BLAISE PASCAL
PT 2019-2020

TD 21 – Électromagnétisme

Ondes électromagnétiques

Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
Difficulté technique et calculatoire ;
Exercice important.

Flasher ce code pour accéder aux corrigés

Exercices

Exercice 1 : Onde sphérique [1 | 1]

On considère un émetteur d'ondes électromagnétiques que l'on assimile à une source ponctuelle : il peut s'agir d'un émetteur de radio, d'un satellite, d'une étoile qui rayonne, etc. L'onde émise est sphérique, de la forme en coordonnées sphériques

$$\vec{E}(M,t) = E_0(r)\cos(\omega t - kr)\,\vec{e}_\theta \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{\omega}{c}\,.$$

Le milieu de propagation est assimilé au vide.

1 - Par analogie avec une onde plane, identifier le vecteur d'onde $\vec{k}$ de l'onde sphérique.

2 - On admet qu'une telle onde vérifie localement la même relation de structure qu'une onde plane. En déduire l'expression du champ magnétique associé.

3 - Exprimer le vecteur de Poynting et sa moyenne temporelle.

4 - Exprimer la puissance moyenne $\mathcal{P}$ rayonnée à travers une sphère de rayon r. Justifier par un argument physique que cette puissance est indépendante de r. En déduire que $E_0(r) = A/r$ avec A une constante à déterminer.

Exercice 2 : Un exemple d'OPPM [1 | 3]

On étudie une onde électromagnétique dont le champ électrique est de la forme

$$\vec{E} = E_x\,\vec{e}_x + E_y\,\vec{e}_y \qquad \text{avec} \qquad E_x = E_0 \exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{K}{3}(2x+2y-z) - \omega t\right)\right].$$

L'onde se propage dans le vide et sa longueur d'onde est $\lambda = 6\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$.

1 - Calculer la fréquence de l'onde. Identifier le domaine du spectre électromagnétique auquel elle appartient.

2 - Exprimer le vecteur d'onde $\vec{k}$ en fonction de la constante K, puis calculer la valeur numérique de K.

3 - Établir l'équation cartésienne d'un plan d'onde.

4 - À partir de l'équation de Maxwell-Gauss, exprimer E_y en fonction de E_x.

5 - Exprimer le champ magnétique de cette onde en fonction de E_x et c.

6 - Exprimer la densité moyenne d'énergie électromagnétique associée à cette onde. Commenter.

7 - Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting de cette onde. Commenter.

Exercice 3 : Loi de Malus [2 | 1]

Sur un banc optique d'axe (Oz), on place successivement une source de lumière monochromatique de longueur d'onde λ ; un premier polariseur (P) d'axe passant $\vec{u}$; un second polariseur (A) d'axe passant $\vec{v}$ appelé analyseur ; et un photodétecteur permettant de mesurer l'intensité de la lumière sortant de l'analyseur.

La lumière dans le dispositif est décrite comme une onde plane progressive harmonique. Les directions passantes $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du polariseur et de l'analyseur forment un angle θ. On note $\vec{u}_\perp$ (resp. $\vec{v}_\perp$) le vecteur unitaire tel que la base $\mathcal{B}_\mathrm{P} = (\vec{u}, \vec{u}_\perp, \vec{e}_z)$ soit orthonormée directe (resp. $\mathcal{B}_\mathrm{A} = (\vec{v}, \vec{v}_\perp, \vec{e}_z)$).

1 - Faire un schéma du montage.

2 - Donner l'expression dans la base $\mathcal{B}_\mathrm{P}$ du champ $\vec{E}_\mathrm{P}$ ayant traversé le polariseur en fonction de z, t et λ.

3 - Exprimer $\vec{E}_\mathrm{P}$ dans la base $\mathcal{B}_\mathrm{A}$. En déduire l'expression du champ $\vec{E}_\mathrm{PA}$ ayant traversé successivement le polariseur et l'analyseur puis celle du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}_\mathrm{PA}$.

L'intensité lumineuse mesurée par le photodétecteur est définie comme étant la valeur moyenne (spatiale et temporelle) du flux du vecteur de Poynting sur toute la surface S du photodétecteur,

$$I = \left\langle \frac{1}{S} \iint_S \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \right\rangle$$

où le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est normal au photodétecteur.

4 - Montrer que l'intensité peut s'écrire sous la forme $I = I_0 \cos^2\theta$: cette relation est appelée **loi de Malus**.

Annales de concours

Exercice 4 : Blocage d'appel [oral banque PT | 1 | 2 |]

Un téléphone émet un appel, reçu par un second téléphone. On place une plaque de métal devant le second téléphone : il ne reçoit plus l'appel. On modélise la plaque comme occupant tout le demi-espace $z > 0$, l'onde se propageant dans le vide $z < 0$.

1 - Donner l'ordre de grandeur de la longueur d'onde et de la fréquence d'une onde téléphonique. On admet que cette fréquence permet de traiter le métal dans l'ARQS.

2 - Établir l'équation différentielle vérifiée par $\vec{E}$ dans le métal. Comparer cette équation à celle dans le vide. Commenter physiquement.

3 - Trouver les solutions de l'équation précédente de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k} z)}$, avec $\underline{k}$ complexe. Ces solutions sont-elles des ondes planes progressives monochromatiques ?

4 - Identifier une distance caractéristique. La calculer numériquement, justifier le modèle de plaque semi-infinie, et interpréter l'expérience.

Exercice 5 : Onde électromagnétique confinée [oral Mines-Ponts PSI | 1 | 2 |]

On considère un champ électrique dans le vide de la forme $\vec{E}_\mathrm{i} = E_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)} \vec{e}_x$.

1 - Montrer que $\omega = kc$.

On rappelle que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls dans un conducteur parfait. On donne les relations de passage à l'interface entre deux milieux 1 et 2 :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1\to2} \qquad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_\mathrm{s} \wedge \vec{n}_{1\to2} \qquad \mu_0 \vec{j}_\mathrm{s} = \vec{n}_{1\to2} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\,,$$

où σ et $\vec{j}_\mathrm{s}$ sont respectivement les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface.

2 - On place un conducteur parfait semi-infini en $z > 0$. Montrer que les relations de passage pour $\vec{E}$ impliquent l'existence d'une onde réfléchie et donner son expression. Donner la nature de l'onde totale.

3 - En déduire le champ magnétique à partir d'une équation de Maxwell.

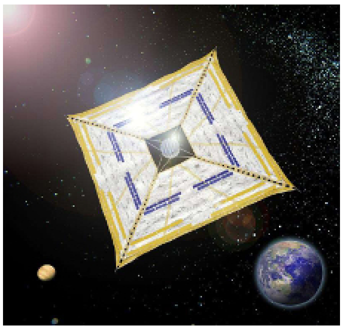
4 - Qu'impliquent les relations de passage pour $\vec{B}$? Interpréter.

On ajoute un deuxième conducteur parfait en $z = -L$.

5 - Déterminer les ondes pouvant exister entre les deux conducteurs et leurs caractéristiques. On introduira un entier n.

6 - Quelle est la puissance moyenne traversant une surface $z = \mathrm{cte}$?

Exercice 6 : Voile solaire [oral banque PT | 2 | 2]



Une voile solaire est un dispositif de propulsion permettant de se déplacer dans l'espace à la manière d'un voilier. Les photons émis par le Soleil entrent en collision avec la voile et lui cèdent leur quantité de mouvement, ce qui lui permet d'avancer. Compte tenu de la faible propulsion générée, le procédé ne permet pas de quitter la surface d'une planète (même dénuée d'atmosphère, et donc de friction). Il est en revanche utilisable sur un appareil ayant déjà atteint la vitesse de satellisation minimale, voire la vitesse de libération. Plusieurs prototypes de petite taille ont déjà été placés en orbite ou sont en cours de développement, comme par exemple le démonstrateur Ikaros, dont une vue d'artiste est représentée ci-contre, lancé en 2010 par l'agence spatiale japonaise.

On considère une voile solaire de surface S modélisée par un conducteur parfait. Le rayonnement solaire est assimilé à une onde plane progressive monochromatique (OPPM) de polarisation rectiligne. On suppose que la normale à la surface S est colinéaire à la direction de propagation de l'OPPM.

1 - Proposer une expression du champ électrique complexe de l'OPPM incidente sur la voile. En déduire l'onde réfléchie.

2 - Calculer la densité surfacique de courant sur la voile.

3 - Proposer une expression pour la force surfacique moyenne à laquelle est soumise la voile et la calculer. Commenter sa direction et son sens.

Données :
- ▷ les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls dans un conducteur parfait ;
- ▷ relations de passage à l'interface entre deux milieux (1) et (2), de normale $\vec{n}$ orientée de (1) vers (2) :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n} \qquad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{\jmath}_{\mathrm{s}} \wedge \vec{n} \iff \vec{\jmath}_{\mathrm{s}} = \vec{n} \wedge \left(\frac{\vec{B}_2 - \vec{B}_1}{\mu_0}\right),$$

où σ et $\vec{\jmath}_{\mathrm{s}}$ sont respectivement les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface.

Exercice 7 : Guide d'ondes [oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2 | ⊛]

Un guide d'onde est constitué deux plans parfaitement conducteurs situés en $y = 0$ et $y = a$ entre lesquels est confinée une onde électromagnétique de la forme

$$\vec{E} = \left[A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2 y} + B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2 y}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_1 x)}\,\vec{e}_z\,.$$

Donnée : On rappelle la relation de passage pour le champ électrique à l'interface entre deux milieux 1 et 2,

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}\,,$$

avec $\vec{u}$ le vecteur normal dirigé de 1 vers 2.

1 - Montrer que cette onde est une superposition de deux ondes planes progressives sinusoïdales (OPPS) dont on exprimera les vecteurs d'onde notés $\vec{k}_\pm$.

2 - Que valent les champs dans un conducteur parfait ? Établir une relation entre A et B et une condition sur k_2 dépendant d'un entier n.

3 - Déterminer l'inclinaison $\theta_\pm$ des deux OPPS avec l'axe du guide en fonction de leur longueur d'onde λ et a.

4 - En déduire que toutes les ondes ne peuvent pas se propager dans le guide.

5 - Exprimer l'onde totale. Commenter sa structure dans les directions x et y.

Exercice 8 : Approche énergétique de l'effet de peau [oral banque PT | 💡 3 | ✂ 2]

Considérons un conducteur électrique semi-infini de conductivité γ et dans lequel règne un champ

$$\vec{E} = E_0\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \alpha z)}\,\vec{u}_x\,.$$

1 - S'agit-il d'une onde plane ? D'une onde progressive ? Que représente α ? Quelles sont la direction et le sens de propagation ? La polarisation ?

2 - Calculer le champ $\vec{B}$ associé.

3 - Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting.

4 - Effectuer un bilan de puissance pour une tranche de conducteur de surface S et de longueur dz. Déterminer la puissance cédée par unité de volume dans le conducteur.

5 - Établir une autre expression de la puissance cédée à partir de la loi d'Ohm locale.

6 - À partir des deux expressions obtenues, déduire la distance sur laquelle pénètre l'onde avant d'être atténuée.

Exercice 9 : Cinémomètre à effet Doppler [écrit PT modélisation 2018 | 2 | 2 |]

Le sujet porte sur l'analyse d'un 100 m en athlétisme. La vitesse de l'athlète est mesurée par un cinémomètre à effet Doppler-Fizeau, dont la partie présentée ici étudie le fonctionnement.

Le cinémomètre émet des ondes électromagnétiques qui se réfléchissent sur l'athlète grâce à de minces fils conducteurs cousus sur les maillots et sont ensuite captées par un récepteur. On modélise ainsi l'athlète (la « cible ») par un conducteur parfait perpendiculaire à l'axe $(O, \vec{u}_x)$ et en translation rectiligne uniforme dans la direction $\vec{u}_x$.

On note $\vec{V}$ la vitesse du référentiel $\mathbf{R}'$ lié à la cible par rapport au référentiel terrestre $\mathbf{R}$ (figure 1). L'abscisse à l'instant t de la surface réfléchissante est supposée égale à

$$x_\text{cible} = Vt\,.$$

Lors de la mesure, l'émetteur contenu dans le cinémomètre émet une onde incidente de fréquence f_i que l'on suppose plane, progressive et monochromatique. Cette onde se réfléchit sur la cible et revient vers le cinémomètre ; la fréquence de l'onde réfléchie est différente de celle de l'onde incidente (effet Doppler).

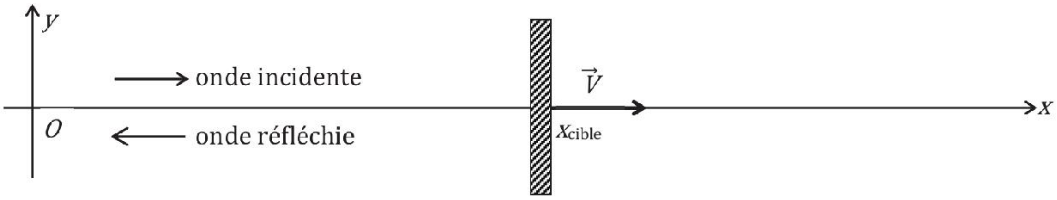


Figure 1 – Réflexion sur une cible en mouvement.

L'objectif de cette partie est de déterminer la relation entre la vitesse de la cible et la différence des fréquences des deux ondes. Pour cela, on détermine l'expression du champ électrique dans le référentiel de la cible puis on en déduit la forme de l'onde réfléchie en fonction de celle de l'onde incidente.

On note $\vec{E}$ et $\vec{B}$ les champs électrique et magnétique dans le référentiel $\mathbf{R}$, $\vec{E}'$ et $\vec{B}'$ dans $\mathbf{R}'$.

1.a **-** Écrire l'expression de la force de Lorentz subie par une particule de charge q animée d'une vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel $\mathbf{R}$ et $\vec{v}'$ dans le référentiel $\mathbf{R}'$.

La loi de composition des vitesses indique que les vitesses vérifient la relation $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$. Les forces restent invariantes par changement de référentiel.

1.b **-** Montrer que les champs $\vec{E}'$ et $\vec{B}'$ se déduisent des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ par les relations

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} \qquad \text{et} \qquad \vec{B}' = \vec{B}\,.$$

Le champ électrique de l'onde incidente a pour expression dans $\mathbf{R}$

$$\vec{E}_\text{i} = E_0 \cos\left\{2\pi f_\text{i}\left(t - \frac{x}{c}\right)\right\} \vec{u}_y\,.$$

Celui de l'onde réfléchie est cherché sous la forme

$$\vec{E}_\text{r} = rE_0 \cos\left\{2\pi f_\text{r}\left(t + \frac{x}{c}\right)\right\} \vec{u}_y\,.$$

2.a **-** Donner la relation entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$ pour une onde plane progressive monochromatique.
2.b **-** En déduire les expressions respectives de $\vec{E}_\text{i}'$ et $\vec{E}_\text{r}'$ en fonction de $\vec{E}_\text{i}$, $\vec{E}_\text{r}$, V et c.

Dans la suite, on ne se servira que de $\vec{E}_\text{i}'$ et $\vec{E}_\text{r}'$.

3.a **-** Montrer grâce à des considérations énergétiques qu'à l'intérieur d'un conducteur parfait le champ électrique est nul.

On admet que dans le référentiel $\mathbf{R}'$ la composante tangentielle du champ électrique est continue à chaque instant à l'interface air-cible, ce qui s'écrit

$$\vec{E}_\text{i}'(x_\text{cible}, t) + \vec{E}_\text{r}'(x_\text{cible}, t) = \vec{0}\,.$$

3.b **-** Exprimer $\vec{E}_\text{i}'(x_\text{cible}, t)$ et $\vec{E}_\text{r}'(x_\text{cible}, t)$.
3.c **-** En déduire la fréquence f_r et le coefficient de réflexion r en fonction de f_i, V et c.
3.d **-** En supposant $V \ll c$, montrer par un développement limité au premier ordre que

$$f_\text{i} - f_\text{r} = f_\text{i}\,\frac{2V}{c}\,.$$

3.e **-** Au même ordre, exprimer le coefficient r. Que vaut-il lorsque la cible est immobile ?

4 - L'athlète se déplace à la vitesse de $10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et l'onde émise a une fréquence de $30\,\text{GHz}$. Donner la valeur numérique de $f_\text{i} - f_\text{r}$.

Problème ouvert

Pour aborder un exercice de type résolution de problème, il peut notamment être utile de faire un schéma modèle, d'identifier et nommer les grandeurs pertinentes, d'utiliser l'analyse dimensionnelle, de proposer des hypothèses simplificatrices, de décomposer le problème en des sous-problèmes simples, etc. Le candidat peut également être amené à proposer des valeurs numériques raisonnables pour les grandeurs manquantes ... et toutes les valeurs données ne sont pas forcément utiles. Le tout est évidemment à adapter à la situation proposée !

Exercice 10 : Champs d'un laser [3 | 1]

Déterminer les amplitudes des champs électrique et magnétique d'un laser de TP.