k_2 a = n\pi \quad \text{soit} \quad \boxed{k_2 = \frac{n\pi}{a} .}$$

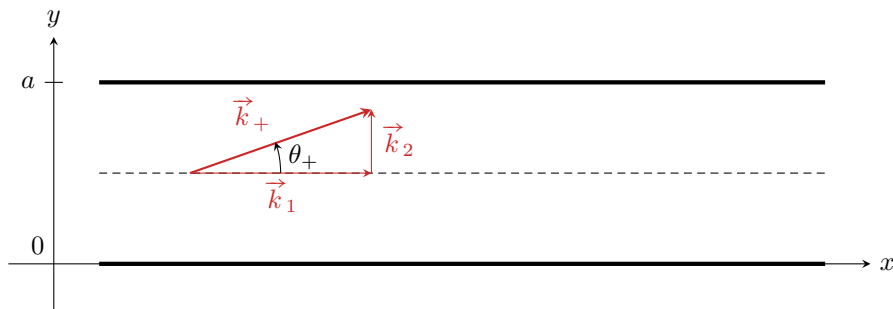


Figure 2 – Vecteur d’onde dans un guide d’onde. Le vecteur d’onde d’une seule des deux OPPH est représenté.

3 Raisonnons sur la figure 2. L’inclinaison de l’onde est donnée par celle de son vecteur d’onde \vec{k}_{\pm} . Géométriquement, on constate

$$\sin \theta_+ = \frac{k_2}{k_+}$$

On peut alors remplacer k_2 par son expression, et utiliser la relation de dispersion $k_+ = \omega/c$ car il s’agit du vecteur d’onde d’une OPPH. Ainsi,

$$\sin \theta_+ = \frac{n\pi/a}{\omega/c} = \frac{n\pi c}{a\omega} = \frac{2\pi c}{\omega} \frac{n}{2a}$$

et finalement

$$\sin \theta_+ = \frac{n\lambda}{2a}.$$

L’expression est la même pour l’onde \ominus en changeant simplement le signe.

4 De la question précédente, on déduit

$$\sin \theta_+ = \frac{n\lambda}{2a} < 1 \quad \text{soit} \quad \lambda < \frac{2a}{n}.$$

La plus petite valeur de n étant 1, on en déduit que seules les ondes de longueur d’onde

$$\lambda < \lambda_{\max} = 2a$$

peuvent se propager dans le guide.

5 Comme $A = -B$, alors

$$\vec{E} = A [e^{ik_2y} - e^{-ik_2y}] e^{i(\omega t - k_1x)} \vec{e}_z \quad \text{soit} \quad \vec{E} = 2iA \sin(k_2y) e^{i(\omega t - k_1x)} \vec{e}_z.$$

L’onde est donc de type **progressive** dans la direction x le long du guide, et **stationnaire** dans la direction y perpendiculaire.

Exercice 8 : Approche énergétique de l’effet de peau

[oral banque PT | 💡 3 | ✂ 2]

1 Il s’agit **bien d’une onde plane**, car \vec{E} prend la même valeur en tout point des plans $z = \text{cte}$, mais elle n’est **pas progressive** à cause de l’exponentielle décroissante. Le paramètre α représente à la fois le **vecteur d’onde** et l’**inverse de la longueur d’amortissement** (longueur de peau) de l’onde. L’onde est **polarisée rectilignement** selon \vec{u}_x .

2 🚫🚫🚫 **Attention !** Pour pouvoir identifier $\vec{\text{rot}} \leftrightarrow -j\vec{k} \wedge$, il faut écrire l’onde avec un vecteur d’onde complexe, soit

$$\vec{E} = E_0 \exp [j(\omega t - (1-j)\alpha z)] \vec{u}_x,$$

d’où on identifie $\vec{k} = (1-j)\alpha \vec{u}_z$. D’après l’équation de Maxwell-Faraday,

$$-j\vec{k} \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad \text{soit} \quad (1-j)\alpha \vec{u}_z \wedge E_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \alpha z)} \vec{u}_x = \omega \vec{B}$$

d’où

$$\vec{B} = \frac{(1-j)\alpha E_0}{\omega} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \alpha z)} \vec{u}_y.$$

3 Le vecteur de Poynting est défini par

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$$

Sa moyenne temporelle vaut

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right).$$

Or

$$\vec{E} \wedge \vec{B}^* = \frac{(1+j)\alpha E_0^2}{\mu_0 \omega} e^{-2\alpha z} \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y$$

d'où

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\alpha E_0^2}{2\mu_0 \omega} e^{-2\alpha z} \vec{u}_z.$$

Attention ! Les champs complexes ne donnent accès qu'à la moyenne temporelle. Trouver le vecteur de Poynting instantané exige de revenir aux champs réels.
(et bien sûr on peut aussi passer par les champs réels pour trouver $\langle \vec{\Pi} \rangle$)

4 Puissance moyenne entrant par la face située en z :

$$\langle \mathcal{P}_e \rangle = \iint \langle \vec{\Pi}(z) \rangle \cdot dS \vec{u}_z = \frac{\alpha E_0^2}{2\mu_0 \omega} S e^{-2\alpha z}.$$

Puissance moyenne sortant par la face située en $z + dz$:

$$\langle \mathcal{P}_s \rangle = \iint \langle \vec{\Pi}(z + dz) \rangle \cdot dS \vec{u}_z = \frac{\alpha E_0^2}{2\mu_0 \omega} S e^{-2\alpha(z+dz)}.$$

La puissance entrant dans le conducteur mais n'en sortant pas est cédée au conducteur. Ainsi,

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle = \mathcal{P}_e - \mathcal{P}_s = \frac{\alpha E_0^2}{2\mu_0 \omega} S \left(e^{-2\alpha z} - e^{-2\alpha(z+dz)} \right).$$

En utilisant un développement limité

$$e^{-2\alpha z} - e^{-2\alpha(z+dz)} \simeq 2\alpha e^{-2\alpha z} dz,$$

on obtient

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle = \frac{\alpha E_0^2}{2\mu_0 \omega} S \times 2\alpha e^{-2\alpha z} dz$$

et finalement

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle = \frac{\alpha^2 E_0^2}{\mu_0 \omega} S e^{-2\alpha z} dz.$$

5 La puissance volumique dissipée par effet Joule vaut $\mathcal{P}_{J,\text{vol}} = \gamma E^2$ donc en moyenne et sur la tranche de volume $S dz$,

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\gamma \vec{E} \cdot \vec{E}^* \right) S dz$$

soit

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle = \frac{\gamma E_0^2}{2} e^{-2\alpha z} S dz.$$

6 Par identification,

$$\frac{\alpha^2 E_0^2}{\mu_0 \omega} S e^{-2\alpha z} dz = \frac{\gamma E_0^2}{2} e^{-2\alpha z} S dz,$$

soit en simplifiant

$$\frac{\alpha^2}{\mu_0 \omega} = \frac{\gamma}{2} \quad \text{d'où} \quad \alpha = \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}}.$$

La longueur de peau $\delta = 1/\alpha$ s'écrit finalement

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}.$$

Exercice 9 : Cinémomètre à effet Doppler

[écrit PT modélisation 2018 | 💡 2 | ✂ 2 | Ⓜ]

1.a La force de Lorentz s'écrit

$$\vec{F}_L = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \quad \text{et} \quad \vec{F}'_L = q \left(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}' \right).$$

1.b Par identification des deux expressions,

$$\begin{aligned} \vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}' &= \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \\ \vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}' &= \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} + \vec{v}' \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

Cette égalité étant vérifiée pour toute vitesse \vec{v}' , on en déduit

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} \quad \text{et} \quad \vec{B}' = \vec{B}.$$

2.a La relation de structure s'écrit

$$\vec{B} = \vec{u} \wedge \frac{\vec{E}}{c},$$

avec \vec{u} la direction de propagation de l'onde.**2.b** L'onde incidente se propage selon $+\vec{u}_x$, donc

$$\vec{E}'_i = \vec{E}_i + \vec{V} \wedge \left(\vec{u}_x \wedge \frac{\vec{E}_i}{c} \right) = E_i + V \vec{u}_x \wedge \left(\vec{u}_x \wedge \frac{E_{i,y} \vec{u}_y}{c} \right)$$

Comme

$$\vec{u}_x \wedge (\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y) = \vec{u}_x \wedge \vec{u}_z = -\vec{u}_y$$

on en déduit

$$\vec{E}'_i = \vec{E}_i - \frac{V}{c} E_{i,y} \vec{u}_y \quad \text{soit} \quad \vec{E}'_i = \left(1 - \frac{V}{c} \right) \vec{E}_i.$$

L'onde réfléchie se propageant selon $-\vec{u}_x$, le calcul est identique au signe près et donne

$$\vec{E}'_r = \left(1 + \frac{V}{c} \right) \vec{E}_r.$$

3.a La densité volumique de puissance Joule cédée par le champ au conducteur vaut

$$p_J = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma \vec{E}^2.$$

Pour un conducteur parfait, $\gamma \rightarrow \infty$. Comme **une puissance ne peut pas diverger**, cela impose d'avoir $E = 0$ au sein du conducteur.**3.b** D'après ce qui précède,

$$\begin{cases} \vec{E}'_i(x_{\text{cible}}, t) = \left(1 - \frac{V}{c} \right) E_0 \cos \left\{ 2\pi f_i \left(t - \frac{x_{\text{cible}}}{c} \right) \right\} \vec{u}_y \\ \vec{E}'_r(x_{\text{cible}}, t) = \left(1 + \frac{V}{c} \right) r E_0 \cos \left\{ 2\pi f_r \left(t + \frac{x_{\text{cible}}}{c} \right) \right\} \vec{u}_y \end{cases}$$

Comme $x_{\text{cible}} = Vt$,

$$\begin{cases} \vec{E}'_i(x_{\text{cible}}, t) = \left(1 - \frac{V}{c} \right) E_0 \cos \left\{ 2\pi f_i \left(1 - \frac{V}{c} \right) t \right\} \vec{u}_y \\ \vec{E}'_r(x_{\text{cible}}, t) = \left(1 + \frac{V}{c} \right) r E_0 \cos \left\{ 2\pi f_r \left(1 + \frac{V}{c} \right) t \right\} \vec{u}_y \end{cases}$$

3.c D'après la relation de passage, on a à tout instant

$$\left(1 - \frac{V}{c}\right) \cos \left\{ 2\pi f_i \left(1 - \frac{V}{c}\right) t \right\} + \left(1 + \frac{V}{c}\right) r \cos \left\{ 2\pi f_r \left(1 + \frac{V}{c}\right) t \right\} = 0$$

ce qui impose d'une part l'égalité des arguments des cosinus, c'est-à-dire

$$2\pi f_r \left(1 + \frac{V}{c}\right) = 2\pi f_i \left(1 - \frac{V}{c}\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{f_r = \frac{1 - V/c}{1 + V/c} f_i},$$

et d'autre part une relation entre les amplitudes,

$$\left(1 - \frac{V}{c}\right) + \left(1 + \frac{V}{c}\right) r = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{r = -\frac{1 - V/c}{1 + V/c}}.$$

3.d Par un développement limité en V/c ,

$$f_r = \left(1 - \frac{V}{c}\right) \times \frac{1}{1 + V/c} f_i \simeq \left(1 - \frac{V}{c}\right)^2 f_i \simeq \left(1 - 2\frac{V}{c}\right) f_i$$

ce qui donne bien

$$\boxed{f_i - f_r = \frac{2V}{c} f_i}.$$

3.e Le même calcul donne

$$\boxed{r = -1 + 2\frac{V}{c}}.$$

Il est égal à -1 lorsque la cible est immobile.

4 Numériquement,

$$f_i - f_r = \frac{2 \times 10}{3 \cdot 10^8} \times 30 \cdot 10^9 \quad \text{soit} \quad \boxed{f_i - f_r = 2 \text{ kHz}}.$$

Problème ouvert

Exercice 10 : Champs d'un laser

[🔦 3 | ✂ 1]

On assimile l'air au vide. D'après la relation de structure,

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \vec{u}_z \wedge \frac{\vec{E}}{c} \quad \text{soit} \quad \vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y.$$

Le vecteur de Poynting s'écrit

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z.$$

En modélisant le faisceau laser par un faisceau cylindrique de rayon $a = 2 \text{ mm}$ (diffraction négligeable), la puissance moyenne portée par le faisceau vaut donc

$$\mathcal{P} = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle \times \pi a^2 = \frac{E_0^2 \pi a^2}{\mu_0 c}.$$

Pour une puissance typique $\mathcal{P} = 1 \text{ mW}$, on en déduit

$$\boxed{E_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{P} \mu_0 c}{\pi a^2}} = 1,7 \cdot 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{et} \quad B_0 = \frac{E_0}{c} = 5,8 \cdot 10^{-7} \text{ T}}.$$