

Ondes électromagnétiques dans les conducteurs

Plan du cours

I	Absorption par un conducteur ohmique	2
I.A	Cadre de l'étude : régime lentement variable	2
I.B	Équation de propagation	4
I.C	Onde plane pseudo-progressive harmonique	5
I.D	Généralisation : effet de peau.	7
II	Réflexion sur un conducteur parfait	7
II.A	Phénoménologie	7
II.B	Conditions aux limites à l'interface : relations de passage	8
II.C	Onde réfléchie	8
II.D	Structure de l'onde totale.	10
II.E	Apparition de courants surfaciques	13
III	Confinement entre deux plans conducteurs	13
III.A	Résolution de l'équation de d'Alembert par séparation des variables	14
III.B	Modes propres de la cavité	15
III.C	Superposition de modes propres	16

Au programme

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 5 « Propagation ».

L'étude des ondes électromagnétiques dans un milieu ohmique permet d'enrichir les compétences des étudiants sur les phénomènes de propagation en abordant l'effet de peau. La réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal parfait et son confinement dans une cavité permettent aux étudiants d'approfondir leurs connaissances sur les ondes stationnaires et de découvrir des savoir-faire spécifiques permettant leur étude efficace. La notion de densité de courant surfacique est introduite, mais le calcul de l'intensité à travers un segment ne relève pas du programme.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu ohmique en régime lentement variable. Effet de peau.	Établir et interpréter l'expression de la grandeur caractéristique d'atténuation de l'onde électromagnétique dans un milieu ohmique.
Réflexion sous incidence normale d'une onde plane, progressive et monochromatique polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait. Onde stationnaire.	Exploiter la nullité des champs dans un métal parfait. Établir l'expression de l'onde réfléchie en exploitant les relations de passage fournies. Interpréter qualitativement la présence de courants localisés en surface. Reconnaître et caractériser une onde stationnaire.
Applications aux cavités à une dimension. Mode d'onde stationnaire.	Utiliser la méthode de séparation des variables. Mettre en œuvre un dispositif permettant d'étudier une onde électromagnétique, dans le domaine des ondes centimétriques.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Ces cinq dernières années au concours

- ▷ Écrit : épreuve A 2017 et 2019, épreuve de modélisation 2018.
- ▷ Oral : régulièrement.

Ce chapitre concerne la propagation des ondes électromagnétiques dans les conducteurs ohmiques. Comme un champ électrique y engendre un courant, donc une perte d'énergie par effet Joule, les OEM s'y comportent forcément différemment que dans le vide.

I - Absorption par un conducteur ohmique

Rappel : par définition, un conducteur ohmique est un milieu dans lequel la loi d'Ohm locale s'applique

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}.$$

I.A - Cadre de l'étude : régime lentement variable

Dans le cours d'électrostatique, nous avons justifié qu'un conducteur en équilibre électrostatique était neutre en volume ($\rho = 0$), mais pas forcément en surface. En régime variable, ce n'est plus nécessairement le cas : les variations du champ électrique peuvent déplacer temporairement les charges (via la force de Lorentz), et donc déroger à la neutralité.

- **Équation de relaxation de la densité de charge**

Imaginons qu'une perturbation ait localement créé un déséquilibre de charge en un point M : $\rho(M, t=0) = \rho_0 \neq 0$. On cherche à déterminer la durée nécessaire pour que le conducteur retrouve la neutralité.

Équation différentielle vérifiée par $\rho(M, t)$: Conservation de la charge + Ohm + MG :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \rho &= 0 \end{aligned}$$

Espace 1

Conclusion : $\rho(M, t) = \rho_0(M) e^{-t/\tau}$, la charge diminue avec un temps caractéristique $\tau = \varepsilon_0/\gamma$.

Espace 2

↪ si les variations du champ se font sur des durées très grandes devant τ alors on peut considérer que toute perturbation par rapport à la neutralité disparaît « instantanément », autrement dit que ρ est constamment et uniformément nulle dans le conducteur.

Ordres de grandeur :

▷ Temps de relaxation de la charge :

$$\gamma \sim 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{et} \quad \varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{d'où} \quad \tau \sim 10^{-18} \text{ s}$$

Espace 3

▷ Temps caractéristique d'évolution de l'onde électromagnétique : période.

Espace 4

▷ Conclusion : notre étude sera menée dans une hypothèse de basse fréquence,

$$T = \frac{1}{f} \gg \tau \quad \text{soit} \quad f \ll 10^{18} \text{ Hz}.$$

Cette plage de fréquence englobe les ondes radio, les micro-ondes, les ondes optiques de l'infrarouge jusqu'aux ultraviolets : elle est donc largement pertinente en pratique.

Remarque : En fait, c'est la loi d'Ohm elle-même qui cesserait d'être valable avant l'hypothèse de neutralité. La conductivité ne demeure indépendante de la fréquence que jusqu'à 10^{13} Hz environ, au delà elle chute brutalement. De ce fait, les ondes optiques dans les métaux doivent être traitées par une méthode différente de celles abordées dans ce chapitre.

- Lien à l'ARQS magnétique

Rappel : l'ARQS magnétique consiste formellement à négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction,

$$|\vec{j}| \ll \left| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right|.$$

Comparaison des ordres de grandeur : considérons une OPPH de la forme $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_p$.

▷ Courant de conduction :

$$|\vec{j}| = \gamma |\vec{E}| \sim \gamma E_0$$

Espace 5

▷ Courant de déplacement :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\omega E_0 \sin(\omega t - kx) \vec{e}_p \quad \text{d'où} \quad \left| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right| \sim \omega E_0$$

Espace 6

▷ Conclusion :

$$\frac{\|\vec{j}\|}{\left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|} \sim \frac{\gamma \|\vec{E}\|}{\varepsilon_0 \omega \|\vec{E}\|} = \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \omega} = \frac{1}{2\pi f \tau} \gg 1$$

Espace 7



Un conducteur en régime lentement variable est uniformément et constamment neutre. Le courant de déplacement y est négligeable devant le courant de conduction donné par la loi d'Ohm.

- Équations de Maxwell dans le conducteur

Dans ces hypothèses,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \gamma \vec{E} \end{aligned}$$

I.B - Équation de propagation

Méthode : exactement comme dans le vide, on calcule le rotationnel du rotationnel du champ cherché avec les équations de Maxwell et avec le laplacien vectoriel grâce à la relation

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}.$$

- Équation vérifiée par le champ magnétique

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) &= \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B} \\ &\quad \uparrow \text{ana vect} \qquad \qquad \qquad \uparrow \text{MT} \\ &= \mu_0 \gamma \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &\quad \uparrow \text{MA} \end{aligned}$$

d'où $\Delta \vec{B} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$

Espace 8

- Équation vérifiée par le champ électrique

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) &= \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} \\ &\quad \uparrow \text{ana vect} \qquad \qquad \qquad \uparrow \text{MG} \\ &= -\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t} = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &\quad \uparrow \text{MF} \end{aligned}$$

d'où $\Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$

Espace 9

- Conclusion

Dans un conducteur ohmique et en basse fréquence, les champs \vec{E} et \vec{B} vérifient la même équation de propagation. Cette équation n'est pas l'équation de d'Alembert, mais une équation de diffusion,

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$



Comme annoncé en introduction, il est logique que l'onde électromagnétique ne vérifie pas l'équation de d'Alembert : l'équation de d'Alembert traduit une propagation sans atténuation, mais ici l'énergie de l'onde est progressivement absorbée et dissipée par effet Joule.

L'équation de propagation n'est pas la même mais certaines propriétés des ondes dans le vide se retrouvent également dans les conducteurs, en particulier le caractère transverse car les deux équations de Maxwell en divergence s'écrivent de la même façon.

I.C - Onde plane pseudo-progressive harmonique

- **Idée de physique**

Les OPPH jouent un rôle très important dans le vide car toute onde peut s'écrire comme une somme d'OPPH. L'équation de propagation obtenue dans le conducteur est également linéaire, donc des ondes « qui ressemblent » à des OPPH en seront vraisemblablement solution.

Toutefois, pour qu'une OPPH soit solution de l'équation de d'Alembert, il faut que ω et $\|\vec{k}\|$ vérifient la relation de dispersion.

↪ existe-t-il une condition équivalente pour notre nouvelle équation de propagation ?

Nous allons démontrer les résultats sur l'exemple de l'OPPH

$$\vec{E} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y .$$

- **Relation de dispersion complexe**

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{0} \\ (-ik)^2 \underline{E}_0 - \mu_0 \gamma \times i\omega \underline{E}_0 &= 0 \end{aligned}$$

La relation de dispersion prend donc la forme

$$k^2 = -i\mu_0 \gamma \omega .$$

Espace 10

↪ la relation de dispersion est évidemment différente du $k^2 = \omega^2/c^2$ de l'équation de d'Alembert, et surtout elle est complexe, ce qui sera lourd de conséquence.

Valeurs possibles de k :

$$k^2 = e^{-i\pi/2} \mu_0 \gamma \omega \quad \text{donc} \quad k = \pm e^{-i\pi/4} \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} .$$

Espace 11

On admet que l'on peut ne garder que le signe « + » (le signe \ominus donne une onde se propageant dans le sens des x décroissants, or on cherche une onde se propageant dans le sens des x croissants). On l'écrit traditionnellement sous la forme

$$k = \frac{1 - i}{\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} .$$

La grandeur δ est homogène à une longueur et est nommée **épaisseur de peau**.

• **Structure des pseudo-OPPH**

Comprendre le sens physique de ce vecteur d'onde complexe demande de revenir à l'expression de l'onde réelle.

$$\vec{E} = E_0 \exp \left[i\omega t - i \left(\frac{1-i}{\delta} \right) x \right] \vec{e}_y = E_0 e^{i\varphi} e^{i(\omega t - x/\delta)} e^{-x/\delta} \vec{e}_y$$

soit en prenant la partie réelle

$$\vec{E} = E_0 \underbrace{e^{-x/\delta}}_{\text{amortissement}} \underbrace{\cos \left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi \right)}_{\text{propagation}} \vec{e}_y$$

Espace 12

L'onde n'est pas une onde progressive, car son amplitude diminue au cours de la propagation sur une distance caractéristique δ . Elle est appelée **onde plane pseudo-progressive harmonique**, par analogie avec les régimes pseudo-périodiques des oscillateurs.

L'épaisseur de peau représente la longueur caractéristique d'amortissement d'une pseudo-OPPH au sein du conducteur :
 pour $x \gg \delta$ l'onde est totalement absorbée et le champ est quasiment nul.
 L'épaisseur de peau est d'autant plus faible que la fréquence est élevée.

Remarque : L'épaisseur de peau est également associée à la pseudo-période spatiale de l'OEM au sein du conducteur :

$$\lambda' = 2\pi\delta$$

Ceci dit la définition est peu intéressante car l'onde est presque totalement amortie avant d'atteindre $x = \lambda'$: en effet, $e^{-\lambda'/\delta} = e^{-2\pi} = 2 \cdot 10^{-3}$.

• **Simulation numérique**

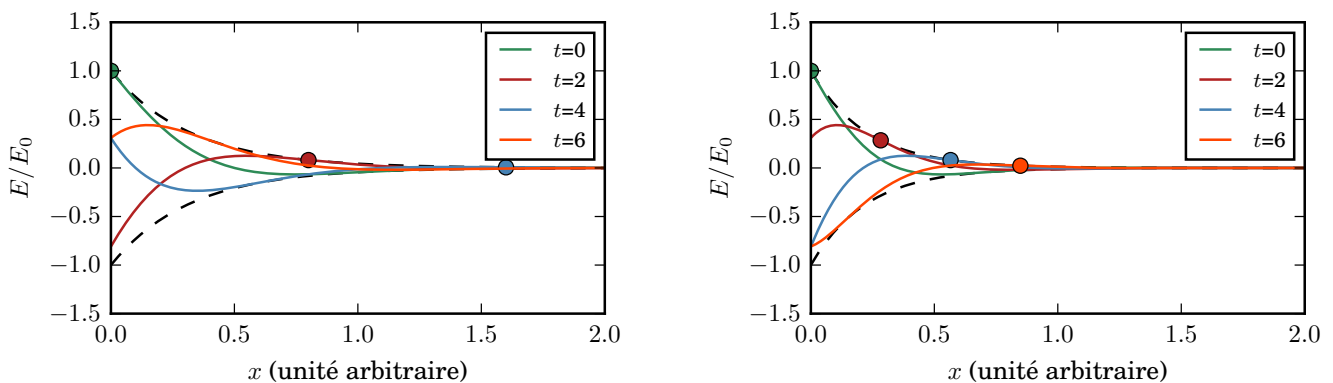


Figure 1 – Onde électromagnétique dans un conducteur ohmique à différents instants. Le temps et l'abscisse sont gradués en unités arbitraires, identiques pour les deux figures. Les courbes représentent le champ électrique $E_y(x, t)$ pour différents instants, les points mettent en évidence la propagation de l'onde. Figure de gauche : $f = 0,1 \text{ ua}$; figure de droite : $f = 0,2 \text{ ua}$. Tous les autres paramètres sont identiques dans les deux simulations.

Observations :

- ▷ plus la fréquence est élevée, plus l'épaisseur de peau est faible ;
- ▷ plus la fréquence est élevée, plus la propagation est lente : exactement comme pour la diffusion thermique, parler de célérité n'a pas de sens.

I.D - Généralisation : effet de peau

Lorsqu'une onde électromagnétique incidente est envoyée sur un conducteur ohmique, le paragraphe précédent signifie que les champs et donc les courants électriques sont non nuls uniquement sur une fine couche, l'épaisseur de peau, de l'ordre de δ , située à la surface du conducteur.

↪ ce résultat, établi pour une onde électromagnétique, est bien plus général : il se retrouve en fait dès qu'un courant variable parcourt le conducteur.

Lorsqu'un conducteur ohmique est parcouru par un courant alternatif, celui-ci est localisé uniquement à la surface du conducteur, sur une épaisseur d'autant plus faible que la fréquence du courant est élevée.

Cet effet est appelé **effet de peau**.

Remarque : Puisque l'équation de propagation des OEM est une équation de diffusion, alors cet effet se retrouve aussi en diffusion thermique : par exemple, les variations périodiques de température (jour/nuit, saisons) deviennent de moins en moins perceptibles au fur et à mesure que l'on s'enfonce dans le sol, si bien qu'au delà de quelques mètres de profondeur la température du sol est la même tout au long de l'année.

Ordre de grandeur : pour du cuivre $\gamma = 6 \cdot 10^7 \Omega \cdot \text{m}^{-1}$,

▷ $f = 50 \text{ Hz}$: $\delta = 9 \text{ mm}$;

▷ $f = 10 \text{ kHz}$: $\delta = 0,2 \text{ mm}$

↪ les fils sont de petit diamètre dans les appareils électroniques, alors qu'ils sont plus gros pour le transport d'énergie électrique.

▷ $f = 1 \text{ GHz}$: $\delta = 2 \mu\text{m}$

↪ une onde de téléphonie mobile est totalement absorbée par un feuillet de cuivre épais de quelques microns.

II - Réflexion sur un conducteur parfait

Considérons un conducteur occupant tout le demi-espace $x > 0$, le demi-espace $x < 0$ étant occupé par du vide. Cette situation modélise par exemple un miroir métallique. On envoie sur le conducteur une OPPH en incidence normale, de la forme

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

Ce paragraphe a pour objectif de décrire ce qu'il advient lorsqu'elle atteint le conducteur.

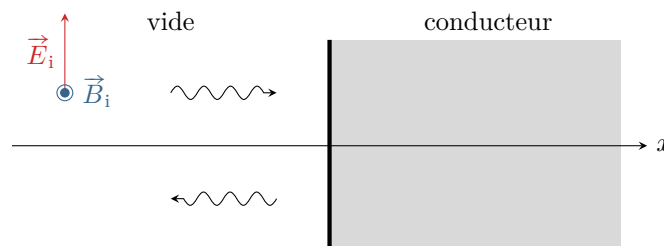


Figure 2 – Onde électromagnétique en incidence normale sur un conducteur.

II.A - Phénoménologie

• Pour un conducteur quelconque



Animation JAVA permettant de visualiser l'onde électromagnétique à l'interface entre le vide et un conducteur ohmique. L'onde incidente et l'onde réfléchie sont représentées en bleu, l'onde totale en rouge. Les abscisses sont graduées en termes de longueur d'onde dans le vide.

Choisir δ/λ permet de visualiser des conducteurs différents, jusqu'à la limite du conducteur parfait ($\delta \rightarrow 0$). Le coefficient R correspond au coefficient de réflexion en énergie : le rapport des amplitudes des ondes incidente et réfléchie dans le vide vaut \sqrt{R} .



Lorsqu'une onde électromagnétique incidente atteint un conducteur, elle est partiellement transmise (puis absorbée) par le conducteur et partiellement réfléchie. L'amplitude de l'onde transmise est d'autant plus faible et celle de l'onde réfléchie d'autant plus élevée que la conductivité électrique du conducteur est élevée.

• **Cas limite d'un conducteur parfait**



Un conducteur parfait est un conducteur de conductivité infinie.

↪ l'épaisseur de peau est nulle, donc aucune onde ne pénètre à l'intérieur du conducteur : toute l'énergie incidente est intégralement réfléchie.



Les champs électrique et magnétique sont nuls dans tout le volume d'un conducteur parfait, de même que les densités volumiques de charge et de courant.

En revanche des charges et des courants peuvent exister en surface du conducteur.

On ne considérera dans la suite que le cas du conducteur parfait.

II.B - Conditions aux limites à l'interface : relations de passage

Considérons une interface entre deux milieux ① et ②, de normale $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$, située à l'abscisse $x = x_0$. Les conditions aux limites sont données par les relations de passage,

$$\begin{cases} \vec{E}_2(x_0^+, t) - \vec{E}_1(x_0^-, t) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{B}_2(x_0^+, t) - \vec{B}_1(x_0^-, t) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \end{cases}$$

où \vec{E}_1 et \vec{E}_2 désignent les champs dans les milieux ① et ②.



La composante normale du champ magnétique et les deux composantes tangentielles du champ électrique sont toujours continues à l'interface entre deux milieux. Les autres composantes peuvent être discontinues.

Espace 13

Cas particulier : ici, le milieu ① est le vide et le milieu ② le conducteur parfait, et l'interface se trouve en $x = 0$:

$$\begin{cases} -\vec{E}_1(x=0^-, t) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \\ -\vec{B}_1(x=0^-, t) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x \end{cases}$$

Espace 14

II.C - Onde réfléchie

• **Nécessité d'une onde réfléchie**

Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie.

Relation de passage pour le champ électrique en prjection sur \vec{e}_y :

$$-E_0 \cos(\omega t - 0) = 0$$

ce qui ne serait possible à tout instant que si $E_0 = 0$... donc s'il n'y a pas d'onde incidente.

Espace 15

- **Sous quelle forme chercher l'onde réfléchie ?**

Caractéristiques « intuitives » :

Linéarité : l'onde réfléchie a même pulsation ω que l'onde incidente ;

Se propage dans le sens des x décroissants ;

Se propage dans le vide donc forcément transverse, mais a priori on ne sait rien sur la polarisation ;

Relation de dispersion : même norme des vecteurs d'onde.

On ne sait rien sur les amplitudes et les phases.

Espace 16

↪ on cherche finalement l'onde réfléchie sous la forme

$$\vec{E}_r = E'_{0y} \cos(\omega t + kx + \varphi_y) \vec{e}_y + E'_{0z} \cos(\omega t + kx + \varphi_z) \vec{e}_z$$

- **Conséquence des relations de passage sur le champ électrique**

La relation de passage implique le champ *total* dans les deux milieux, donc d'après le principe de superposition la somme du champ incident et du champ réfléchi :

$$\vec{E}_1(x, t) = \vec{E}_i(x, t) + \vec{E}_r(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y + E'_{0y} \cos(\omega t + kx + \varphi_y) \vec{e}_y + E'_{0z} \cos(\omega t + kx + \varphi_z) \vec{e}_z$$

Relation de passage :

$$\left\{ \begin{array}{l} -0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ -(E_0 \cos(\omega t - 0) + E'_{0y} \cos(\omega t + 0 + \varphi_y)) = 0 \\ -E'_{0z} \cos(\omega t + 0 + \varphi_z) = 0 \end{array} \right.$$

Espace 17

Conséquences :

1/ On a directement $E'_{0z} = 0$.

2/ Supposons $\omega t = \pi/2$. La composante y de la relation de passage donne

$$0 + E'_{0y} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_y\right) = 0 \quad \text{soit} \quad -\sin(\varphi_y) = 0 \quad \text{d'où} \quad \varphi_y = 0 \text{ convient.}$$

3/ Il vient alors $E'_{0y} = -E_0$.

Espace 18

Remarque : Il aurait été équivalent de choisir $\varphi_y = \pm\pi$, ce qui aurait conduit à $E'_{0y} = E_0$. De façon générale, un déphasage n'est jamais définie de manière unique, il faut généralement la choisir parmi un ensemble de valeurs possibles qui donnent des résultats physiquement équivalents tant que l'on reste cohérent dans ce choix par la suite.

• Conclusion

Finalement, l'onde réfléchie s'écrit

$$\vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y = E_0 \cos(\omega t + kx + \pi) \vec{e}_y$$



L'onde réfléchie sur un plan parfaitement conducteur a la même amplitude et la même polarisation que l'onde incidente mais se trouve en opposition de phase.

Remarque pour le futur : Une réflexion métallique introduit un déphasage de π , ce que l'on retrouvera en optique dans les prochains cours.

• Généralisation : cas d'un conducteur ohmique quelconque

Si le conducteur n'est pas parfait, l'onde incidente pénètre dans le conducteur, où elle est absorbée par effet de peau : elle est partiellement réfléchie et partiellement transmise. On définit les **coefficients de réflexion et de transmission en amplitude** à partir des amplitudes complexes des champs incident, réfléchi et transmis :

$$\underline{r} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{E_{0t}}{E_{0i}}.$$

On peut définir de manière analogue des coefficients de réflexion et transmission en énergie. Dans le cas d'un conducteur parfait, on a $\underline{r} = -1$ et $\underline{t} = 0$.

II.D - Structure de l'onde totale

• Champ électrique

Rappel : $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

Principe de superposition :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_i + \vec{E}_r \\ &= E_0 [\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)] \vec{e}_y \\ &= -2E_0 \sin(\omega t) \sin(-kx) \vec{e}_y \end{aligned}$$

$$\vec{E} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$$

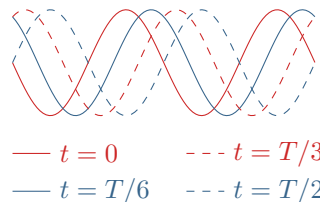
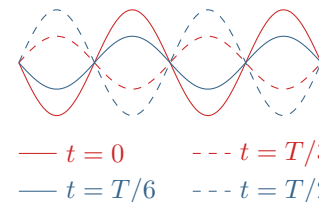
Espace 19

On ne retrouve pas la forme en $\omega t - kx$ ou $x - ct$ caractéristique d'une onde progressive : il y a découplage entre les dépendances spatiales et temporelles.



L'onde totale issue de la réflexion sur le conducteur est une **onde stationnaire**.

• **Rappel : comparaison entre ondes harmoniques progressives et stationnaires**

	Onde plane progressive harmonique	Onde plane stationnaire harmonique
Expression	$\sim \cos(\omega t - kx)$	$\sim \sin(kx) \cos(\omega t)$
Chrono-photographie	 <p>— $t = 0$ - - - $t = T/3$ — $t = T/6$ - - - $t = T/2$</p>	 <p>— $t = 0$ - - - $t = T/3$ — $t = T/6$ - - - $t = T/2$</p>
Propagation	Progression de l'onde à la célérité c .	Pas de progression mais vibration sur place.
Déformation	Toutes les points sont soumis, au cours du temps, aux mêmes champs.	Certains points ne vibrent pas (nœuds) alors que d'autres subissent des vibrations maximales (ventres).
Double périodicité	La longueur d'onde λ et la période T sont reliées par la relation de dispersion $\lambda = cT$.	La longueur d'onde λ et la période T sont reliées par la relation de dispersion $\lambda = cT$.

Exercice C1 : Nœuds et ventres d'une onde stationnaire

On considère le champ électrique créé par la réflexion d'une OPPH sur un plan conducteur parfait situé en $x = 0$: pour $x \leq 0$,

$$\vec{E} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y.$$

- 1 - Définir mathématiquement les nœuds de vibration, déterminer leurs positions et la distance séparant deux nœuds consécutifs.
- 2 - Même question pour les ventres.

Rappelons qu'une OS ne se propage pas, mais l'amplitude de vibration dépend de l'abscisse x : sur l'expression qu'on étudie dans cet exercice, elle vaut $2E_0 \sin(kx)$.

3 Position des nœuds : champ électrique constamment nul. Les nœuds (repérés par un entier p) se trouvent aux positions x_p telles que

$$\sin(kx_p) = 0 \quad \text{donc} \quad kx_p = p\pi \quad \text{soit} \quad x_p = \frac{p\pi}{k} = p \frac{\lambda}{2}$$

où p est un entier relatif. En particulier on constate un nœud du champ électrique en $x = 0$, c'est-à-dire au niveau du plan conducteur, conformément aux relations de passage.

4 Position des ventres : champ électrique d'amplitude maximale. Les ventres (repérés par un entier q) se trouvent aux positions x_q telles que

$$\sin(kx_q) = \pm 1 \quad \text{donc} \quad kx_q = \frac{\pi}{2} + q\pi \quad \text{soit} \quad x_q = \frac{\lambda}{4} + q \frac{\lambda}{2}$$

- **Champ magnétique**

⚠⚠⚠ **Attention !** Une OS n'est pas une OPP (!) et le champ magnétique ne peut pas se calculer à partir de la relation de structure.

↪ il faut calculer **séparément** \vec{B}_i et B_r avec la relation de structure puis les sommer.

$$\vec{B}_i = \vec{e}_x \wedge \frac{\vec{E}_i}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$$

et

$$\vec{B}_r = (-\vec{e}_x) \wedge \frac{\vec{E}_r}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z,$$

d'où on trouve tout calcul fait

$$\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z.$$

On retrouve une onde stationnaire : l'OEM a la même nature qu'elle soit écrite en fonction de \vec{E} ou de \vec{B} . Cependant, les nœuds de \vec{E} correspondent aux ventres de \vec{B} et réciproquement.

II.E - Apparition de courants superficiels

Relation de passage sur le champ magnétique :

$$\vec{0} - \vec{B}(x=0^-, t) = \mu_0 \vec{j}_s(t) \wedge \vec{e}_x$$

soit en projection

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = \mu_0 j_{s,z} \\ -\frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) = -\mu_0 j_{s,y} \end{cases}$$

↪ on en déduit que la réflexion s'accompagne nécessairement d'un courant surfacique non nul à l'interface,

$$\vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

Interprétation : on peut considérer que le courant surfacique variable émet lui aussi une onde électromagnétique :

- ▷ dans le vide, cette onde est l'onde réfléchiée ;
- ▷ dans le conducteur, cette onde est une onde transmise qui interfère avec l'onde incidente en opposition de phase, donc de manière parfaitement destructive, si bien que l'onde totale est nulle.

III - Confinement entre deux plans conducteurs

Considérons maintenant une cavité formée par deux plans parallèles parfaitement conducteurs : une telle cavité modélise par exemple un laser, voir figure 3.

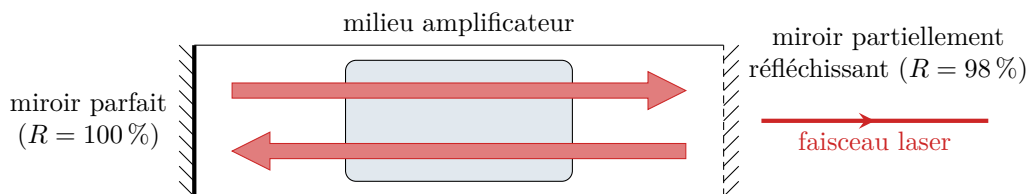


Figure 3 – Schéma de principe d'un laser. Dans un laser, une onde électromagnétique est confinée dans une cavité formée de deux miroirs contenant un milieu amplificateur. À chaque passage dans le milieu amplificateur, l'onde est amplifiée. L'un des miroirs est imparfait, ce qui permet à l'onde électromagnétique de sortir du laser.

Considérons une cavité formée de deux plans parfaitement conducteurs parallèles, distants de L le long du même axe (Ox), voir figure 4. Le but est de déterminer les ondes pouvant exister dans cette cavité.

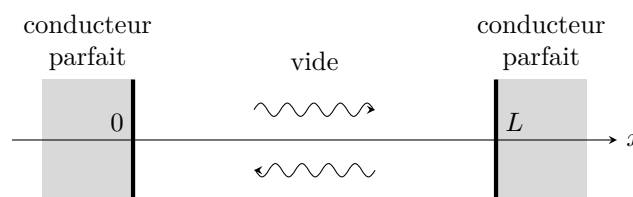


Figure 4 – Cavité électromagnétique formée par deux plans conducteurs.

L'exemple précédent a permis de comprendre qu'un plan parfaitement conducteur impose que l'onde totale soit une onde stationnaire, avec un nœud de vibration à la surface du conducteur. Ce sera donc « encore plus » le cas avec deux plans conducteurs.

↪ on va chercher directement une onde s'écrivant sous la forme d'une onde stationnaire, c'est-à-dire dont les variables d'espace et de temps sont découplées :

$$\vec{E} = f(x) g(t) \vec{e}_y$$

Cette onde doit vérifier trois contraintes indépendantes : l'équation de d'Alembert et les deux conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$.

Remarque : l'onde est forcément transverse, en revanche la choisir polarisée rectilignement est un choix arbitraire.

III.A - Résolution de l'équation de d'Alembert par séparation des variables

Résoudre une équation aux dérivées partielles par séparation des variables est possible lorsque l'on cherche des solutions dans lesquelles les variables sont découplées. Elle consiste à insérer la forme de solution cherchée directement dans l'équation aux dérivées partielles pour en déduire deux équations différentielles ordinaires portant sur chacune des variables, que l'on résout séparément.

Séparation des variables : Les ondes se propagent dans le vide, où l'équation de propagation est l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

En remplaçant par la forme cherchée :

$$f''(x)g(t) - \frac{1}{c^2}f(x)g''(t) = 0 \quad \text{soit} \quad f''(x)g(t) = \frac{1}{c^2}f(x)g''(t)$$

ce que l'on écrit sous la forme

$$c^2 \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(t)}{g(t)}$$

Espace 22

Obtention de deux équations différentielles ordinaires : L'un des membres ne dépend que de x , l'autre que de t , ils sont donc forcément constants : en imaginant faire varier x à t constant, on constate que le rapport $f''(x)/f(x)$ prend une valeur constante, et idem pour $g''(t)/g(t)$ en faisant varier t à x constant. On pose donc de façon très provisoire A tel que

$$c^2 \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(t)}{g(t)} = A = \text{cte}$$

On en déduit deux équations différentielles ordinaires sur les fonctions f et g :

$$\begin{cases} f''(x) - \frac{A}{c^2} f(x) = 0 \\ g''(t) - A g(t) = 0 \end{cases}$$

Espace 23

Critère de stabilité de l'équation temporelle :

l'onde ne peut pas diverger, donc forcément $A < 0$

Espace 24

↪ l'analogie avec l'équation d'un oscillateur harmonique nous invite à poser $A = -\omega^2$, soit

$$\begin{cases} f''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) = 0 \\ g''(t) + \omega^2 g(t) = 0 \end{cases}$$

Remarque : l'onde étant confinée dans un domaine restreint de l'espace, il n'y a pas de « contrainte de stabilité en x » : l'expression que l'on cherche ne s'applique pas en $\pm\infty$.

Résolution :

$$f(x) = F_0 \cos\left(\frac{\omega}{c}x + \psi\right) = F_0 \cos(kx + \psi) \quad \text{et} \quad g(t) = G_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

soit finalement

$$\vec{E}(t) = E_0 \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y,$$

Espace 25

III.B - Modes propres de la cavité

Conditions aux limites : la continuité des composantes tangentielles de \vec{E} à toute interface se traduit ici par

$$\vec{E}(x=0, t) = \vec{E}(x=L, t) = \vec{0} \quad \text{soit} \quad f(0) = f(L) = 0.$$

Espace 26

▷ En $x = 0$:

$$\cos(0 + \psi) = 0 \quad \text{soit} \quad \psi = \pm \frac{\pi}{2}$$

Espace 27

On choisit de garder le signe \ominus pour que les signes « se passent bien » ensuite (le choix inverse est tout à fait possible tant que l'on reste cohérent).

▷ En $x = L$:

$$\cos\left(kL - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(kL) = 0 \quad \text{d'où} \quad kL = n\pi \quad \text{soit} \quad k = n \frac{\pi}{L}$$

Espace 28

On dit que le vecteur d'onde est **quantifié** : il ne peut prendre que certaines valeurs appartenant à un ensemble discret, c'est-à-dire repérées par un entier n .

Remarque : Bien que les deux conditions aux limites se ressemblent énormément (nullité d'une fonction trigo), les conclusions que l'on en tire sont radicalement différentes : ψ est une phase, donc on peut librement choisir sa valeur parmi toutes les valeurs possibles, alors que $k = \omega/c$ et L sont deux grandeurs physiques sur lesquelles on n'a aucun choix, et pour lesquelles il n'y a en particulier aucune raison qu'elles soient dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Il faut donc garder toutes les valeurs possibles dans ce second cas.

Interprétation physique :

$$k_n = \frac{n\pi}{L} = \frac{2\pi}{\lambda_n} \quad \text{soit} \quad L = n \frac{\lambda}{2}.$$

↪ les ondes pouvant exister dans la cavité sont celles pour lesquelles la longueur de la cavité correspond à un nombre entier de demi-longueurs d'onde.

Situation analogue :

corde de Melde : normal, deux nœuds de vibration aux deux extrémités de la cavité.

Espace 29

Les seules ondes stationnaires harmoniques pouvant exister dans une cavité de longueur L sont celles pour lesquelles le vecteur d'onde vérifie

$$k = \frac{n\pi}{L} \quad \text{soit} \quad L = n \frac{\lambda}{2}.$$

L'onde correspondant à une valeur de n est appelée **mode propre d'ordre n** de la cavité et s'écrit

$$\vec{E}_n = E_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi\right) \vec{e}_y.$$

Remarque : le mode propre a dans cette écriture une polarisation rectiligne, mais celle-ci peut être quelconque.

III.C - Superposition de modes propres

Pour qu'une onde puisse exister dans la cavité, elle doit vérifier l'équation de d'Alembert et les conditions aux limites : c'est bien sûr le cas des modes propres. Mais comme l'équation de d'Alembert est linéaire, alors une somme de modes propres vérifie aussi l'équation de d'Alembert et les conditions aux limites : c'est donc aussi une onde pouvant exister dans la cavité. On admet que ce sont les seules.

Toute onde pouvant exister dans la cavité s'écrit comme une combinaison linéaire des modes propres.

Mathématiquement, pour une onde polarisée rectilignement selon \vec{e}_y

$$\vec{E}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{0n} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi_n\right) \vec{e}_y$$

L'amplitude E_{0n} et la phase φ_n du mode d'ordre n sont fixées par les conditions initiales.

Remarque : cette écriture est analogue à un développement de Fourier « version ondulatoire ».