

# Ondes électromagnétiques dans le vide

## Exercice 1 : Onde sphérique

💡 1 | ✂ 1



▷ OPPH;

▷ Vecteur de Poynting.

1 Le vecteur d'onde de l'onde sphérique est donné par  $\vec{k} = k\vec{e}_r$ .

2 Le champ magnétique est donné par

$$\vec{B} = \vec{e}_r \wedge \frac{\vec{E}}{c} = \frac{E_0(r)}{c} \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\varphi.$$

3 Par définition,

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0(r)^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kr) \vec{e}_r.$$

Sachant que  $\langle \cos^2(\omega t - kr) \rangle = 1/2$ , on en déduit

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0(r)^2}{\mu_0 c} \vec{e}_r.$$

4 La puissance rayonnée au travers d'une sphère de rayon  $r$  vaut

$$\mathcal{P} = \iint_{\text{sphère}} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S}.$$

Comme  $\langle \vec{\Pi} \rangle$  est uniforme sur la sphère, on en déduit directement

$$\mathcal{P} = \frac{E_0(r)^2}{2\mu_0 c} \times 4\pi r^2 \quad \text{soit} \quad \mathcal{P} = \frac{2\pi r^2 E_0(r)^2}{\mu_0 c}.$$

Comme l'onde se propage dans le vide, elle n'est **ni absorbée ni amplifiée, elle ne fait que s'étaler** dans l'espace : la puissance  $\mathcal{P}$  est donc indépendante du rayon de la sphère. On en déduit

$$E_0(r)^2 = \frac{\mu_0 c}{2\pi r^2} \mathcal{P} \quad \text{d'où} \quad E_0(r) = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu_0 c}{2\pi} \mathcal{P}}.$$

## Exercice 2 : Un exemple d'OPPH

💡 1 | ✂ 3



▷ OPPH;

▷ Vecteur de Poynting.

1 D'après la relation de dispersion,

$$f = \frac{c}{\lambda} = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}.$$

Cette onde appartient au domaine **optique**, comme le montre d'ailleurs sa longueur d'onde de 600 nm.

**2** Par définition, on peut identifier

$$\exp \left[ i \left( \frac{K}{3} (2x + 2y - z) - \omega t \right) \right] = \exp \left[ i \left( \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \omega t \right) \right]$$

ce qui donne

$$k_x x + k_y y + k_z z = \frac{K}{3} (2x + 2y - z) \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{k} = \frac{2K}{3} \vec{e}_x + \frac{2K}{3} \vec{e}_y - \frac{K}{3} \vec{e}_z .}$$

On déduit

$$\|\vec{k}\| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = K \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = K \quad \text{d'où} \quad \boxed{K = \frac{2\pi}{\lambda} = 1,0 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1} .}$$

**3** Par définition, un plan d'onde est une surface sur laquelle le champ électrique est uniforme à tout instant, soit

$$\exp \left[ i \left( \frac{K}{3} (2x + 2y - z) - \omega t \right) \right] = \text{cte} .$$

Ainsi, les plans d'onde sont tous les plans parallèles d'équation

$$\boxed{2x + 2y - z = \text{cte} .}$$

**4** Compte tenu de la convention de signe dans l'exponentielle, l'équation de Maxwell-Gauss en représentation complexe s'écrit

$$+i \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{soit} \quad k_x E_x + k_y E_y = 0 \quad \text{d'où} \quad E_y = -\frac{k_x}{k_y} E_x$$

Compte tenu de ce qui précède,  $k_x = k_y$  donc on en déduit

$$\boxed{E_y = -E_x = -E_0 \exp \left[ i \left( \frac{K}{3} (2x + 2y - z) - \omega t \right) \right] .}$$

**5** D'après la relation de structure appliquée à l'OPPM,

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{K E_x}{3\omega} (2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z) \wedge (\vec{e}_x - \vec{e}_y) .$$

En développant le produit vectoriel par la droite,

$$(2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z) \wedge (\vec{e}_x - \vec{e}_y) = (\vec{0} - 2\vec{e}_z - \vec{e}_y) - (2\vec{e}_z + \vec{0} - \vec{e}_x) = -\vec{e}_x - \vec{e}_y - 4\vec{e}_z .$$

On en déduit alors

$$\boxed{\vec{B} = -\frac{K E_x}{3\omega} (\vec{e}_x + \vec{e}_y + 4\vec{e}_z) .}$$

**6** Avec les champs réels, la densité volumique d'énergie s'écrit

$$w_{\text{em}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

et donc avec les champs complexes

$$\langle w_{\text{em}} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \frac{\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E}^*}{2} + \frac{\vec{B} \cdot \vec{B}^*}{2\mu_0} \right] .$$

Compte tenu des expressions précédentes,  $\vec{E} = E_x (\vec{e}_x - \vec{e}_y)$  donc

$$\vec{E} \cdot \vec{E}^* = |E_x|^2 (1 + 1) = 2E_0^2$$

$$\text{et } \vec{B} = -\frac{E_x}{3c} (\vec{e}_x + \vec{e}_y + 4\vec{e}_z)$$

$$\vec{B} \cdot \vec{B}^* = \frac{|E_x|^2}{9c^2} (1 + 1 + 16) = \frac{2E_0^2}{c^2}$$

ce qui donne finalement

$$\langle w_{\text{em}} \rangle = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 E_0^2 + \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \right) \quad \text{soit} \quad \boxed{\langle w_{\text{em}} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 .}$$

Elle est **uniforme**, comme attendu pour une OPPM.

**7** La moyenne du vecteur de Poynting vaut

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} .$$

En développant par la gauche, le produit vectoriel donne

$$(\vec{e}_x - \vec{e}_y) \wedge (\vec{e}_x + \vec{e}_y + 4\vec{e}_z) = (\vec{0} + \vec{e}_z - 4\vec{e}_y) - (-\vec{e}_z + \vec{0} + 4\vec{e}_x) = -4\vec{e}_x - 4\vec{e}_y + 2\vec{e}_z .$$

Ainsi,

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = -\frac{1}{2} \frac{|E_x|^2}{3c\mu_0} (-4\vec{e}_x - 4\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) \quad \text{soit} \quad \boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{3c\mu_0} (2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z) .}$$

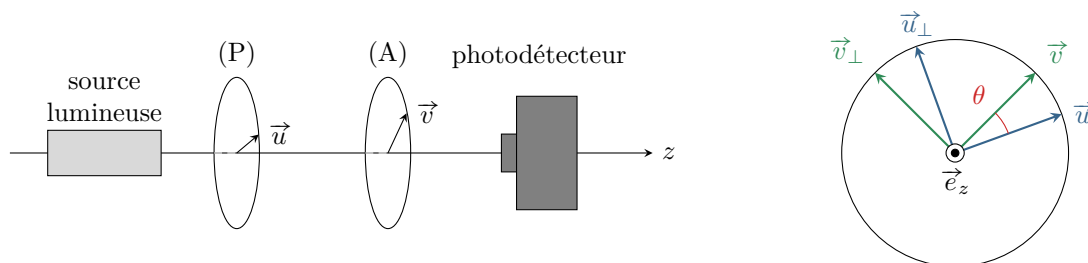
Le vecteur de Poynting est **colinéaire au vecteur d'onde**, comme attendu pour une OPPM.

### Exercice 3 : Loi de Malus



- ▷ Polarisation ;
- ▷ Vecteur de Poynting.

**1** Voir figure 1.



**Figure 1 – Étude expérimentale de la loi de Malus.**

**2** Par définition, en sortie du polariseur, l'onde est polarisée rectilignement selon son axe passant. Ainsi,

$$\vec{E}_P(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k = \frac{2\pi}{\lambda} \\ \omega = kc = \frac{2\pi c}{\lambda} \end{cases} ,$$

d'où on déduit

$$\boxed{\vec{E}_P(z, t) = E_0 \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] \vec{u} .}$$

Comme l'onde est progressive dans le sens des  $z$  croissants, il n'y a pas de surprise à voir apparaître la variable  $ct - z$ .

**3** En s'appuyant sur la figure 1 pour exprimer  $\vec{u}$  dans la base  $\mathcal{B}_A$ , on obtient

$$\boxed{\vec{E}_P(z, t) = E_0 \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] (\cos \theta \vec{v} - \sin \theta \vec{v}_\perp) .}$$

En sortie du polariseur, la composante sur son axe passante est transmise et la composante orthogonale est coupée, d'où

$$\vec{E}_{\text{PA}}(z, t) = E_0 \cos \theta \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] \vec{v}.$$

Le champ magnétique s'obtient par la relation de structure,

$$\vec{B}_{\text{PA}} = \vec{e}_z \wedge \frac{\vec{E}_{\text{PA}}}{c} = \frac{E_0}{c} \cos \theta \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] (\vec{e}_z \wedge \vec{v}),$$

et comme par construction de la base  $\mathcal{B}_A$  on a  $\vec{e}_z \wedge \vec{v} = \vec{v}_\perp$ , alors

$$\vec{B}_{\text{PA}}(z, t) = \frac{E_0}{c} \cos \theta \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] \vec{v}_\perp.$$

Enfin,

$$\vec{\Pi}_{\text{PA}} = \frac{\vec{E}_{\text{PA}} \wedge \vec{B}_{\text{PA}}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2 \theta \cos^2 \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] (\vec{v} \wedge \vec{v}_\perp)$$

et ainsi

$$\vec{\Pi}_{\text{PA}} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2 \theta \cos^2 \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] \vec{e}_z.$$

4 Par définition de l'intensité lumineuse, en notant  $z_0$  la position du détecteur,

$$I = \left\langle \frac{1}{S} \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{S} \times \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2 \theta \cos^2 \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (ct - z_0) \right] S \right\rangle$$

car le vecteur de Poynting est uniforme sur toute la surface du détecteur (l'onde est plane) et  $d\vec{S} = dS \vec{e}_z$ . On en déduit directement

$$I = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2 \theta \left\langle \cos^2 \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (ct - z_0) \right] \right\rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2 \theta \times \frac{1}{2}$$

ce qui s'écrit bien sous la forme

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad \text{avec} \quad I_0 = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}.$$

#### Exercice 4 : Absorption par l'atmosphère

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2 | Ⓜ



- ▷ OPPH;
- ▷ Vecteur de Poynting;
- ▷ Bilan d'énergie électromagnétique.

1 Le champ électrique complexe s'écrit

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y.$$

D'après la relation de structure,

$$\vec{B} = \vec{e}_x \wedge \frac{\vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_z.$$

La moyenne du vecteur de Poynting se calcule directement à partir des champs complexes,

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right) \quad \text{soit} \quad \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_x.$$

La relation de structure est linéaire par rapport aux champs : elle peut donc s'utiliser de la même façon avec les champs réels ou les champs complexes. Au contraire, le vecteur de Poynting est relié aux champs de manière non-linéaire. Il n'est donc pas possible de le calculer avec les champs complexes, seule sa valeur moyenne est aisément accessible :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad \rightsquigarrow \quad \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right).$$

Ne pas oublier ni le préfacteur 1/2, ni la partie réelle, ni le complexe conjugué!

2 Raisonons sur la tranche d'atmosphère représentée figure 2.

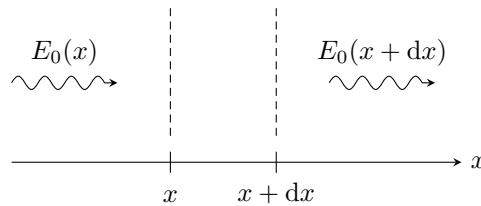


Figure 2 – Schéma de la tranche d'atmosphère considérée.

On suppose raisonner sur des échelles de temps très supérieures à la période de l'onde : on peut donc la considérer en régime permanent.

▷ Par la face située en  $x$ , la tranche reçoit une puissance

$$\mathcal{P}_e = \iint \langle \Pi \rangle \cdot d\vec{S} = \frac{E_0(x)^2}{2\mu_0 c} S,$$

▷ Par la face située en  $x + dx$ , la tranche cède une puissance

$$\mathcal{P}_s = \frac{E_0(x + dx)^2}{2\mu_0 c} S,$$

▷ Enfin, sous l'effet des phénomènes d'absorption et diffusion, il faut compter une perte de puissance

$$\mathcal{P}_{\text{abs}} = P S dx = \alpha E_0(x)^2 S dx.$$

Ainsi, en régime permanent,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_s &= \mathcal{P}_e - \mathcal{P}_{\text{abs}} \\ \frac{E_0(x + dx)^2}{2\mu_0 c} &= \frac{E_0(x)^2}{2\mu_0 c} - \alpha E_0(x)^2 dx \\ \frac{1}{2\mu_0 c} \left( E_0(x)^2 + \frac{d(E_0^2)}{dx} dx \right) &= \frac{E_0(x)^2}{2\mu_0 c} - \alpha E_0(x)^2 dx \\ \frac{1}{2\mu_0 c} \frac{d(E_0^2)}{dx} dx &= -\alpha E_0(x)^2 dx \\ \frac{1}{2\mu_0 c} \times 2E_0 \frac{dE_0}{dx} &= -\alpha E_0(x)^2 \end{aligned}$$

d'où on déduit l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{dE_0}{dx} + \underbrace{\mu_0 c \alpha}_{=1/\ell} E_0 = 0.}$$

3 Posons  $E_{\text{max}} = E_0(x = 0)$  l'amplitude de l'onde lorsqu'elle pénètre dans l'atmosphère. L'équation différentielle précédente se résout en

$$E_0(x) = E_{\text{max}} e^{-x/\ell} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{E} = E_{\text{max}} e^{-x/\ell} e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y.}$$

4 Lorsque le Soleil se couche, il est plus bas sur l'horizon, donc les rayons lumineux traversent une plus grande épaisseur d'atmosphère pour nous parvenir. L'onde est donc **plus atténuée**, ce qui est moins éblouissant pour l'œil.

En ce qui concerne le changement de couleur, on peut supposer que le coefficient  $\alpha$  **dépend de la longueur d'onde** : s'il est plus élevé pour les rayonnements de faible longueur d'onde plutôt que de grande longueur d'onde, alors les rayonnements bleus, verts ou jaunes sont plus atténués que les rouges, ce qui explique le changement de couleur apparente du Soleil plus marqué le soir en raison de la longueur d'atmosphère traversée.

En réalité, l'absorption du rayonnement est relativement minoritaire car elle est restreinte à certaines longueurs d'onde bien particulières, caractéristiques des espèces chimiques présentes dans l'atmosphère

(c'est l'analogie des raies caractéristiques en spectroscopie infrarouge). Le phénomène principal est la diffusion de la lumière par les aérosols (fines particules) présentes dans l'atmosphère, qui se trouve renvoyée dans toutes les directions lorsqu'elle « rencontre » un aérosol. On peut montrer que la puissance diffusée est proportionnelle à  $1/\lambda^4$  : les rayonnements de petite longueur d'onde y sont plus sensibles que ceux de grande longueur d'onde. C'est donc bien ce qui explique la couleur apparente rouge du Soleil lorsqu'il se couche ... mais aussi la couleur bleue du ciel : lorsque l'on regarde le ciel dans une direction qui n'est pas celle du Soleil, on ne voit évidemment pas les rayonnements qui arrivent en ligne droite depuis le Soleil, mais seulement ceux qui ont largement subi le phénomène de diffusion de la lumière.

### Exercice 5 : Bilan de puissance d'un conducteur

oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 2 | Ⓜ️



▷ Bilan d'énergie électromagnétique.

1 Il s'agit de la **conductivité électrique**, notée  $\gamma$ . Celle du cuivre, l'un des meilleurs conducteurs, est de  $6 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$  ; à titre de comparaison celle de l'eau de mer n'est que de l'ordre de  $5 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ .

2 D'après la loi d'Ohm locale,

$$\vec{j} = \gamma \vec{E},$$

d'où on déduit l'intensité par calcul du flux au travers d'une section transverse, c'est-à-dire un cercle,

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \text{soit} \quad \boxed{I = \pi R^2 \gamma E.}$$

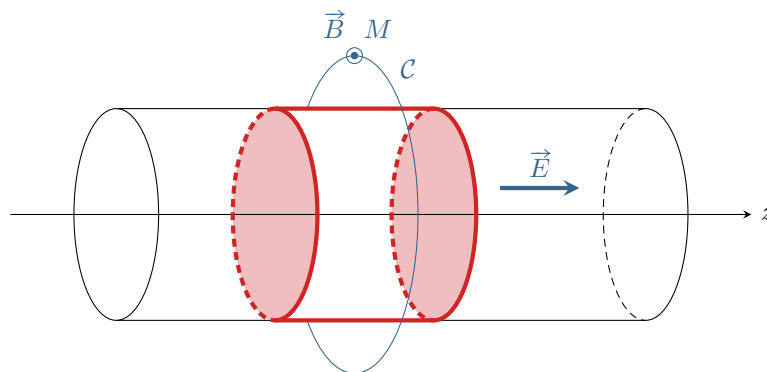


Figure 3 – Bilan de puissance électromagnétique d'un cylindre.

Pour le calcul du champ magnétique, plaçons nous en un point  $M$  repéré par ses coordonnées cylindriques, voir figure 3.

#### • Invariances et symétries :

- ▷ La distribution de courant est invariante par translation le long de l'axe ( $Oz$ ) et par rotation autour de cet axe, le champ magnétique ne dépend donc que du rayon  $r$ .
- ▷ Le plan passant par  $M$  est contenant l'axe  $Oz$  est plan de symétrie de la distribution de courant, le champ magnétique lui est donc orthogonal : on en déduit qu'il est porté par  $\vec{u}_\theta$ .
- ▷ Conclusion :

$$\vec{B} = B_\theta(r) \vec{u}_\theta.$$

• **Théorème d'Ampère** : Raisonnons sur un contour  $C$  circulaire de rayon  $r$  centré sur l'axe ( $Oz$ ) et passant par  $M$ . Comme le champ est de même norme sur ce contour, alors

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r B_\theta(r)$$

Le courant enlacé dépend de la position de  $M$  :

- ▷ si  $r > R$  alors  $I_{\text{enl}} = I = \pi R^2 \gamma E$  ;
- ▷ si  $r < R$  alors  $I_{\text{enl}} = \pi r^2 j = \pi r^2 \gamma E$

Finalement,

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 \pi R^2 \gamma E}{2\pi r} \vec{u}_\theta & r \geq R \\ \frac{\mu_0 \pi r^2 \gamma E}{2\pi r} \vec{u}_\theta & r \leq R \end{cases}$$

d'où en simplifiant

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 R^2 \gamma E}{2r} \vec{u}_\theta & r \geq R \\ \frac{\mu_0 r \gamma E}{2} \vec{u}_\theta & r \leq R \end{cases}$$

**3** La puissance volumique dissipée par effet Joule s'écrit

$$p_{J,\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2.$$

La puissance dissipée dans le tronçon vaut donc

$$\mathcal{P}_J = \gamma E^2 \ell \pi R^2.$$

**4** Le vecteur de Poynting s'écrit

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$$

Comme  $\vec{E}$  est porté par  $\vec{u}_z$  et  $\vec{B}$  par  $\vec{u}_\theta$  alors  $\vec{\Pi}$  est porté par  $\vec{u}_r$ .

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \times E \times \frac{\mu_0 r \gamma E}{2} (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta) = -\frac{r \gamma E^2}{2} \vec{u}_r.$$

Enfin, la puissance rayonnée au travers des parois du tronçon de cylindre est égale au flux sortant du vecteur de Poynting en  $r = R$ . Sur les surfaces verticales du cylindre (colorées de la figure 3), son flux est nul. Ainsi,

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \oiint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{\Pi} \cdot dS \vec{u}_r,$$

d'où

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = -\frac{R \gamma E^2}{2} \times 2\pi R \ell$$

soit

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = -\gamma E^2 \pi R^2 \ell.$$

La puissance rayonnée est négative, ce qui signifie que l'énergie ne sort pas mais entre dans le cylindre au travers des parois.

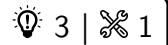
**5** On constate l'égalité des deux termes,

$$\mathcal{P}_J + \mathcal{P}_{\text{ray}} = 0.$$

Cela signifie que toute la puissance dissipée par effet Joule dans le cylindre y entre par rayonnement, ce qui est logique puisqu'il n'y a pas d'autre source de puissance dans le tronçon de cylindre étudié. Ce résultat est par ailleurs cohérent avec l'équation intégrale de Poynting,

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{em}}}{dt} = -\oiint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} - \mathcal{P}_J = 0,$$

car en régime stationnaire l'énergie électromagnétique  $\mathcal{E}_{\text{em}}$  contenue dans le système est constante.

**Exercice 6 : Champs d'un laser**

- ▷ OPPH;
- ▷ Vecteur de Poynting;
- ▷ Résolution de problème.

On assimile l'air au vide. D'après la relation de structure,

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \vec{u}_z \wedge \frac{\vec{E}}{c} \quad \text{soit} \quad \vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y.$$

Le vecteur de Poynting s'écrit

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z.$$

En modélisant le faisceau laser par un faisceau cylindrique de rayon  $a = 1 \text{ mm}$  (diffraction négligeable), la puissance moyenne portée par le faisceau vaut donc

$$\mathcal{P} = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle \times \pi a^2 = \frac{E_0^2 \pi a^2}{\mu_0 c}.$$

Pour une puissance  $\mathcal{P} = 1 \text{ mW}$ , on en déduit

$$E_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{P} \mu_0 c}{\pi a^2}} \simeq 45 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{et} \quad B_0 = \frac{E_0}{c} = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ T}.$$