BLAISE PASCAL
PT 2020-2021

TD 9 – Électromagnétisme et mécanique

Champ de force central et conservatif

Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
Difficulté technique et calculatoire ;
Exercice important.

Flasher ce code pour accéder aux corrigés

Questions de cours

9.1 - En raisonnant par analogie entre les forces gravitationnelle et de Coulomb, retrouver l'énoncé du théorème de Gauss gravitationnel. L'appliquer pour établir l'expression du champ gravitationnel créé par une étoile de rayon R et de masse volumique μ_0 uniforme.

> ***Note aux étudiants :*** *cette question « de cours » a en fait été traitée en TD.*

9.2 - Dans le cas d'un champ central quelconque, établir la conservation du moment cinétique et ses conséquences (planéité du mouvement et loi des aires).

9.3 - En considérant le champ gravitationnel, construire l'énergie potentielle effective adaptée et l'utiliser pour discuter de la nature des trajectoires en fonction de la valeur de l'énergie mécanique.

> *La nature exacte de la conique trajectoire n'est pas à connaître. L'étudiant doit seulement être capable de construire l'allure de la courbe d'énergie potentielle effective en la justifiant qualitativement, puis de déterminer s'il existe ou non des états liés et/ou de diffusion.*

9.4 - Dans le cas particulier d'un mouvement circulaire dans le champ gravitationnel, montrer que le mouvement est uniforme et établir sa vitesse.

9.5 - Dans le cas particulier d'un mouvement circulaire dans le champ gravitationnel, établir la troisième loi de Kepler et la généraliser au cas d'une trajectoire elliptique. L'expression de la vitesse en orbite circulaire pourra être admise ou redémontrée.

9.6 - On rappelle que la première vitesse cosmique v_1 est la vitesse d'un satellite en orbite circulaire basse ($r \simeq R_\mathrm{T}$), et que la deuxième vitesse cosmique v_2 est la vitesse à communiquer à un satellite au niveau du sol pour qu'il puisse s'affranchir du champ de gravitation terrestre. Établir leur expression. Donner (ou retrouver rapidement) leur ordre de grandeur. L'expression de la vitesse en orbite circulaire pourra être admise ou redémontrée.

9.7 - Déterminer les caractéristiques de l'orbite géostationnaire (plan et rayon de l'orbite).

Exercice 1 : Champ gravitationnel créé par le Soleil — 1 | 1 |

▷ *Théorème de Gauss gravitationnel.*

On modélise le Soleil par une boule de rayon R et de masse volumique μ_0 uniforme. On cherche à déterminer le champ gravitationnel $\vec{G}$ créé par le Soleil en tout point de l'espace.

1 - Déterminer la direction de $\vec{G}$ et les variables dont il dépend.

2 - En raisonnant sur l'analogie formelle entre force de gravitation et force de Coulomb, retrouver le théorème de Gauss gravitationnel.

3 - En déduire l'expression de $\vec{G}$.

4 - Calculer la force gravitationnelle que vous subissez de la part du Soleil, connaissant sa masse $M_\mathrm{S} = 2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg et la distance Terre-Soleil $D = 1{,}5 \cdot 10^{14}$ m. Comparer à la force gravitationnelle que vous subissez de la part de la Terre.

Étienne Thibierge, 22 octobre 2020, www.etienne-thibierge.fr

Exercice 2 : Comète de Halley

1 | 1

▷ *Loi de Kepler ;*
▷ *Équation d'une conique.*

La comète de Halley est la plus connue. La première mention de son observation date de 611 av. J.-C. en Chine, et on la retrouve tout au long de l'Antiquité et du Moyen-Âge ... évidemment sans savoir qu'il s'agit d'une seule comète. Cette découverte a été formalisée en 1705 par Edmond Halley, qui publia un livre avançant que les observations en 1531, 1607 et 1682 concernaient en fait la même comète. Son prochain passage est prévu en 2061.

On sait aujourd'hui que la comète de Halley suit une trajectoire elliptique de période de révolution autour du Soleil 76 ans, sa distance minimale au Soleil étant de $d_{\min} = 0{,}59$ unités astronomiques.

Données :
▷ Une unité astronomique correspond à la distance moyenne Terre-Soleil, soit $1{,}5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$;
▷ Masse solaire $m_\mathrm{S} = 2{,}0 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$.

1 - Faire un schéma de la trajectoire indiquant la position du Soleil et $d_{\min}$.

2 - Déduire de la troisième loi de Kepler la plus grande distance au Soleil de la comète.

3 - Une conique est décrite par une équation polaire de la forme

$$r(\theta) = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$$

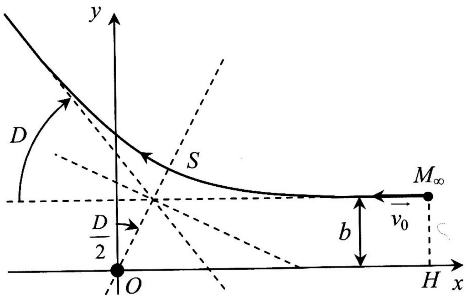
où l'origine du repérage polaire est prise sur un des foyers de la conique. Déterminer le paramètre p et l'excentricité e de la trajectoire de la comète de Halley.

Exercice 3 : Expérience de Rutherford

2 | 2

▷ *Conservation du moment cinétique ;*
▷ *Conservation de l'énergie mécanique ;*
▷ *Énergie potentielle effective.*

Entre 1909 et 1911, Ernest Rutherford et ses deux étudiants Hans Geiger et Ernest Marsden ont réalisé et interprété une expérience consistant à bombarder une mince feuille d'or avec des particules α, dont Rutherford avait précédemment montré qu'il s'agit de noyaux d'hélium. Ils observèrent que la plupart de ces particules traversaient la feuille sans être affectées (donc ne recontraient que du vide), mais que certaines étaient déviées, parfois très fortement. En reliant les angles de déviation aux dimensions microscopiques, cela permit la découverte du noyau atomique et l'estimation de sa taille.



Modélisons l'expérience en considérant une particule α de masse m et de charge $2e$, venant de l'infini avec la vitesse $-v_0\,\overrightarrow{e_x}$ et s'approchant avec un paramètre d'impact b d'un unique noyau cible de numéro atomique Z. Le paramètre d'impact est la distance minimale entre le prolongement de la trajectoire rectiligne de la particule et le noyau situé en O. Le noyau reste pratiquement immobile dans le référentiel terrestre : on travaille dans ce référentiel supposé galiléen, le repère étant situé sur la position O du noyau. La trajectoire suivie par la particule α est la branche d'hyperbole représentée ci-contre.

Données : $\varepsilon_0 = 8{,}9 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}$; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$; $m = 6{,}6 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ et $Z_\mathrm{Au} = 79$.

1 - Exprimer la force électrique subie par la particule α sous la forme $\overrightarrow{F} = K/r^2\,\overrightarrow{e_r}$ et exprimer l'énergie potentielle d'interaction.

2 - Montrer que l'énergie mécanique E_m de la particule α est une constante du mouvement et donner sa valeur à partir des conditions initiales.

3 - Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ de la particule α en O est un vecteur constant et donner la valeur de cette constante à l'aide des conditions initiales. La particule étant repérée par ses coordonnées polaires dans le plan (Oxy), montrer que $\overrightarrow{L_O}$ s'exprime de manière simple en fonction de r et $\dot\theta$.

4 - Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}m\dot r^2 + E_p^\star(r)$$

en explicitant la fonction $E_p^\star(r)$. Comment l'appelle-t-on ?

5 - On note S la position de la particule α pour laquelle elle passe au plus près du noyau d'or, et on note $r_{\min} = OS$ la distance minimale d'approche. Simplifier l'expression de $E_{\rm m}$ lorsque $r = r_{\min}$. En déduire

$$r_{\min} = \frac{K}{mv_0^2}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{m\,b\,v_0^2}{K}\right)^2}\right]$$

6 - On peut montrer que l'angle de déviation D de la particule est donnée par

$$\tan\frac{D}{2} = \frac{K}{m\,b\,v_0^2}\,.$$

Calculer b puis $r_{\min}$ pour $D_1 = 60°$ et $D_2 = 180°$ (particule renvoyée vers l'arrière). En déduire l'ordre de grandeur de la taille du noyau d'or.

Exercice 4 : Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène 2 | 2 |

▷ *Caractéristiques d'une orbite circulaire ;*
▷ *Énergie mécanique.*

L'expérience de Rutherford a prouvé qu'un atome avait une structure lacunaire, composée essentiellement de vide. Ernest Rutherford propose donc un modèle planétaire de l'atome d'hydrogène, où l'électron (masse m, charge $-e$) est en orbite circulaire de rayon r autour d'un proton P (charge $+e$) qu'on supposera fixe dans le référentiel d'étude.

Données :

- ▷ constante de Planck $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$;
- ▷ vitesse de la lumière dans le vide $c = 3{,}0 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$;
- ▷ permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$;
- ▷ charge élémentaire $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$;
- ▷ masse de l'électron $m = 9{,}1 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{kg}$;
- ▷ $1{,}0\,\mathrm{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

1 - Exprimer la force exercée par le proton sur l'électron. En déduire l'énergie potentielle à laquelle est soumis l'électron.

2 - Déterminer la relation entre la vitesse v de l'électron et le rayon r de l'orbite, puis exprimer l'énergie mécanique de l'électron en fonction du rayon r de l'orbite.

3 - Relier l'énergie potentielle de l'électron à son énergie mécanique.

Pour rendre compte du spectre de raies discret de l'atome d'hydrogène et de sa stabilité, Niels Bohr postule que l'électron ne peut occuper que certaines orbites stables de rayons r_n tel que le moment cinétique de l'électron par rapport au point P vérifie une condition de quantification

$$L_P(n) = n\hbar$$

où n est un entier naturel non nul appelé nombre quantique principal et $\hbar = h/2\pi$ la constante de Planck réduite.

4 - Exprimer le moment cinétique de l'électron L_P en fonction de r_n seulement.

5 - En déduire en fonction de n les rayons r_n des orbites permises pour l'électron.

6 - Montrer alors que l'énergie mécanique de l'électron peut s'écrire sous la forme

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}\,.$$

Calculer numériquement E_0.

7 - La condition de quantification peut également s'interpréter en termes d'ondes de matière. Rappelons que la longueur d'onde de de Bröglie associée à une particule se déplaçant à la vitesse v vaut $\lambda = h/mv$. Montrer que la condition de quantification peut s'écrire sous la forme

$$2\pi r_n = n\lambda\,.$$

Comment interpréter cette condition en termes ondulatoires ?

Exercice 5 : Gravity

exemple officiel CCINP | 2 | 2 |

- ▷ *Loi de Kepler ;*
- ▷ *Orbite circulaire et elliptique ;*
- ▷ *Conservation de l'énergie mécanique.*

Dans le film Gravity, des astronautes effectuent une mission de maintenance sur le télescope spatial Hubble lorsque leur navette est détruite. Leur seul espoir semble être de rejoindre la Station spatiale internationale, l'ISS. Le but de cet exercice est de définir dans quelles conditions ce voyage spatial est possible.

On suppose que le télescope Hubble et l'ISS sont en orbite circulaire basse autour de la terre, respectivement à 600 km et 400 km au-dessus de la Terre, dans le même plan. Le rayon de la terre est $R_\mathrm{T} = 6400\,\mathrm{km}$; $\mathcal{G}$ est la constante universelle de gravitation.

1 - Exprimer la force de gravitation exercée par la Terre, de masse M_0, sur l'astronaute et son équipement, de masse m. Donner l'expression de l'énergie potentielle de gravitation.

2 - En exprimant le principe fondamental de la dynamique pour un système en rotation uniforme, établir la troisième loi de Kepler. Exprimer l'énergie de l'astronaute sur son orbite, en fonction de $\mathcal{G}$, m, M_0 et r, rayon de l'orbite.

3 - Déterminer numériquement la période T_S de l'ISS, sachant que la période du télescope vaut $T_\mathrm{H} = 97\,\mathrm{min}$. En déduire numériquement la vitesse du télescope v_H, puis celle de la station spatiale v_S sur leur orbite respective.

Pour rejoindre la station spatiale, l'astronaute envisage une orbite de transfert elliptique, dont l'apogée de distance r_H par rapport au centre de la Terre est sur l'orbite du télescope, et le périgée de distance r_S par rapport au centre de la terre est sur l'orbite de l'ISS.

4 - Représenter la trajectoire suivie par l'astronaute.

5 - Exprimer l'énergie de l'astronaute sur cette trajectoire en fonction de $\mathcal{G}$, M_0, m, r_H et r_S.

6 - Exprimer la vitesse de l'astronaute à l'apogée, en fonction de r_H, T_H et r_S. Par analogie, en déduire l'expression de la vitesse au périgée en fonction de r_S, T_S et r_H. Calculer les valeurs numériques. Techniquement comment l'astronaute peut-il gérer sa vitesse ?

7 - Quelle est la durée de ce voyage ?

Exercice 6 : Profil de masse volumique au sein de la Terre

oral banque PT | 3 | 2

- ▷ *Théorème de Gauss gravitationnel.*

On assimile la Terre à une sphère parfaite de centre O, de rayon $R_T = 6{,}4 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$ et de masse totale $M_T = 6{,}0 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$. Le champ de pesanteur $\vec{g}$ vérifie la relation

$$\oiint_\Sigma \vec{g} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = -4\pi\mathcal{G}\, M_\mathrm{int}$$

où M_int est la masse contenue à l'intérieur de la surface fermée Σ, et $\mathcal{G} = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$ est la constante de gravitation.

1 - À quel résultat d'électrostatique cette relation est elle similaire ? Préciser les analogues de $\vec{g}$, $\mathcal{G}$ et M_int.

2 - On considère dans un premier temps la masse uniformément répartie. Exprimer $\vec{g}(r) = -g(r)\vec{u}_r$. Représenter $g(r)$ en fonction de r.

3 - Retrouver la valeur g_0 du champ de pesanteur à la surface de la Terre.

4 - En réalité la répartition de masse n'est pas uniforme : le champ de pesanteur évolue selon l'allure de la figure 1. Déterminer la répartition de masse volumique $\rho(r)$ au sein de la Terre.

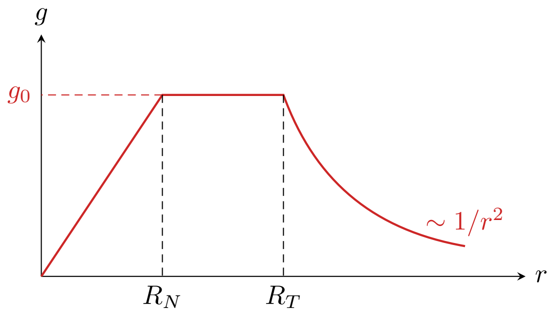


Figure 1 – Évolution du champ de pesanteur au sein de la Terre.

Exercice 7 : Descente d'un satellite

oral CCINP PSI | 💡 3 | 🛠 2

- ▷ *Résolution de problème ;*
- ▷ *Orbite circulaire ;*
- ▷ *Théorème de l'énergie mécanique.*

> *Cet exercice est un exercice ouvert, de type résolution de problème, demandant de l'initiative dans le raisonnement mené. Pour aborder un tel exercice, il peut notamment être utile de faire un schéma modèle, d'identifier et nommer les grandeurs pertinentes, d'utiliser l'analyse dimensionnelle, de proposer des hypothèses simplificatrices, de décomposer le problème en des sous-problèmes simples, etc. Le candidat peut également être amené à proposer des valeurs numériques raisonnables pour les grandeurs manquantes ... mais toutes les valeurs données ne sont pas forcément utiles. Le tout est évidemment à adapter à la situation proposée !*

Un satellite est en orbite circulaire autour de la Terre à 800 km d'altitude. Sur cet orbite, on constate que son altitude diminue de 1 m durant une période. On décrit les frottements avec l'atmosphère par une force de frottement fluide quadratique $\vec{f} = -\alpha m v \vec{v}$, où $\vec{v}$ désigne la vitesse du satellite et m sa masse. Le coefficient α est supposé indépendant de l'altitude du satellite : $\alpha = 1{,}5 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}^{-1}$.

Au bout de combien de temps l'altitude aura-t-elle baissé de 10 km ?

Données : masse de la Terre : $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$; rayon terrestre : $R_T = 6371\,\mathrm{km}$.