BLAISE PASCAL
PT 2020-2021

Chapitre 7 – Électromagnétisme *Version prof*

Champ électrostatique

Plan du cours

I Distributions de charge **3**
I.1 Rappels sur la charge électrique . . . 3
I.2 Description mésoscopique . . . 3
I.3 Distributions surfaciques et linéiques . . . 4

II Des propriétés des distributions de charge à celles du champ électrostatique **6**
II.1 Définition et premières propriétés du champ électrostatique . . . 6
II.2 Symétries de la distribution de charges, direction du champ électrostatique . . . 7
II.3 Invariances de la distribution de charges, variables du champ électrostatique . . . 10

III Théorème de Gauss **12**
III.1 Démonstration à partir de l'équation de Maxwell-Gauss . . . 12
III.2 Exemple : champ créé par une sphère uniformément chargée. . . . 13
III.3 Exemple : champ créé par un cylindre uniformément chargé . . . 13
III.4 Exemple : champ créé par un plan uniformément chargé . . . 13

IV Densité volumique d'énergie électrostatique **14**

Au programme

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 1 « Électrostatique ».

La notion de champ électrostatique a été introduite en classe de première S. Les notions abordées sont donc centrées sur les distributions de charges, le champ et le potentiel. L'accent est mis sur les propriétés intégrales du champ et sur le théorème de Gauss pour des situations présentant un haut degré de symétrie. Les analogies avec la gravitation sont centrées sur l'application du théorème de Gauss.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Loi de Coulomb. Champ électrostatique. Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles. Principe de superposition.	Exprimer le champ électrostatique créé par une distribution discrète de charges. Citer quelques ordres de grandeur de champs électrostatiques.
Distributions continues de charges : volumique, surfacique, linéique.	Décomposer une distribution en des distributions plus simples dans le but de calculer un champ électrostatique par superposition. Choisir un type de distribution continue adaptée à la situation modélisée. Justifier le choix d'une modélisation d'une distribution de charges par une distribution « infinie ». Évaluer la charge totale d'une distribution continue dans des situations à géométries simples.
Symétries et invariances du champ électrostatique.	Identifier les plans de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de charges. Identifier les invariances d'une distribution de charges. Exploiter les symétries et les invariances d'une distribution de charges pour caractériser le champ électrostatique créé.

BY-NC-SA

Notions et contenus	Capacités exigibles
Flux du champ électrostatique. Théorème de Gauss.	Reconnaître les situations pour lesquelles le champ électrostatique peut être calculé à l'aide du théorème de Gauss Utiliser le théorème de Gauss pour déterminer le champ électrostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie.
Cas de la sphère, du cylindre infini et du plan infini.	Établir les expressions des champs électrostatiques créés en tout point de l'espace par une sphère uniformément chargée en volume, par un cylindre infini uniformément chargé en volume et par un plan infini uniformément chargé en surface. Établir et exploiter le fait qu'à l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique, le champ électrostatique créé est le même que celui d'une charge ponctuelle concentrant la charge totale et placée au centre de la distribution.
Analogies avec la gravitation.	Utiliser le théorème de Gauss dans le cas de la gravitation.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Ces cinq dernières années au concours

- Écrit : épreuve A 2016, 2017, 2018 et 2019 ; épreuve de modélisation 2020.
- Oral : souvent.

Méthode : utiliser le théorème de Gauss

- **Schématiser la distribution de charges** et y indiquer un point M arbitraire[1] où l'on va déterminer le champ $\vec{E}(M)$ est toujours utile pour raisonner correctement.
- **Choisir un repérage** adapté à la « forme » de la distribution de charges et le représenter sur le schéma.
- **Étudier les invariances de la distribution de charges** pour en déduire des coordonnées du point M dont le champ électrostatique ne dépend pas.
  Attention ! Cette étude n'apporte aucune information sur la direction du champ $\vec{E}(M)$.
- **Étudier les symétries de la distribution de charges** pour en déduire la direction du champ électrique au point M.
  Attention ! Seuls les plans de symétrie ou d'antisymétrie de la distribution passant par M renseignent sur la direction de $\vec{E}(M)$.
  Attention ! Cette étude n'apporte aucune information sur les coordonnées de M dont dépend $\vec{E}(M)$.
- **Choisir une surface de Gauss adaptée**, c'est-à-dire sur laquelle le flux est constant par morceaux. Cette surface contient nécessairement une partie au moins de l'équipotentielle passant par M, c'est-à-dire de la surface sur laquelle $||\vec{E}|| =$ cte, qu'il faut éventuellement compléter, notamment avec des portions sur lesquelles le champ est tangent à la surface (flux nul).
- **Appliquer le théorème de Gauss** sans oublier les disjonctions de cas selon que le point M est à l'intérieur ou à l'extérieur de la distribution de charges.

1. Cette étape est l'analogue du « soit $x \in \mathbb{R}$ » des démonstrations mathématiques : on commence la démonstration en se fixant un point M, mais celui-ci n'a aucune propriété particulière.

BY-NC-SA

On appelle **champ électrostatique** un champ électrique indépendant du temps.

Synonyme : stationnaire

... qu'on ne confondra pas avec « uniforme », qui signifie « indépendant de l'espace ».

I - Distributions de charge

Les sources de champ électrostatique sont les charges électriques, qu'elles soient immobiles ou en mouvement.

I.1 - Rappels sur la charge électrique

Au niveau microscopique, les particules chargées sont appelées **porteurs de charge**. La charge électrique est quantifiée : la charge de tout porteur de charge est un multiple de la charge élémentaire $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$.

Exemples de porteurs de charge : *électrons et protons dans les atomes ;*
cations et anions dans les électrolytes ;
électrons de conduction et cations dans un métal.

Espace 1

La charge électrique est une grandeur **additive** : un système $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ porte une charge $Q = Q_1 + Q_2$. C'est également une grandeur **conservative** : elle ne peut être ni créée ni détruite, mais seulement transportée d'un point à un autre.

Remarque culturelle : *Certains processus de physique nucléaire se font avec création d'une paire particule et anti-particule, par exemple électron et positron, le positron ayant une charge opposée à celle de l'électron. Cependant, la charge électrique totale est conservée lors de tels processus (et c'est d'ailleurs l'un des postulats fondamentaux de la physique des particules).*

La matière est globalement neutre mais ce n'est pas forcément le cas localement, même à l'échelle macroscopique : lors des expériences d'électrisation, un grand nombre de charges identiques sont localisées dans une même zone de l'espace. Cela peut donner des effets spectaculaires, comme la célèbre expérience des cheveux dressés sur la tête du Palais de la Découverte : le spectateur-cobaye est placé sur l'armature d'un condensateur géant, si bien que tout son corps acquiert une charge lorsqu'une tension est appliquée ... et les cheveux se repoussent les uns les autres.

I.2 - Description mésoscopique

Étudier des champs électrostatiques à l'échelle macroscopique nécessite de décrire les distributions de charge électrique à l'échelle mésoscopique.

À l'échelle mésoscopique, la répartition des charges électriques
est décrite par la **densité volumique de charge** ou **charge volumique** $\boldsymbol{\rho}$:
la charge $\mathrm{d}Q$ contenue dans un volume méso $\mathrm{d}\tau$ centré sur le point M vaut par définition
$$\mathrm{d}Q = \rho(M)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Espace 2

⇝ charge totale contenue dans un volume $\mathcal{V}$:
$Q = \iiint_{\mathcal{V}} \rho\,\mathrm{d}\tau\,.$

Espace 3

Unité : ρ s'exprime en $\mathrm{C \cdot m^{-3}}$

Espace 4

Remarque : *la densité volumique de charge est l'exact analogue de la masse volumique ... d'où la dénomination de « charge volumique ».*

BY-NC-SA Étienne Thibierge, 29 septembre 2020, www.etienne-thibierge.fr

La densité volumique de charge est reliée à la **densité volumique de porteurs de charge n**.

n = nombre de porteurs de charge par unité de volume, s'exprime en m^{-3}

Espace 5

▷ si un seul type de porteurs (p.ex. faisceau d'ions tous identiques de charge q) : $\rho = nq$

Espace 6

▷ si plusieurs types de porteurs de charge : par sommation, $\rho = \sum_i n_i q_i$.

Exercice C1 : Ionosphère

L'ionosphère est la couche de l'atmosphère comprise entre 70 et 100 km d'altitude. L'air y est présent sous forme de plasma : sous l'effet des rayonnements à très haute énergie issus du Soleil, un électron a été arraché aux molécules d'air qui sont devenues des cations, alors que les électrons sont libres de se déplacer. On compte environ 10^{24} cations et autant d'électrons dans $1\,\mathrm{cm}^3$ d'ionosphère.

1 - Calculer la densité volumique n_0 de cations et celle d'électrons.

2 - Calculer le nombre de cations N_+ contenus dans un cube de 1 µm de côté. En déduire le nombre d'électrons N_-.

3 - Calculer la densité volumique de charge ρ_+ associée aux seuls cations. En déduire la densité volumique de charge ρ_- associée aux seuls électrons.

4 - Conclure : quelle est la densité volumique de charge totale ?

$\boxed{5}$ $n_0 = 10^{24}\,\mathrm{cm}^{-3} = 10^{30}\,\mathrm{m}^{-3}$.
$\boxed{6}$ $N_+ = n_0\,V = 10^{30} \times (10^{-6})^3 = 10^{12}$ cations. Comme une molécule ionisée donne par hypothèse un cation et un électron, on a $N_- = N_+$.
$\boxed{7}$ $\rho_+ = n_0 e = 10^{30} \times 10^{-19} = 10^{11}\,\mathrm{C \cdot m^{-3}}$. Comme un électron porte une charge $-e$, on en déduit $\rho_- = -\rho_+ = -10^{11}\,\mathrm{C \cdot m^{-3}}$.
$\boxed{8}$ Au total $\rho = \rho_+ + \rho_- = 0$.

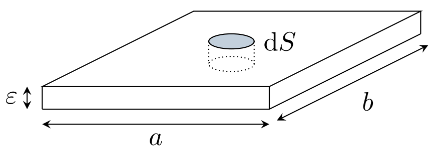
Espace 7

I.3 - Distributions surfaciques et linéiques

Toutes les distributions de charge sont fondamentalement volumiques, c'est-à-dire que les charges sont réparties en trois dimensions. Il existe néanmoins des géométries particulières dans lesquelles une ou deux dimensions sont négligeables devant les autres.

• Distribution surfacique

Cas d'une plaque de côtés a et b et de hauteur $\varepsilon \ll a, b$.



Charge électrique portée par un volume de plaque de surface infinitésimale dS :

$$\mathrm{d}Q = \rho \times \varepsilon\,\mathrm{d}S = \sigma\,\mathrm{d}S$$

Espace 8

La charge $\mathrm{d}Q$ contenue sur une surface mésoscopique $\mathrm{d}S$ d'une distribution surfacique de charge est décrite par la **densité surfacique de charge** ou **charge surfacique $\boldsymbol{\sigma}$**

$$\mathrm{d}Q = \sigma \, \mathrm{d}S \, .$$

Unité : σ s'exprime en $\mathrm{C \cdot m^{-2}}$.

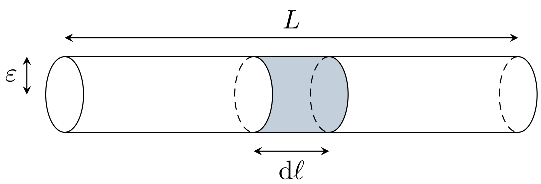
Espace 9

Charge totale portée par la plaque :
$Q = \iint_{\text{plaque}} \sigma \, \mathrm{d}S \, .$

Espace 10

- **Distribution linéique**

Cas d'un fil de longueur L et de rayon $\varepsilon \ll L$.



Charge électrique portée par un élément de longueur $\mathrm{d}\ell$ du fil :

$\mathrm{d}Q = \rho \times \pi \varepsilon^2 \, \mathrm{d}\ell = \lambda \, \mathrm{d}\ell$

Espace 11

La charge $\mathrm{d}Q$ contenue sur une longueur mésoscopique $\mathrm{d}\ell$ d'une distribution linéique de charge est décrite par la **densité linéique de charge** ou **charge linéique $\boldsymbol{\lambda}$**

$$\mathrm{d}Q = \lambda \, \mathrm{d}\ell \, .$$

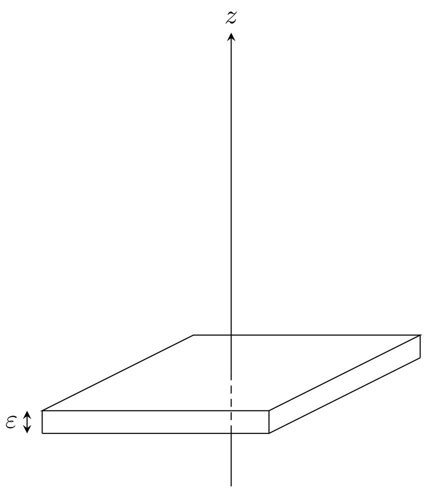
Unité : λ s'exprime en $\mathrm{C \cdot m^{-1}}$.

Espace 12

Charge totale portée par le fil :
$Q = \int_{\text{fil}} \lambda \, \mathrm{d}\ell \, .$

Espace 13

- **Quand peut-on modéliser une distribution réelle par une distribution surfacique ou linéique ?**



Les deux faces de la plaque doivent pouvoir être quasi-confondues : outre $\varepsilon \ll a, b$ cela impose aussi d'avoir $z \gg \varepsilon$. Les modèles surfacique et linéïque sont donc valables seulement à grande distance des sources.

Espace 14

> ***Remarque :*** *il n'est donc pas surprenant que les modèles linéiques et surfaciques donnent des anomalies mathématiques non physiques (divergence) à faible distance.*

BY-NC-SA

II - Des propriétés des distributions de charge à celles du champ électrostatique

II.1 - Définition et premières propriétés du champ électrostatique

Le champ électrostatique est fondamentalement défini à partir de la force de Coulomb (force de Lorentz électrique).

Par définition du champ électrostatique,
une particule-test de charge q_0 maintenue immobile en un point M
subit de la part des autres particules chargées une force égale à

$$\vec{F}_{\text{élec}} = q_0 \vec{E}(M) \qquad \text{soit} \qquad \vec{E}(M) = \frac{\vec{F}_{\text{élec}}}{q_0}\,.$$

- **Champ créé par une charge ponctuelle**

$\bullet\ M(q_0)$

Force de Coulomb exercée par une particule de charge q_1 située en P_1 sur notre particule test q_0 située en M :

Faire le dessin pour des charges de même signe et de signe opposé
$\vec{F}_{1\to 0} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_0 q_1}{P_1M^2}\,\vec{u}_{1\to 0} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_0 q_1}{P_1M^3}\overrightarrow{P_1M}$

$\bullet\ P_1(q_1)$

Espace 15

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}$ est la **permittivité diélectrique du vide**, l'une des deux constantes fondamentales de l'électromagnétisme.

> ***Remarque culturelle :*** *Cette expression a été déterminée par Charles Augustin Coulomb à la fin du XVIII$^{\text{e}}$ siècle expérimentalement ... et par analogie avec la gravitation !*

Champ électrique créé par la particule q_1 :
$\vec{E}_1(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q_1}{PM^3}\overrightarrow{PM}$

Espace 16

Écriture plus naturelle dans ce cas particulier : coordonnées sphériques d'origine $O = P_1$.
$\vec{E}_1(M) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\,\vec{e}_r$

Espace 17

- **Théorème de superposition**

Si on a plusieurs charges q_n avec $1 \le n \le N$, alors la particule test subit une force résultante

$$\vec{F}_{\to 0} = \sum_n \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q_n}{P_nM^3}\overrightarrow{P_nM}$$

où on peut factoriser par q_0 pour obtenir

$$\vec{F}_{\to 0} = q_0 \sum_n \vec{E}_n(M) \overset{\text{déf.}}{=} q_0 \vec{E}_{\text{tot}}(M)\,.$$

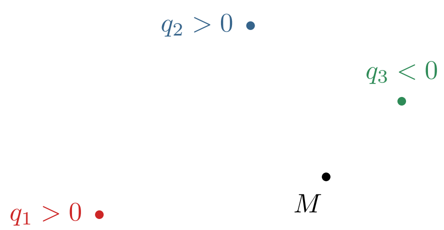
Théorème de superposition :

Le champ électrique total créé par un ensemble de charges
est la somme des champs créés par chaque charge prise individuellement.

> ***Remarque :*** *Dans cette approche, le principe de superposition est déduit de la loi de force expérimentale. D'un point de vue plus théorique, il vient en fait de la linéarité des équations fondamentales de l'électromagnétisme, les équations de Maxwell.*

BY-NC-SA

Illustration : chaque charge « apporte » son propre champ qui ne dépend que d'elle.



Limitation : une telle méthode fonctionne en principe mais est inutilisable en pratique, car le nombre de particules chargées qu'il faudrait considérer pour calculer un champ à l'échelle macroscopique est beaucoup trop grand.

$\leadsto$ la suite du cours a pour but d'apprendre à calculer de manière plus efficace le champ créé par une distribution de charge connue, c'est-à-dire de déterminer sa direction, son sens et sa norme.

II.2 - Symétries de la distribution de charges, direction du champ électrostatique

a) Principe de Curie

Le principe de Curie est un principe de portée très générale, qui apporte souvent des considérations qualitatives intéressantes. Il est applicable lorsqu'un phénomène physique peut s'interpréter en termes de cause et conséquence.

Les symétries présentes dans les causes doivent se retrouver dans les conséquences.

$\leadsto$

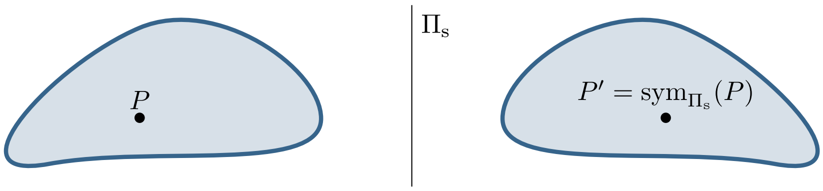
ici, les symétries présentes dans la distribution de charge doivent se retrouver sur le champ électrique.

Espace 18

b) Effet d'un plan de symétrie de la distribution de charges

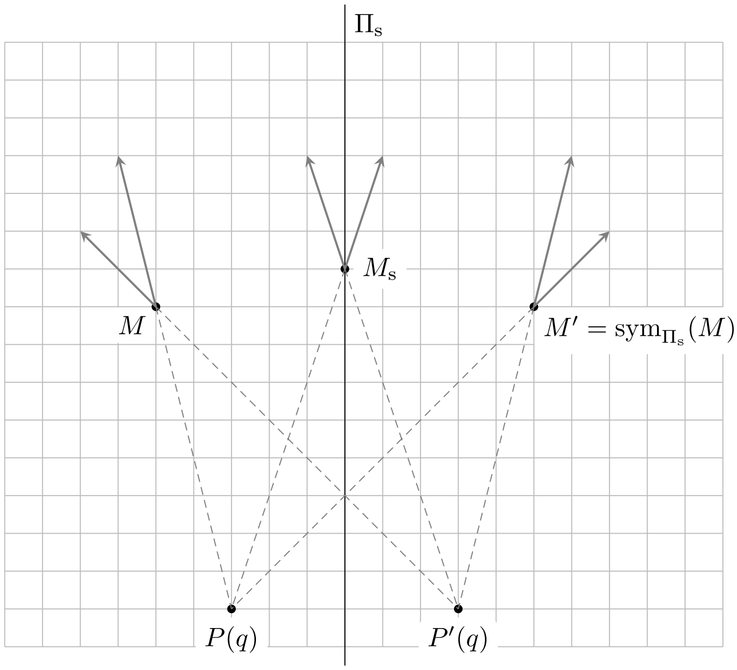
Une distribution de charge possède un **plan de symétrie** Π_s
lorsque les (densités de) charges en tous points P et P' symétriques par rapport à Π_s sont égales,

$$\rho(P') = \rho(P)\,.$$



BY-NC-SA

Un exemple pour comprendre : deux charges ponctuelles identiques q situées en P et P'



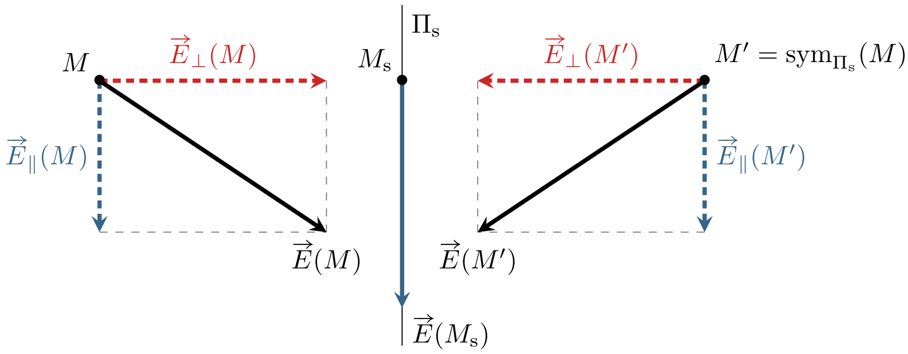
Généralisation :

Considérons une distribution de charges possédant un plan de symétrie Π_s.

Les champs électrostatiques $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ en deux points M et M' symétriques par rapport au plan Π_s sont eux-mêmes symétriques par rapport à Π_s, c'est-à-dire

$$\vec{E}(M') = +\mathrm{sym}_{\Pi_s}\left(\vec{E}(M)\right) \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} \vec{E}_\perp(M') = -\vec{E}_\perp(M) \\ \vec{E}_\parallel(M') = +\vec{E}_\parallel(M) \end{cases}$$

Le champ électrostatique $\vec{E}(M_s)$ en un point M_s appartenant au plan Π_s est inclus dans ce plan.



Interprétation :

en M_s, les propriétés de symétries imposent
$\vec{E}_\perp(M_s) = -\vec{E}_\perp(M_s) \qquad \text{donc} \qquad \vec{E}_\perp(M_s) = \vec{0}$.

Espace 19

Cas particulier important :

Si la distribution de charge est plane, alors ce plan est un plan de symétrie.

En effet : notons Π_0 le plan de la distribution.

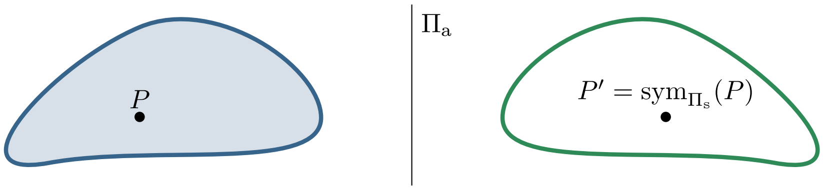
- pour deux points P et P' symétriques par rapport à Π_0, on a bien $\rho(P) = \rho(P') = 0$;
- un point P_0 appartenant au plan Π_0 est son propre symétrique, il est donc évident que $\rho(P_0) = \rho(P_0)$!

BY-NC-SA

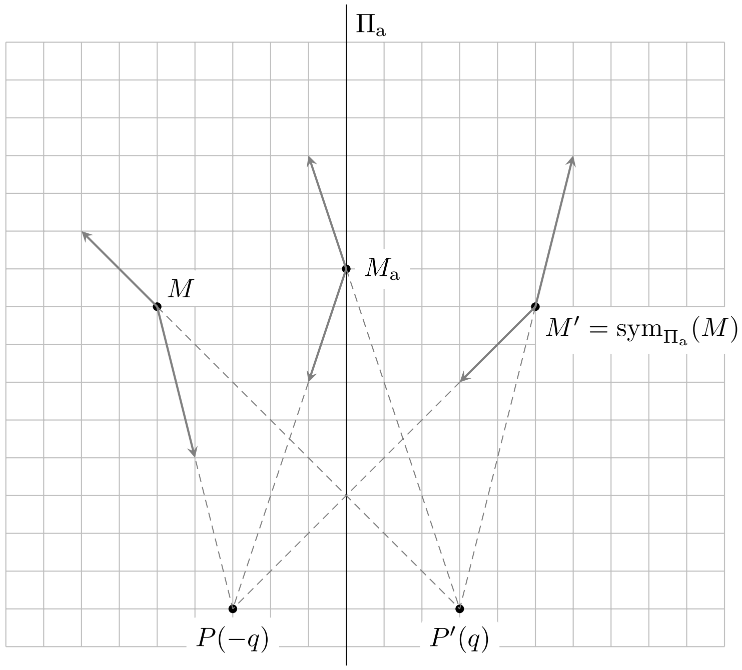
c) Effet d'un plan d'anti-symétrie de la distribution de charges

Une distribution de charge possède un **plan d'anti-symétrie** Π_a
lorsque les (densités de) charges en tous points P et P' symétriques par rapport à Π_s sont opposées,

$$\rho(P') = -\rho(P)\,.$$



Un exemple pour comprendre : deux charges ponctuelles opposées situées en P et P'

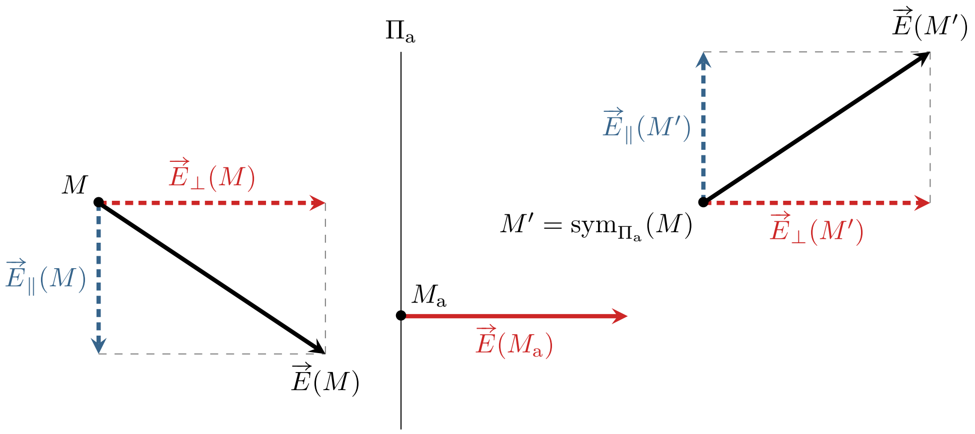


Généralisation :

Considérons une distribution de charges possédant un plan d'antisymétrie Π_a.
Les champs électrostatiques $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ en deux points M et M' symétriques par rapport au plan Π_a sont anti-symétriques par rapport à Π_a, c'est-à-dire

$$\vec{E}(M') = -\mathrm{sym}_{\Pi_\mathrm{a}}\left(\vec{E}(M)\right) \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} \vec{E}_\perp(M') = \vec{E}_\perp(M) \\ \vec{E}_\parallel(M') = -\vec{E}_\parallel(M) \end{cases}$$

Le champ électrostatique $\vec{E}(M_\mathrm{a})$ en un point M_a appartenant au plan Π_a est orthogonal à ce plan.



BY-NC-SA

Interprétation : de même que précédemment, les propriétés de symétries imposent qu'au point M_a on ait

$$\vec{E}_\parallel(M_\mathrm{a}) = -\vec{E}_\parallel(M_\mathrm{a}) \qquad \text{donc} \qquad \vec{E}_\parallel(M_\mathrm{a}) = \vec{0}\,.$$

> ***Remarque :*** *On pourra retenir que l'anti-symétrique est l'opposé du symétrique ... cependant le plus simple (et le plus utile pour les calculs avec le théorème de Gauss qui suivront) est de raisonner en termes de composantes parallèles ou normales au plan d'(anti)-symétrie.*

d) Dsitribution à haut degré de symétrie

Une distribution de charge est dite **à haut degré de symétrie**
si la direction du champ électrostatique en tout point de l'espace
peut être déterminée uniquement par l'étude des symétries.

Les distributions à haut degré de symétrie sont a priori des exceptions ! Toutefois, de nombreuses applications de l'électrostatique (capteurs, condensateurs, etc.) les exploitent ... si bien que presque toutes les distributions que nous étudierons cette année seront à haut degré de symétrie.

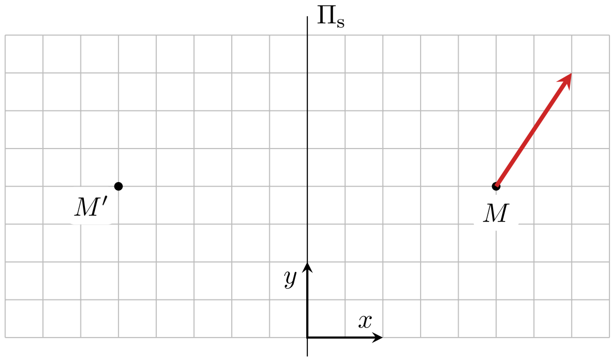
e) Mise en pratique

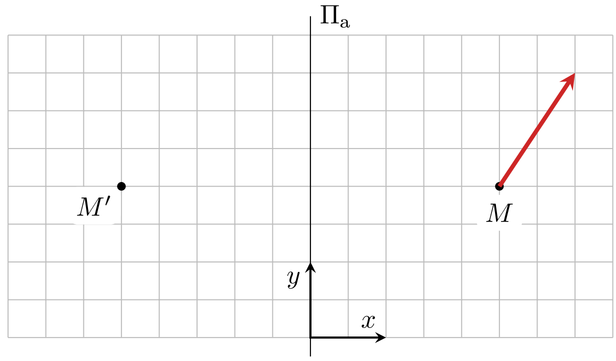
Exercice C2 : Symétries du champ électrostatique

Considérons les deux situations représentées ci-dessous, dans lesquelles diffère la nature du plan d'(anti)symétrie.

1 - À partir du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ représenté, construire graphiquement le champ $\vec{E}(M')$.

2 - En déduire des relations entre les composantes du champ électrostatique $E_x(x,y)$, $E_y(x,y)$, $E_x(-x,y)$ et $E_y(-x,y)$.





Pour le plan de symétire : $E_x(-x,y) = -E_x(x,y)$ et $E_y(-x,y) = E_y(x,y)$
Pour le plan d'antisymétrie : $E_x(-x,y) = E_x(x,y)$ et $E_y(-x,y) = -E_y(x,y)$

Espace 20

II.3 - Invariances de la distribution de charges, variables du champ électrostatique

a) Invariance par translation le long d'un axe

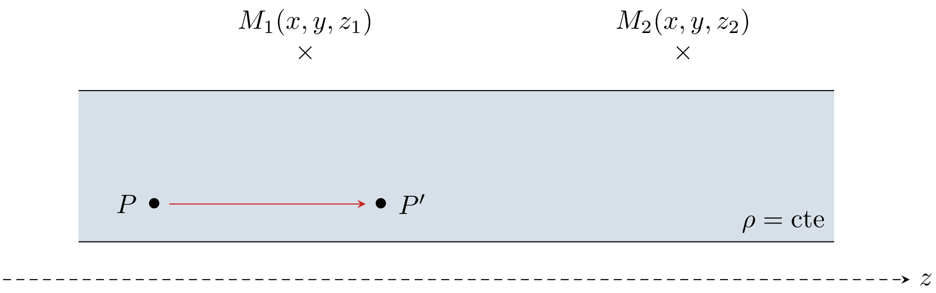
Une distribution de charge est dite **invariante par translation le long d'un axe** (Oz)
si pour tout point P' image de P par translation de vecteur directeur $\vec{e}_z$ on a

$$\rho(P') = \rho(P).$$

BY-NC-SA

Étienne Thibierge, 29 septembre 2020, www.etienne-thibierge.fr

Un exemple pour comprendre : plaque infinie dans la direction (Oz).



Traduction de l'invariance sur ρ :
$\rho(P)$ indépendant de la coordonnée z du point P.

Espace 21

Conséquence sur le champ électrostatique :

La distribution étant invariante par translation suivant $\vec{e}_z$, elle est identique vue des points M_1 et M_2. On en déduit que le champ créé ne dépend pas de leur coordonnée z.

Espace 22

Généralisation :

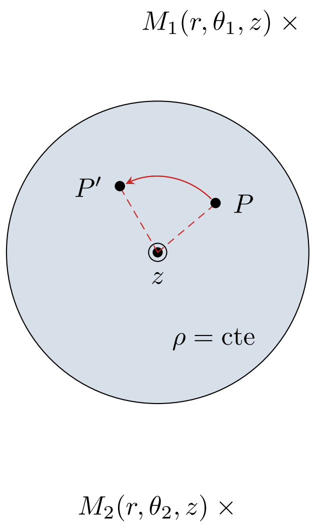
Le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé en un point M
par une distribution de charge invariante par translation le long d'un axe (Oz)
ne dépend pas de la coordonnée z du point M.

b) Invariance par rotation autour d'un axe

Une distribution de charge est dite **invariante par rotation autour d'un axe** (Oz)
si pour tout point P' image de P par rotation d'axe $\vec{e}_z$ on a

$$\rho(P') = \rho(P).$$

Un exemple pour comprendre : cylindre infini dans la direction (Oz).



Traduction de l'invariance sur ρ :

$\rho(P)$ indépendant de la coordonnée angulaire θ du point P.

Espace 23

Conséquence sur le champ électrostatique :

La distribution étant invariante par rotation autour de l'axe (Oz), elle est identique vue des points M_1 et M_2. On en déduit que le champ créé ne dépend pas de leur coordonnée θ.

Espace 24

> ***Remarque :*** *sur cet exemple, la distribution possède également une invariance par translation le long de l'axe (Oz) : le champ qu'elle créée ne dépend donc ni de θ ni de z, ou autrement dit il ne dépend que de la seule variable r : $\vec{E} = \vec{E}(r)$.*

Généralisation :

Le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé en un point M
par une distribution de charge invariante par rotation autour d'un axe (Oz)
ne dépend pas de la coordonnée angulaire θ du point M autour de cet axe.

BY-NC-SA

III - Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss est un théorème qui permet un calcul relativement simple du champ électrostatique créé par des distributions à haut degré de symétrie. Il est toujours valable, mais inefficace, dans les autres cas.

III.1 - Démonstration à partir de l'équation de Maxwell-Gauss

a) Introduction culturelle : les équations de Maxwell

Les équations de Maxwell sont les équations fondamentales de l'électromagnétisme. Elles jouent un rôle analogue au principe fondamental de la dynamique en mécanique. En particulier, ce sont des principes : elles ne sont pas démontrables ... mais n'ont jamais été mises en défaut par les expériences.

Au nombre de quatre, elles portent sur la divergence et le rotationnel des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$: ce sont donc des équations locales, formulées en tout point de l'espace. Elles permettent (au moins dans le principe) de déterminer les champs connaissant la distribution des sources de champ (charges pour $\vec{E}$, courant et aimantation pour $\vec{B}$).

James Maxwell a énoncé ces équations en 1865 en procédant à une synthèse de diverses lois expérimentales connues à l'époque, et en comprenant qu'il y manquait un terme ... le terme en question a permis de prédire l'existence des ondes électromagnétiques avant de les observer, ce qui est particulièrement rare dans l'histoire de la physique. On peut également noter l'exploit mathématique de Maxwell : l'analyse vectorielle, et donc les notions de divergence et rotationnel d'un champ, n'ont été formalisées qu'au tout début du XX$^{\text{e}}$ siècle.

b) Équation de Maxwell-Gauss

Équation de Maxwell-Gauss :

En tout point M de l'espace, $\operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

Espace 25

avec $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$ est la **permittivité diélectrique du vide**.

Elle est valable en régime stationnaire et en régime variable.

Rappel : en coordonnées cartésiennes (et seulement dans ces coordonnées),

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

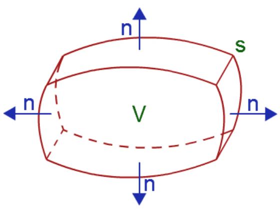
Espace 26

$\rightsquigarrow$ l'équation de Maxwell-Gauss est donc une équation aux dérivées partielles sur les composantes du champ électrique.

Dans certains cas simples (haute symétrie + conditions aux limites connues), le champ électrique peut être déterminé directement par intégration de l'équation de Maxwell-Gauss.

c) De l'équation de Maxwell-Gauss au théorème de Gauss

Théorème de Green-Ostrogradski :



Soit $\mathcal{S}$ une surface fermée orientée vers l'extérieur délimitant un volume $\mathcal{V}$.
Pour tout champ vectoriel $\vec{A}$ suffisamment régulier,

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\operatorname{div} \vec{A})\,\mathrm{d}V = \oint\!\!\!\oint_{\mathcal{S}} \vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

> ***Remarque :*** *dans la pratique en PT, le théorème de Green-Ostrogradski ne sert que pour des démonstrations formelles.*

BY-NC-SA

Démonstration du théorème de Gauss : Considérons une surface fermée $\mathcal{S}$ de normale orientée vers l'extérieur : Une telle surface est usuellement nommée **surface de Gauss**.

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{E} \, \mathrm{d}V \underbrace{=}_{\text{GO}} \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \underbrace{=}_{\text{MG}} \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint \rho \, \mathrm{d}V = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

où Q_{int} est la charge contenue à l'intérieur de la surface de Gauss.

Espace 27

Théorème de Gauss :

Le flux du champ électrostatique sortant d'une surface de Gauss
est relié à la charge contenue à l'intérieur de cette surface,

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}\,.$$

où le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est orienté vers l'exérieur.

Il va sans dire que le théorème de Gauss ne s'applique que pour une surface de Gauss, c'est-à-dire une surface fermée et orientée vers l'extérieur ...

Quel est l'effet des charges situées à l'extérieur de la surface de Gauss ?

Elles n'ont aucun effet sur le flux sortant de la surface de Gauss ... mais ça ne veut pas dire qu'elles n'ont aucun effet « tout court » sur le champ. En particulier, l'étude des symétries et des invariances (donc de la direction et des variables dont dépend le champ) se fait obligatoirement en considérant la totalité de la distribution. Elles ont donc un effet sur le champ.

Espace 28

Quel est l'effet de la position des charges à l'intérieur de la surface de Gauss ?

Idem : aucun effet sur le flux, mais elles en ont sur la direction et les variables dont dépend le champ. Elles ont donc un effet sur le champ.

Espace 29

III.2 - Exemple : champ créé par une sphère uniformément chargée

III.3 - Exemple : champ créé par un cylindre uniformément chargé

III.4 - Exemple : champ créé par un plan uniformément chargé

BY-NC-SA

IV - Densité volumique d'énergie électrostatique

Une particule chargée placée dans un champ électrostatique est accélérée, donc acquiert de l'énergie cinétique que lui fournit le champ via la force de Coulomb.

Un champ électrostatique est un réservoir d'énergie.
La **densité volumique d'énergie électrostatique** s'écrit

$$w_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \overrightarrow{E}^2$$

Sens physique :

un volume $\mathrm{d}\tau$ au voisinage d'un point M contient une énergie d'origine électrostatique $\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 \overrightarrow{E}^2\,\mathrm{d}\tau$.

Espace 30

BY-NC-SA