TD 9 – Électromagnétisme et mécanique — *Correction*

Champ de force central et conservatif

Exercice 1 : Champ gravitationnel créé par le Soleil

1 | 1 |

▷ *Théorème de Gauss gravitationnel.*

1 On se place en coordonnées sphériques de centre O le centre du Soleil, et on cherche à calculer le champ gavitationnel en un point M quelconque de l'espace.

• **Symétries :** tout plan contenant les points O et M est plan de symétrie de la distribution de masse, donc $\vec{G}(M)$ est inclus dans chacun de ces plans, donc dans leur intersection. On en déduit que $\vec{G}(M)$ est purement radial.

• **Invariances :** la distribution de masse est invariante par toute rotation autour du centre O du Soleil, donc $\vec{G}(M)$ ne dépend pas des variables angulaires θ et φ.

• **Conclusion :**

$$\boxed{\vec{G}(M) = G_r(r)\,\vec{e}_r\,.}$$

2 Les forces de gravitation et de Coulomb s'écrivent respectivement

$$\vec{F}_{\mathrm{g}} = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\vec{e}_r \qquad \longleftrightarrow \qquad \vec{F}_{\mathrm{C}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\vec{e}_r$$

On en déduit que la masse et la charge jouent des rôles analogues, tout comme les constantes $-\mathcal{G}$ et $1/4\pi\varepsilon_0$. Le théorème de Gauss s'écrit donc

$$\oiint_{\mathrm{SG}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0} \qquad \longleftrightarrow \qquad \boxed{\oiint_{\mathrm{SG}} \vec{G}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = -4\pi\mathcal{G}\,M_{\mathrm{int}}\,,}$$

avec Q_{int} (resp. M_{int}) la charge (resp. la masse) intérieure à la surface de Gauss.

3 Considérons une surface de Gauss sphérique de rayon r.

• **Flux sortant :**

$$\oiint_{\mathrm{SG}} \vec{G}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = 4\pi r^2\,G_r(r)\,.$$

• **Masse intérieure :**

▷ si $r \leq R$,

$$M_{\mathrm{int}} = \frac{4}{3}\pi\mu_0 r^3\,,$$

▷ si $r \geq R$, la totalité du Soleil se trouve à l'intérieur de la surface de Gauss, donc la masse totale est égale à la masse du Soleil,

$$M_{\mathrm{int}} = M_{\mathrm{S}} = \frac{4}{3}\pi\mu_0 R^3\,.$$

• **Conclusion :**

▷ pour $r \leq R$,

$$\cancel{4\pi} r^2\,G_r(r) = -\cancel{4\pi}\mathcal{G}\times\frac{4}{3}\pi\mu_0 r^3 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\vec{G}(r\leq R) = -\frac{4}{3}\pi\mu_0\mathcal{G}r\,\vec{e}_r\,,}$$

▷ pour $r \geq R$,

$$\cancel{4\pi} r^2\,G_r(r) = -\cancel{4\pi}\mathcal{G}M_{\mathrm{S}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\vec{G}(r\geq R) = -\mathcal{G}\frac{M_{\mathrm{S}}}{r^2}\,\vec{e}_r\,.}$$

4 La force exercée par le Soleil sur un objet de masse m situé à la surface de la Terre vaut

$$\vec{F}_{\mathrm{S}} = m\vec{G}(r\!=\!D) = -\mathcal{G}\frac{M_{\mathrm{S}} m}{D^2}\vec{e}_r$$

Numériquement, pour une personne de 70 kg, on trouve $F_{\mathrm{S}} = 4\cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}$. La force gravitationnelle exercée par la Terre sur un objet situé à sa surface n'est autre que le poids dudit objet, soit ici environ 700 N.

Exercice 2 : Comète de Halley

1 | 1

- *Loi de Kepler ;*
- *Équation d'une conique.*

1 Voir figure 1.

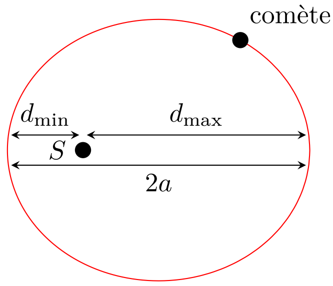

Figure 1 – Schéma de la trajectoire de la comète de Halley. Le Soleil S est un des foyers de l'ellipse. On représente en outre les distances minimale d_{min} et maximale d_{max} de la comète au Soleil, ainsi que le grand axe $2a$ de l'ellipse.

2 La troisième loi de Kepler permet de déterminer le demi-grand axe a, puisque

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{m_{\mathrm{S}}\mathcal{G}} \qquad \text{d'où} \qquad a = \left(\frac{T^2\, m_{\mathrm{S}}\, \mathcal{G}}{4\pi^2}\right)^{1/3}.$$

Or d'après la figure

$$d_{\mathrm{max}} + d_{\mathrm{min}} = 2a$$

d'où on déduit

$$d_{\mathrm{max}} = 2\left(\frac{T^2\, m_{\mathrm{S}}\, \mathcal{G}}{4\pi^2}\right)^{1/3} - d_{\mathrm{min}} = 5{,}3\cdot 10^{12}\,\mathrm{m} = 1{,}1\cdot 10^2\ \mathrm{u.a.}$$

3 D'après le schéma,

$$d_{\mathrm{max}} = r(0) = \frac{p}{1-e} \qquad \text{et} \qquad d_{\mathrm{min}} = r(\pi) = \frac{p}{1+e}$$

d'où on déduit

$$\frac{d_{\mathrm{min}}}{d_{\mathrm{max}}} = \frac{1-e}{1+e} \qquad \text{soit} \qquad e = \frac{1-\dfrac{d_{\mathrm{min}}}{d_{\mathrm{max}}}}{1+\dfrac{d_{\mathrm{min}}}{d_{\mathrm{max}}}} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{e = \frac{d_{\mathrm{max}} - d_{\mathrm{min}}}{d_{\mathrm{max}} + d_{\mathrm{min}}} = 0{,}97}$$

et de même

$$\boxed{p = d_{\mathrm{min}}(1+e) = 1{,}1\ \mathrm{u.a.}}$$

Exercice 3 : Expérience de Rutherford 2 | 2

▷ *Conservation du moment cinétique ;*
▷ *Conservation de l'énergie mécanique ;*
▷ *Énergie potentielle effective.*

1 Plaçons-nous en coordonnées cylindriques d'axe Oz. La particule α étant chargée positivement, elle subit une force de Coulomb répulsive exercée par le noyau placé en O s'écrivant

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_\alpha\, q_{\rm noy}}{r^2}\vec{e}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{r^2}\vec{e}_r$$

ce qui s'écrit bien sous la forme

$$\boxed{\vec{F} = \frac{K}{r^2}\vec{e}_r \qquad \text{avec} \qquad K = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\,.}$$

Si cette force est conservative, alors comme elle est dirigée suivant $\vec{e}_r$ et qu'elle ne dépend que de r elle s'écrit sous la forme

$$\vec{F} = -\frac{\mathrm{d}E_{\rm p}}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$$

ce qui permet d'identifier

$$\frac{\mathrm{d}E_{\rm p}}{\mathrm{d}r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{r^2}$$

et en intégrant avec une constante d'intégration choisie nulle ($E_{\rm p}(r\to\infty) = 0$),

$$\boxed{E_{\rm p}(r) = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0\, r} = \frac{K}{r}\,.}$$

2 Le poids de la particule α est négligeable devant la force de Coulomb exercée par le noyau. On peut donc considérer qu'elle n'est soumise qu'à cette force, qui dérive d'une énergie potentielle. On en déduit que le mouvement de la particule α est conservatif, donc $\boldsymbol{E_{\rm m}}$ **est une constante du mouvement**. À l'instant initial, la particule est à l'infini où $E_{\rm p} = 0$ et elle est animée d'une vitesse initiale de norme v_0, d'où

$$\boxed{E_{\rm m} = \frac{1}{2}\,m\,{v_0}^2\,.}$$

3 Appliquons la loi du moment cinétique à la particule α. Comme la force de Coulomb est dirigée selon $\vec{e}_r$ alors sa droite d'action passe par O et donc son moment en O est nul. Ainsi, d'après la loi du moment cinétique,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$$

donc le moment cinétique évalué en O de la particule α est une constante du mouvement. Calculons-le à partir des conditions initiales. En utilisant les notations de la figure de l'énoncé,

$$\overrightarrow{OM}(0) = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM_\infty} = OH\;\vec{e}_x + b\,\vec{e}_y\,.$$

Ainsi, à l'instant initial,

$$\vec{L}_O(0) = m(OH\;\vec{e}_x + b\,\vec{e}_y)\wedge(-v_0\;\vec{e}_x) = -m\,b\,v_0(\vec{e}_y\wedge\vec{e}_x) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\vec{L}_O = m\,b\,v_0\,\vec{e}_z\,.}$$

Enfin, exprimons $\vec{L}_O$ en coordonnées polaires,

$$\vec{L}_O = m(r\,\vec{e}_r)\wedge(\dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta) = m\,r^2\,\dot{\theta}(\vec{e}_r\wedge\vec{e}_\theta) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\vec{L}_O = m\,r^2\,\dot{\theta}\,\vec{e}_z\,.}$$

4 À un instant quelconque, l'énergie mécanique de la particule α s'écrit sous la forme

$$E_{\rm m} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{K}{r}$$

Pour l'écrire comme une fonction de r seulement, il faut remplacer la dépendance en $\dot\theta$ par une dépendance en r, ce qui est rendu possible grâce au moment cinétique,

$$\boxed{\overrightarrow{L_O} = m\,r^2\,\dot\theta\,\overrightarrow{e}_z = m\,b\,v_0\,\overrightarrow{e}_z\,,}$$

ce qui permet d'isoler

$$\dot\theta = \frac{bv_0}{r^2}$$

et d'écrire ainsi

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}m\dot r^2 + \frac{1}{2}mr^2\frac{b^2v_0^{\,2}}{r^4} + \frac{K}{r}\,,$$

ce qui se met sous la forme demandée

$$\boxed{E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}m\dot r^2 + E_\mathrm{p}^\star(r) \qquad \text{avec} \qquad E_\mathrm{p}^\star(r) = \frac{m\,b^2\,v_0^{\,2}}{2r^2} + \frac{K}{r}\,.}$$

Cette fonction $E_\mathrm{p}^\star(r)$ est **l'énergie potentielle effective** de la particule α.

5 Lorsque la particule passe en S, sa distance à O est par définition minimale et donc $\dot r = 0$. L'énergie mécanique est donc tout simplement égale à $E_\mathrm{p}^\star(r_\mathrm{min})$,

$$\boxed{E_\mathrm{m} = \frac{m\,b^2v_0^{\,2}}{2r_\mathrm{min}^2} + \frac{K}{r_\mathrm{min}}\,.}$$

Par conservation de l'énergie mécanique, on en déduit

$$\frac{1}{2}\,m\,v_0^{\,2} = \frac{m\,b^2\,v_0^{\,2}}{2r_\mathrm{min}^2} + \frac{K}{r_\mathrm{min}}$$

Pour isoler r_min, le plus naturel consiste à multiplier l'équation par r_min^2,

$$\frac{1}{2}\,m\,v_0^{\,2}\,r_\mathrm{min}^2 = \frac{1}{2}\,m\,b^2v_0^{\,2} + Kr_\mathrm{min}$$

ce qui conduit à une équation du second degré

$$r_\mathrm{min}^2 - \frac{2K}{mv_0^{\,2}}r_\mathrm{min} - b^2 = 0\,.$$

Cette équation a pour discriminant

$$\Delta = \left(\frac{2K}{mv_0^{\,2}}\right)^2 + 4b^2 > 0$$

et pour solutions

$$r_\pm = \frac{1}{2}\left(\frac{2K}{mv_0^{\,2}} \pm \sqrt{\left(\frac{2K}{mv_0^{\,2}}\right)^2 + 4b^2}\right)\,.$$

Comme un rayon de coordonnées polaires est par définition positif, seule la solution avec un signe + a un sens physique, d'où on déduit

$$r_\mathrm{min} = \frac{1}{2}\left(\frac{2K}{mv_0^{\,2}} + \sqrt{\left(\frac{2K}{mv_0^{\,2}}\right)^2 + 4b^2}\right)$$

$$= \frac{K}{mv_0^{\,2}}\left[1 + \sqrt{1 + 4b^2\left(\frac{mv_0^{\,2}}{2K}\right)^2}\right]$$

$$\boxed{r_\mathrm{min} = \frac{K}{mv_0^{\,2}}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{b\,m\,v_0^{\,2}}{K}\right)^2}\right]}$$

6 En inversant la relation donnée, on trouve

$$b = \frac{K}{mv_0^{\,2}\tan(D/2)} = \frac{Ze^2}{2\pi\,\varepsilon_0\,m\,v_0^{\,2}\tan(D/2)}$$

d'où $b_1 = 2{,}4\cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}$ et $b_2 = 0$, ce qui donne alors $r_\mathrm{min1} = 2{,}4\cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}$ et $r_\mathrm{min2} = 2{,}7\cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}$. On en déduit qu'**un noyau d'or a une taille de l'ordre de $\mathbf{10^{-14}}$ m** (c'est un assez gros noyau), ce qui est bien plus petit que la taille de l'atome ($10^{-10}\,\mathrm{m}$) connue par Rutherford.

Exercice 4 : Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

2 | 2 |

- *Caractéristiques d'une orbite circulaire ;*
- *Énergie mécanique.*

1 Le proton exerce une force de Coulomb attractive sur l'électron. Dans un repérage polaire dans le plan du mouvement,

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\vec{u}_r\,.}$$

Comme cette force est conservative, alors l'énergie potentielle dont elle dérive est telle que

$$\vec{F} = -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r}\,\vec{u}_r$$

ce qui conduit à

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r} = \frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r^2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{E_\mathrm{p}(r) = -\frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r}}$$

en prenant comme référence $E_\mathrm{p}(r\to\infty) = 0$.

2 L'électron en mouvement par rapport à un référentiel lié au proton. Son poids est négligeable devant la force électrique exercée par le proton, ce qui a été justifié dans le chapitre sur les particules chargées. D'après la loi de la quantité de mouvement appliquée à l'électron en mouvement circulaire,

$$m\,\vec{a} = \vec{F}$$

ce qui donne en projection sur $\vec{u}_r$

$$-mr\dot\theta^2 = -\frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,.$$

Or $\dot\theta^2 = v^2/r^2$, d'où

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,,$$

et ainsi

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,m\,r}}\,.}$$

L'énergie mécanique s'écrit alors

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 - \frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r} = \frac{e^2}{8\pi\,\varepsilon_0\,r} - \frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{E_\mathrm{m} = -\frac{e^2}{8\pi\,\varepsilon_0\,r}}$$

3 D'après la question précédente,

$$E_\mathrm{p} = 2E_\mathrm{m}\,.$$

> *Comme $E_m < 0$ il n'y a pas de contradiction !*

4 Comme l'orbite de l'électron est circulaire, son vecteur vitesse est orthoradial alors que son vecteur position est radial. Les deux vecteurs sont donc perpendiculaires. La norme du moment cinétique de l'électron évalué en P vaut donc

$$L_P = r_n \times mv_n \qquad \text{soit} \qquad \boxed{L_P = \sqrt{\frac{m\,e^2\,r_n}{4\pi\,\varepsilon_0}}\,.}$$

5 L'hypothèse de quantification de Bohr indique que

$$\sqrt{\frac{m\,e^2\,r_n}{4\pi\,\varepsilon_0}} = n\hbar \qquad \text{soit} \qquad \frac{m\,e^2\,r_n}{4\pi\,\varepsilon_0} = n^2\hbar^2$$

et ainsi

$$\boxed{r_n = \frac{4\pi\,\varepsilon_0\,\hbar^2}{m\,e^2}\,n^2\,.}$$

6 Connaissant r_n, on en déduit les valeurs permises pour l'énergie mécanique,

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{m\,e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,\hbar^2\,n^2} \qquad \text{soit} \qquad E_n = -\frac{E_0}{n^2} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{E_0 = \frac{m\,e^4}{32\pi^2{\varepsilon_0}^2\hbar^2} = 13{,}6\,\mathrm{eV}}$$

7 Repartons de la condition de quantification du moment cinétique,

$$L_P = m\,r_n\,v_n = n\hbar\,.$$

En utilisant la relation de de Bröglie, $v_n = h/m\lambda_n$,

$$m\,r_n\,\frac{h}{m\lambda_n} = n\hbar$$

d'où le résultat annoncé,

$$\boxed{2\pi\,r_n = n\lambda_n\,.}$$

La longueur $2\pi r_n$ correspond au périmètre de l'orbite circulaire, qui doit ici correspondre à un nombre entier de longueurs d'ondes de de Bröglie : c'est une condition de type **résonance d'onde stationnaires**.

Exercice 5 : Gravity

exemple officiel CCINP | 2 | 2 |

- *Loi de Kepler ;*
- *Orbite circulaire et elliptique ;*
- *Conservation de l'énergie mécanique.*

1 Dans un repère polaire de centre O le centre de la Terre,

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{r^2}\overrightarrow{e_r} \qquad \text{et} \qquad E_\mathrm{p} = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{r}\,.}$$

2 Pour un système en rotation uniforme, $r = \text{cte}$ donc $\dot r = 0$ et $\ddot r = 0$ et $v = r\dot\theta = 0$ donc $\ddot\theta = 0$. Le PFD dans la base polaire s'écrit donc

$$-m\frac{v^2}{r}\overrightarrow{e_r} = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{r^2}\overrightarrow{e_r} \qquad \text{soit} \qquad v^2 = \frac{\mathcal{G}M_0}{r}\,.$$

Or le mouvement est par hypothèse circulaire de rayon r et uniforme de période T, donc $v = 2\pi r/T$ et

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M_0}{r}$$

ce qui conduit à la troisième loi de Kepler pour l'orbite circulaire,

$$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{M_0\mathcal{G}}}$$

L'énergie mécanique de l'astronaute vaut alors

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}M_0 m}{r} = \frac{1}{2}m\frac{\mathcal{G}M_0}{r} - \frac{\mathcal{G}M_0 m}{r} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{E_\mathrm{m} = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{2r}\,.}$$

3 D'après la troisième loi de Kepler,

$$\frac{{T_\mathrm{S}}^2}{r_\mathrm{S}^3} = \frac{{T_\mathrm{H}}^2}{r_\mathrm{H}^3} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{T_\mathrm{S} = T_\mathrm{H}\left(\frac{r_\mathrm{S}}{r_\mathrm{H}}\right)^{3/2} = 93\,\mathrm{min.}}$$

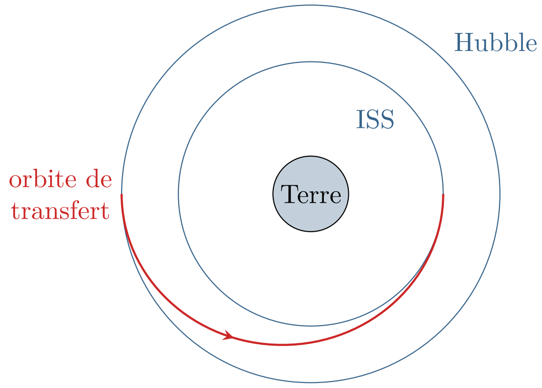

Figure 2 – Orbite de transfert. Les deux orbites de Hubble et de l'ISS sont représentées en bleu, l'orbite de transfert en rouge. Évidemment, la figure n'est pas à l'échelle ... Version couleur sur le site de la classe.

On a par ailleurs

$$\boxed{v_\mathrm{H} = \frac{2\pi r_\mathrm{H}}{T_\mathrm{H}} = 7{,}6 \cdot 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \qquad \text{et} \qquad v_\mathrm{S} = \frac{2\pi r_\mathrm{S}}{T_\mathrm{S}} = 7{,}7 \cdot 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

(la différence n'apparaît que sur le troisième chiffre significatif ... mais l'énoncé n'en donne que deux pour T_H).

$\boxed{4}$ Voir figure 2. Le centre de la Terre est forcément l'un des foyers de l'ellipse, d'après la première loi de Kepler.

$\boxed{5}$ L'énergie mécanique en orbite elliptique prend la même forme qu'en orbite circulaire en remplaçant le rayon par le demi-grand axe a (résultat admis dans le cours). Ici, $2a = r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H}$, d'où on déduit

$$\boxed{E_\mathrm{m} = -\frac{\mathcal{G} M_0 m}{r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H}}}$$

$\boxed{6}$ À l'apogée, l'astronaute est à distance r_H du centre de la Terre, donc

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2} m v_\mathrm{apo}^2 - \frac{\mathcal{G} M_0 m}{r_\mathrm{H}} = -\frac{\mathcal{G} M_0 m}{r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H}}$$

ce qui donne

$$v_\mathrm{apo}^2 = \frac{2\mathcal{G} M_0 r_\mathrm{S}}{r_\mathrm{H}(r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H})}$$

et en utilisant la troisième loi de Kepler pour faire apparaître la période à la place de $M_0\mathcal{G}$

$$v_\mathrm{apo}^2 = \frac{2 r_\mathrm{S} \times 4\pi^2 r_\mathrm{H}^3}{r_\mathrm{H}(r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H}) \times T_\mathrm{H}^2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_\mathrm{apo} = \frac{2\pi r_\mathrm{H}}{T_\mathrm{H}} \sqrt{\frac{2 r_\mathrm{S}}{r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H}}} = 7{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

Par analogie (et en vérifiant que le raisonnement se transpose sans problème !),

$$\boxed{v_\mathrm{pér} = \frac{2\pi r_\mathrm{S}}{T_\mathrm{S}} \sqrt{\frac{2 r_\mathrm{H}}{r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H}}} = 7{,}7 \cdot 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

Pour le contrôle de la vitesse, je ne sais pas trop comment l'astronaute peut faire. Les satellites utilisent des moteurs, mais je ne suis pas sûr que l'astronaute en ait !

$\boxed{7}$ Même sur l'orbite de transfert, l'astronaute n'est soumis qu'à la force exercée par la Terre, et son mouvement vérifie la troisième loi de Kepler. Ainsi, la période T_transf à laquelle il parcourt l'orbite de transfert est reliée au demi-grand axe $a = r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H}$ par

$$\frac{T_\mathrm{transf}^2}{\left(\dfrac{r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H}}{2}\right)^3} = \frac{4\pi^2}{M_0\mathcal{G}} = \frac{T_\mathrm{H}^2}{r_\mathrm{H}^3}\,.$$

Par ailleurs l'astronaute ne parcourt que la moitié de l'orbite : le voyage prend une durée $\Delta t = T_\mathrm{transf}/2$, d'où

$$\frac{8 \times 4\,\Delta t^2}{(r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H})^3} = \frac{T_\mathrm{H}^2}{r_\mathrm{H}^3} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\Delta t = \frac{T_\mathrm{H}}{\sqrt{32}} \left(1 + \frac{r_\mathrm{S}}{r_\mathrm{H}}\right)^{3/2} = 47\,\mathrm{min}\,.}$$

Notez que cette durée est celle pour passer de l'orbite de Hubble à celle de l'ISS ... mais pas pour atteindre l'ISS. Sauf coup de chance, l'opération est d'ailleurs mal engagée pour les astronautes : comme la vitesse ne dépend pas de la masse mais que de la distance au centre de la Terre, tous les corps sur la même orbite vont à la même vitesse. À moins d'arriver sur l'orbite juste au bon moment (et c'est comme par hasard ce qui arrive dans le film), les astronautes n'ont aucune chance de rattraper ou d'être rattrapés par l'ISS.

Exercice 6 : Profil de masse volumique au sein de la Terre — oral banque PT | 3 | 2

▷ *Théorème de Gauss gravitationnel.*

1 Cette relation est l'analogue gravitationnel du **théorème de Gauss**, avec $\vec{g} \leftrightarrow \vec{E}$, $\mathcal{G} \leftrightarrow -1/4\pi\varepsilon_0$ et $M_{\text{int}} \leftrightarrow Q_{\text{int}}$ charge électrique contenue à l'intérieur de la surface de Gauss.

2 Supposons la masse volumique uniforme,

$$M_T = \frac{4}{3}\pi\rho_0 R_T^3$$

Raisonnons une sphère de rayon r. Pour cette sphère,

$$\oiint -g(r)\vec{u}_r \cdot \mathrm{d}S\,\vec{u}_r = -4\pi r^2\, g(r)$$

et

$$M_{\text{int}} = \begin{cases} M_T & \text{si } r > R_T \\ \dfrac{4}{3}\pi\rho_0 r^3 = M_T\dfrac{r^3}{R_T^3} & \text{si } r \leq R_T \end{cases}$$

Ainsi, d'après le théorème de Gauss gravitationnel,

$$\boxed{g(r) = \begin{cases} \mathcal{G}\dfrac{M_T}{r^2} & \text{si } r > R_T \\ \mathcal{G}M_T\dfrac{r}{R_T^3} & \text{si } r \leq R_T \end{cases}}$$

L'allure de $g(r)$ est représentée figure 3.

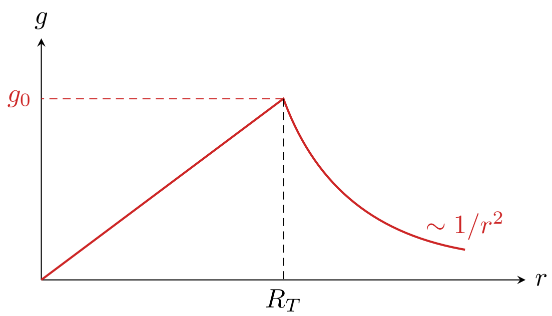

Figure 3 – **Champ de pesanteur au sein de la Terre dans le modèle de masse volumique uniforme.**

3 À partir de la question précédente, on trouve

$$\boxed{g_0 = g(R_T) = \mathcal{G}\frac{M_T}{R_T^2} = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.}$$

4 Raisonnons toujours sur une sphère Σ de rayon r. La masse $M_{\text{int}}(r)$ contenue dans cette sphère vaut

$$M_{\text{int}}(r) = \iiint \rho(r')\,\mathrm{d}V = \iiint \rho(r')r'^2\mathrm{d}r'\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^r \rho(r')\,\mathrm{d}r' \times \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \times \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi}_{=4\pi}\,.$$

> ***Attention !*** *La coordonnée θ des coordonnées sphériques n'est définie que entre 0 et π ! !*
> *La valeur 4π se retrouve très rapidement en raisonnant par analogie avec le volume d'une sphère de rayon a,*
> $$V = \int_0^R r^2\,\mathrm{d}r \times \int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \times \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{R^3}{3} \times 4\pi\,.$$

D'après le théorème de Gauss gravitationnel,

$$-4\pi r^2\,g(r) = -4\pi\mathcal{G} \times 4\pi \int_0^r \rho(r')r'^2\mathrm{d}r' \qquad \text{soit} \qquad r^2 g(r) = 4\pi\mathcal{G} \int_0^r \rho(r')r'^2\mathrm{d}r'\,.$$

Pour obtenir $\rho(r)$, on peut alors dériver cette relation par rapport à r,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 g(r)\right) = 4\pi\mathcal{G}\,r^2\rho(r) \qquad \text{soit} \qquad \rho(r) = \frac{1}{4\pi\mathcal{G}}\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 g(r)\right)\,.$$

> *Rappelons que pour une fonction f quelconque on a*
> $$\int_0^x f(x')\,\mathrm{d}x' = F(x) - F(0)$$
> *avec F une primitive de la fonction f. Par dérivation, on trouve bien*
> $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x f(x')\,\mathrm{d}x'\right) = F'(x) = f(x)\,.$$
> *Le raisonnement mené ici revient ni plus ni moins à redémontrer l'équation « de Maxwell-Gauss » gravitationnelle dans le cas particulier de la symétrie sphérique,*
> $$\mathrm{div}\,\vec{g} = -4\pi\mathcal{G}\,\rho(r)\,.$$

On peut alors reconstruire la fonction $\rho(r)$ par morceaux.

- pour $0 < r < R_N$, $g(r) = Ar$ avec A une contante. Comme

$$g(r\!=\!R_N) = AR_N = g_0 \qquad \text{alors} \qquad A = \frac{g_0}{R_N}\,.$$

On en déduit

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi\mathcal{G}r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{g_0 r}{R_N}\right) = \frac{1}{4\pi\mathcal{G}r^2} \times \frac{3r^2 g_0}{R_N} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\rho(0 < r < R_N) = \frac{3g_0}{4\pi\mathcal{G}R_N}\,.}$$

> *On peut vérifier la cohérence avec la première question : une masse volumique uniforme correspond à un champ qui évolue linéairement.*

- pour $R_N < r < R_T$, $g(r) = g_0 = \text{cte}$, donc

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi\mathcal{G}\,r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 g_0\right) = \frac{1}{4\pi\mathcal{G}\,r^2} \times 2rg_0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\rho(R_N < r < R_T) = \frac{g_0}{2\pi\mathcal{G}r}\,.}$$

- enfin, pour $r > R_T$ le champ $g(r)$ décroît proportionnellement à $1/r^2$ donc $r^2 g(r)$ est constant, ce qui donne une dérivée nulle et

$$\boxed{\rho(r) = 0}$$

... ce qui était un peu évident : il n'y a plus de matière pour $r > R_T$.

Exercice 7 : Descente d'un satellite

oral CCINP PSI | 3 | 2

▷ *Résolution de problème ;*
▷ *Orbite circulaire ;*
▷ *Théorème de l'énergie mécanique.*

Compte tenu de la très faible variation d'altitude au cours d'une période, on peut faire l'approximation que tous les résultats établis pour une orbite circulaire demeurent valables en prenant simplement un rayon r dépendant (lentement) du temps. De façon précise, on suppose $\dot{r} \ll r\dot{\theta}$.

Sur une orbite circulaire de rayon R, la vitesse du satellite vaut

$$\overrightarrow{v} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_\mathrm{T}}{R}}\,\overrightarrow{e_\theta}$$

donc la force de frottement s'écrit

$$\overrightarrow{f} = -\frac{\alpha\mathcal{G}mM_\mathrm{T}}{R}\,\overrightarrow{e_\theta}$$

La variation d'énergie mécanique du satellite au cours d'une période est égale au travail de la force de frottement,

$$W = \int_\text{cercle} \overrightarrow{f}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \int_\text{cercle} \overrightarrow{f}\cdot(R\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e_\theta})$$

ce qui donne

$$W = -\alpha\mathcal{G}mM_\mathrm{T}\int_\text{cercle}\mathrm{d}\theta = -2\pi\alpha\mathcal{G}mM_\mathrm{T}\,.$$

Ainsi, au cours d'une période,

$$\Delta E_\mathrm{m} = -2\pi\alpha\mathcal{G}mM_\mathrm{T}\,.$$

Par ailleurs, l'énergie mécanique du satellite en orbite circulaire vaut

$$E_\mathrm{m} = -\frac{\mathcal{G}M_\mathrm{T}m}{2R}$$

et donc

$$\Delta E_\mathrm{m} = \frac{\mathcal{G}M_\mathrm{T}m}{2R} - \frac{\mathcal{G}M_\mathrm{T}m}{2(R-\Delta R)} \simeq -\frac{\mathcal{G}M_\mathrm{T}m}{2}\frac{\Delta R}{R^2}$$

en approximant $R(R-\Delta R) \simeq R^2$. Ainsi, au cours d'une période,

$$-2\pi\alpha\mathcal{G}mM_\mathrm{T} = -\frac{\mathcal{G}M_\mathrm{T}m}{2}\frac{\Delta R}{R^2} \qquad \text{soit} \qquad \Delta R = 4\pi R^2\alpha\,.$$

Ainsi, pour que l'altitude du satellite diminue de $\Delta h = 10\,\mathrm{km}$, il faut $\Delta h/\Delta R$ périodes.

Enfin, connaissant le rayon et la vitesse il n'est pas difficile d'estimer la période,

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{\mathcal{G}M_\mathrm{T}}}\,,$$

et de conclure sur la durée nécessaire pour que l'altitude diminue de Δh,

$$\Delta t = \frac{\Delta h\,T}{\Delta R} = \frac{2\pi R\,\Delta h}{4\pi R^2\alpha}\sqrt{\frac{R}{\mathcal{G}M_\mathrm{T}}}$$

d'où finalement

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta h}{2\alpha\sqrt{R\mathcal{G}M_\mathrm{T}}} = 62\cdot 10^6\,\mathrm{s} \simeq 2\,\mathrm{ans}\,.}$$