Ondes électromagnétiques dans les conducteurs

Exercice 1 : Blocage d'appel

oral banque PT | 1 | 2 |

▷ *Effet de peau.*

1 Les téléphones mobiles émettent à des fréquences f **de l'ordre de 2 GHz**, ce qui correspond à des longueurs d'onde $\lambda = c/f$ **de l'ordre de 15 cm**.

2 On se place dans l'ARQS : le conducteur est neutre en volume et le courant de déplacement est négligeable. On exprime $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E})$ de deux façons différentes : d'une part

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) \underset{\substack{\uparrow\\ \mathrm{MF}}}{=} -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \mathrm{MA}}}{=} -\mu_0\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \underset{\substack{\uparrow\\ \mathrm{Ohm}}}{=} -\mu_0\gamma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,,$$

et d'autre part

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \Delta\vec{E} \underset{\substack{\uparrow\\ \mathrm{MG}}}{=} -\Delta\vec{E}\,,$$

et ainsi en identifiant on obtient

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \mu_0\gamma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}\,.}$$

L'équation de propagation dans le vide s'écrit

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}\,.$$

On constate que l'ordre de la dérivée temporelle n'est pas le même : au lieu d'une équation de d'Alembert, on obtient dans le conducteur une **équation de diffusion**. Cela traduit que l'onde électromagnétique **ne se propage pas** dans le métal, mais lui cède son énergie par effet Joule. L'onde **est absorbée par le métal**.

3 Cherchons une solution de la forme indiquée par l'énoncé. En injectant,

$$-\underline{k}^2\vec{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\underline{k}z)} - \mathrm{i}\gamma\mu_0\omega\vec{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\underline{k}z)} = \vec{0}$$

et en simplifiant

$$-\underline{k}^2 - \mathrm{i}\mu_0\gamma\omega = 0 \qquad \text{soit} \qquad \underline{k}^2 = -\mathrm{i}\mu_0\gamma\omega\,.$$

En prenant la « racine carrée », $-\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} = (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4})^2 = \left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^2$, il vient

$$\boxed{\underline{k} = \pm\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu_0\gamma\omega}\,.}$$

Dimensionnellement, on identifie une longueur caractéristique

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}\,.$$

Identifions la solution physique parmi les deux solutions mathématiques. En injectant l'expression de $\underline{k}$ dans celle de l'onde cherchée, on trouve

$$\vec{E} = \vec{E}_0\,\mathrm{e}^{\pm z/\delta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t\pm z/\delta)}\,.$$

Comme on cherche une onde se propageant dans le sens des z croissants, c'est le signe $\ominus$ qu'il faut garder :

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_0\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-z/\delta)}\,.}$$

Ces solutions **ne sont pas** des OPPH car leur amplitude diminue au cours de la propagation : on parle plutôt de pseudo-OPPH.

> *Les deux signes $\pm$ apparaissant dans les exponentielles réelle et complexe ne sont pas indépendants ! C'est d'ailleurs physiquement rassurant : si les signes étaient choisis opposés, cela pourrait impliquer qu'une onde se propageant dans le sens des z croissants (signe $\ominus$ dans l'exponentielle complexe) est amplifiée (!!) au cours de sa propagation dans le métal (signe $\oplus$ dans l'exponentielle réelle).*

4 La longueur caractéristique sur laquelle le champ électrique s'atténue est bien sûr δ. Pour un métal, $\gamma \sim 10^7\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}$ (p.ex. $3{,}7\cdot10^7\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}$ pour Al ou $6\cdot10^7\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}$ pour Cu), d'où

$$\boxed{\delta \sim 2\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}\,.}$$

Ainsi, au delà de quelques microns, l'onde électromagnétique est **complètement absorbée par le métal**. Cela justifie l'hypothèse de plaque infinie : que sa longueur soit quelques millimètres, centimètres ou kilomètres il n'y a aucune onde transmise au travers de la plaque. Le second téléphone ne reçoit donc plus l'appel.

Exercice 2 : Onde électromagnétique confinée — oral Mines-Ponts PSI | 1 | 2 |

- *Réflexion sur un conducteur parfait ;*
- *Cavité électromagnétique.*

1 D'après l'équation de d'Alembert,

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \qquad \text{soit} \qquad -k^2\vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E} = \vec{0} \qquad \text{d'où} \qquad \omega^2 = k^2c^2$$

et avec ω et k positifs

$$\boxed{\omega = kc\,.}$$

2 Appelons ① le vide ($z<0$) et ② le conducteur ($z>0$), soit $\vec{n}_{1\to2} = \vec{e}_z$. En ne tenant compte que de l'onde incidente, d'après la relation de passage en $z=0$,

$$-E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\vec{e}_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{e}_z\,.$$

> ***Attention !*** *La relation de passage s'exprime à l'interface, donc uniquement en $z=0$: il ne faut pas garder de terme en kz lorsque vous l'écrivez.*

Comme $E_0 \neq 0$, **il y a contradiction** : il existe une onde réfléchie de la forme

$$\vec{E}_\mathrm{r} = E_0'\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + kz)}\,\vec{e}_x\,.$$

> *J'ai traité le cas général en cours, mais dans un exercice qui ne précise pas la forme de l'onde réfléchie, je pense que vous pouvez sans peine admettre qu'il y a conservation de la polarisation à la réflexion, ce qui allège les calculs.*

Comme l'onde totale est $\vec{E} = \vec{E}_\mathrm{i} + \vec{E}_\mathrm{r}$, la relation de passage donne cette fois

$$-\left(E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + E_0'\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right) = 0 \qquad \text{soit} \qquad E_0' = -E_0\,.$$

Ainsi, l'onde réfléchie est en opposition de phase avec l'onde incidente, et l'onde totale s'écrit

$$\vec{E} = \vec{E}_\mathrm{i} + \vec{E}_\mathrm{r} = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}\right)\vec{e}_x$$

soit

$$\boxed{\vec{E} = -2\mathrm{j}E_0\sin(kz)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\vec{e}_x = 2E_0\sin(kz)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}\,\vec{e}_x\,.}$$

Il s'agit d'une **onde stationnaire** : les variables de temps et d'espace sont découplées.

3 D'après l'équation de Maxwell-Faraday,

$$-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = +\frac{\partial E_x}{\partial z}\,\vec{e}_y$$

compte tenu des termes nuls. Ainsi,

$$-\mathrm{j}\omega\vec{B} = -2\mathrm{j}E_0k\cos(kz)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\vec{B} = \frac{2E_0}{c}\cos(kz)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\vec{e}_y\,,}$$

en simplifiant $k/\omega = 1/c$.

Méthode alternative : *L'onde incidente et l'onde réfléchie sont deux OPPH, qui vérifient donc chacune la relation de structure. Ainsi,*

$$\vec{B}_i = \vec{e}_z \wedge \frac{\vec{E}_i}{c} = \frac{E_0}{c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)}\,\vec{e}_y$$
$$\vec{B}_\mathrm{r} = -\vec{e}_z \wedge \frac{\vec{E}_\mathrm{r}}{c} = \frac{E_0}{c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + kz)}\,\vec{e}_y$$

et pour l'onde résultante, par superposition,

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}\right)\vec{e}_y \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\vec{B} = \frac{2E_0}{c}\cos(kz)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\vec{e}_y\,.}$$

Attention ! *La relation de structure ne s'applique qu'à des OPPH. L'appliquer à une onde stationnaire est faux : le vecteur d'onde n'est même pas défini ...*

4 D'après la relation de passage sur le champ magnétique appliquée en $z = 0$,

$$\mu_0\,\vec{j}_\mathrm{s} = \vec{e}_z \wedge \left(\vec{0} - \frac{2E_0}{c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\vec{e}_y\right) \qquad \text{soit} \qquad \mu_0\,\vec{j}_\mathrm{s} = \frac{2E_0}{c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\vec{e}_x\,.$$

Ainsi, il existe un courant surfacique à la surface du conducteur parfait valant

$$\boxed{\vec{j}_\mathrm{s} = \frac{2E_0}{\mu_0 c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\vec{e}_x\,.}$$

Interprétons qualitativement cette expression. Le champ électrique incident met en mouvement les électrons en surface du conducteur, d'où la direction $\vec{e}_x$ du courant de surface. En retour, ce courant de surface créé également un champ électrique : le champ réfléchi. Ce champ existe non seulement dans le vide, mais aussi dans le conducteur, à ceci près qu'il se déplace selon $+\vec{e}_z$. Comme il est de même amplitude mais en opposition de phase avec le champ incident, cela permet d'interpréter la nullité du champ total dans le conducteur.

5 Comme précédemment, la relation de passage en $z = -L$ impose que le champ total $\vec{E}$ soit nul en $z = -L$ à tout instant, d'où on déduit

$$\sin(kL) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad kL = n\pi, \quad n \text{ entier}, \qquad \text{soit} \qquad k = \frac{n\pi}{L}$$

Ces ondes sont les modes propres de la cavité formée des deux conducteurs. La relation précédente peut s'écrire en termes de longueurs d'onde ou de fréquence,

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{n} \qquad \text{et} \qquad f = \frac{kc}{2\pi} = \frac{nc}{2L}\,.}$$

On retrouve une claire analogie avec les modes propres d'une corde de Melde.

6 La puissance surfacique est reliée au vecteur de Poynting, qu'il faut calculer à partir des champs réels

$$\vec{E} = 2E_0\sin(kz)\sin(\omega t)\,\vec{e}_x \qquad \text{et} \qquad \vec{B} = \frac{2E_0}{c}\cos(kz)\cos(\omega t)\,\vec{e}_y$$

d'où

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{4E_0^{\,2}}{\mu_0 c}\cos(kz)\sin(kz)\cos(\omega t)\sin(\omega t)\,\vec{e}_z$$

Or

$$\cos(\omega t)\sin(\omega t) = \frac{\sin(2\omega t)}{2} \qquad \text{et} \qquad \langle\sin(2\omega t)\rangle = 0$$

ce qui donne

$$\boxed{\langle\vec{\Pi}\rangle = \vec{0}}\,.$$

En moyenne, l'énergie ne se propage pas dans la cavité, ce qui est cohérent avec le fait que les ondes y soient stationnaires.

Méthode alternative : *En moyenne,*

$$\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\frac{\vec{\underline{E}}\wedge\vec{\underline{B}}^\star}{\mu_0}\right) = \frac{1}{2\mu_0}\times 2E_0\sin(kz)\times\frac{2E_0}{c}\cos(kz)\times\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{j\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)}\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\right)(-\vec{e}_y)$$

ce qui donne

$$\boxed{\langle\vec{\Pi}\rangle = \vec{0}}$$

car $\mathrm{e}^{j\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)}\,\mathrm{e}^{-j\omega t} = \mathrm{e}^{-j\pi/2} = -j$, *c'est-à-dire un imaginaire pur.*

Exercice 3 : Voile solaire

oral banque PT | 2 | 2

- ▷ *Réflexion sur un conducteur parfait ;*
- ▷ *Force de Lorentz.*

1 Supposons que l'OPPM incidente se propage dans le sens des z croissants et qu'elle est polarisée selon (Ox). Elle s'écrit alors

$$\boxed{\vec{\underline{E}}_\mathrm{i} = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kz)}\,\vec{e}_x\,.}$$

On cherche l'onde réfléchie sous la forme d'une OPPM se propageant en sens inverse et de polarisation a priori quelconque,

$$\vec{\underline{E}}_\mathrm{r} = \underline{E}_\mathrm{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+kz)}\,\vec{e}_x + \underline{E}'_\mathrm{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+kz)}\,\vec{e}_y\,.$$

Supposons la voile située en $z>0$ et le vide en $z<0$. La relation de passage en $z=0$ donne

$$\vec{0} - \left[\vec{\underline{E}}_\mathrm{i}(z=0^-,t) + \vec{\underline{E}}_\mathrm{r}(z=0^-,t)\right] = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{e}_z\,.$$

En projection sur $\vec{e}_y$ on obtient de façon immédiate

$$\underline{E}'_\mathrm{r} = 0$$

et en projection sur $\vec{e}_x$ on trouve

$$E_0 + \underline{E}_\mathrm{r} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \underline{E}_\mathrm{r} = -E_0\,.$$

Ainsi, l'onde réfléchie s'écrit

$$\boxed{\vec{\underline{E}}_\mathrm{r} = -E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+kz)}\,\vec{e}_x\,.}$$

2 D'après la relation de structure, les champs magnétiques des ondes incidente et réfléchie s'écrivent respectivement

$$\begin{cases} \vec{\underline{B}}_\mathrm{i} = \vec{e}_z\wedge\dfrac{\vec{\underline{E}}_\mathrm{i}}{c} = \dfrac{E_0}{c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kz)}\,\vec{e}_y \\[2ex] \vec{\underline{B}}_\mathrm{r} = (-\vec{e}_z)\wedge\dfrac{\vec{\underline{E}}_\mathrm{r}}{c} = \dfrac{E_0}{c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+kz)}\,\vec{e}_y \end{cases}$$

Le champ magnétique total en $z=0^-$ vaut donc

$$\vec{\underline{B}}(z=0^-,t) = \vec{\underline{B}}_\mathrm{i}(z=0^-,t) + \vec{\underline{B}}_\mathrm{r}(z=0^-,t) = \frac{2E_0}{c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\vec{e}_y\,.$$

La relation de passage en $z=0$ donne alors

$$\vec{\underline{\jmath}}_\mathrm{s} = \vec{e}_z\wedge\frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{2E_0}{c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\vec{e}_y\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\vec{\underline{\jmath}}_\mathrm{s} = \frac{2E_0}{\mu_0 c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\vec{e}_x\,.}$$

3 La densité volumique de force de Lorentz en présence d'une densité volumique de courant $\vec{\jmath}$ s'écrit

$$\vec{f}_\mathrm{vol} = \vec{\jmath}\wedge\vec{B}\,.$$

Par analogie, la densité surfacique de force de Lorentz peut ici s'écrire

$$\boxed{\vec{f}_\mathrm{surf} = \vec{\jmath}_\mathrm{s}(t)\wedge\vec{B}(z=0,t)\,.}$$

Sa valeur moyenne vaut

$$\langle\vec{f}_\mathrm{surf}\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\vec{\underline{\jmath}}_\mathrm{s}(t)\wedge\vec{\underline{B}}^\star(z=0,t)\right)$$

Rappelons que $\underline{\vec{B}}^\star$ est le conjugué de $\underline{\vec{B}}$.

Attention, l'expression de la force étant non linéaire il n'est pas possible de calculer sa valeur instantanée à partir des grandeurs complexes mais seulement sa valeur moyenne ... sans oublier ni la partie réelle ni le facteur 1/2. Pour obtenir la valeur instantanée, il n'y a pas d'autre possibilité que de revenir aux grandeurs réelles.

À partir des expressions précédentes,

$$\underline{\vec{\jmath}_\mathrm{s}}(t) \wedge \underline{\vec{B}}^\star(z=0,t) = \frac{2E_0}{\mu_0 c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \times \frac{2E_0}{c}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}(\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y) = \frac{4{E_0}^2}{\mu_0 c^2}\,\vec{e}_z\,.$$

Comme $\mu_0 c^2 = 1/\varepsilon_0$, on en déduit finalement

$$\boxed{\langle \vec{f}_\mathrm{surf} \rangle = 2\varepsilon_0 {E_0}^2 \vec{e}_z\,.}$$

Elle est dirigée selon $+\vec{e}_z$, c'est-à-dire dans le sens de propagation du rayonnement solaire, comme on pouvait s'y attendre.

Exercice 4 : Guide d'ondes

oral banque PT | 2 | 2 |

- *Relation de structure ;*
- *Exploitation des conditions aux limites.*

1 En développant les exponentielles complexes,

$$\vec{E} = A\,\mathrm{e}^{i(\omega t - k_1 x + k_2 y)}\,\vec{e}_z + B\,\mathrm{e}^{i(\omega t - k_1 x - k_2 y)}\,.$$

Il s'agit bien d'une superposition de deux OPPH, de vecteurs d'ondes respectifs $\vec{k}_\pm = k_1\,\vec{e}_x \pm k_2\,\vec{e}_y$.

2 Les champs sont **nuls** dans un conducteur parfait. Considérons le plan $y=0$. Ce plan est de normale $\vec{e}_y$ et le champ polarisé selon $\vec{e}_z$: il est donc continu à l'interface. Ainsi, pour tout x et tout t,

$$\vec{E}(y=0) = \vec{0} \qquad \text{soit} \qquad (A+B)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_1 x)} = 0$$

d'où la relation

$$\boxed{A + B = 0\,.}$$

De même, la condition limite en $y = a$ s'écrit

$$\vec{E}(y=0) = \vec{0} \qquad \text{soit} \qquad A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2 a} + B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2 a} = 0$$

et comme $A = -B$ alors

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2 a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2 a} = 2\mathrm{i}\sin(k_2 a) = 0\,.$$

En introduisant un entier n positif, on en déduit

$$k_2 a = n\pi \qquad \text{soit} \qquad \boxed{k_2 = \frac{n\pi}{a}\,.}$$

3 Raisonnons sur la figure 1. L'inclinaison de l'onde est donnée par celle de son vecteur d'onde $\vec{k}_\pm$. Géométriquement, on constate

$$\sin\theta_+ = \frac{k_2}{k_+}$$

On peut alors remplacer k_2 par son expression, et utiliser la relation de dispersion $k_+ = \omega/c$ car il s'agit du vecteur d'onde d'une OPPH. Ainsi,

$$\sin\theta_+ = \frac{n\pi/a}{\omega/c} = \frac{n\pi c}{a\omega} = \frac{2\pi c}{\omega}\,\frac{n}{2a}$$

et finalement

$$\boxed{\sin\theta_+ = \frac{n\lambda}{2a}\,.}$$

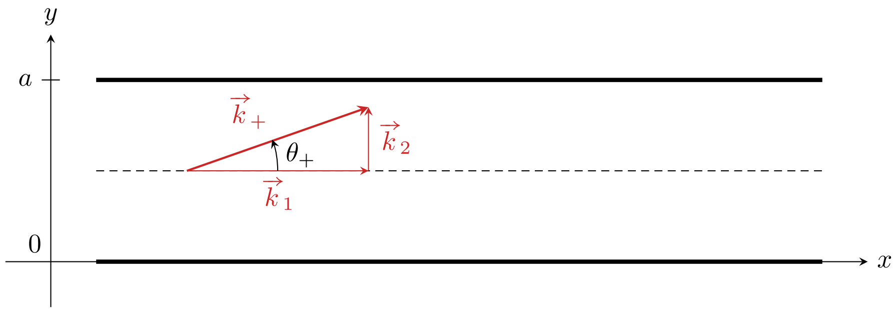

Figure 1 – Vecteur d'onde dans un guide d'onde. Le vecteur d'onde d'une seule des deux OPPH est représenté.

L'expression est la même pour l'onde $\ominus$ en changeant simplement le signe.

4 De la question précédente, on déduit

$$\sin\theta_+ = \frac{n\lambda}{2a} < 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\lambda < \frac{2a}{n}\,.}$$

La plus petite valeur de n étant 1, on en déduit que seules les ondes de longueur d'onde

$$\lambda < \lambda_{\text{max}} = 2a$$

peuvent se propager dans le guide.

5 Comme $A = -B$, alors

$$\vec{E} = A\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2y}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_1x)}\,\vec{e}_z \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\vec{E} = 2\mathrm{i}A\sin(k_2y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_1 x)}\,\vec{e}_z\,.}$$

L'onde est donc de type **progressive** dans la direction x le long du guide, et **stationnaire** dans la direction y perpendiculaire.

Exercice 5 : Approche énergétique de l'effet de peau — oral banque PT | 3 | 2

- *Effet de peau ;*
- *Vecteur de Poynting ;*
- *Bilan de puissance.*

1 Il s'agit **bien d'une onde plane**, car $\vec{E}$ prend la même valeur en tout point des plans $z = $ cte, mais elle n'est **pas progressive** à cause de l'exponentielle décroissante. Le paramètre α représente à la fois le **vecteur d'onde** et l'**inverse de la longueur d'amortissement** (longueur de peau) de l'onde. L'onde est **polarisée rectilignement** selon $\vec{u}_x$.

2 **Attention !** Pour pouvoir identifier $\overrightarrow{\text{rot}} \leftrightarrow -\mathrm{j}\underline{\vec{k}}\wedge$, il faut écrire l'onde avec un vecteur d'onde complexe, soit

$$\vec{E} = E_0 \exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t - (1-\mathrm{j})\alpha z\right)\right]\vec{u}_x\,,$$

d'où on identifie $\underline{\vec{k}} = (1-\mathrm{j})\alpha\,\vec{u}_z$. D'après l'équation de Maxwell-Faraday,

$$-\mathrm{j}\vec{k}\wedge\vec{E} = -\mathrm{j}\omega\vec{B} \qquad \text{soit} \qquad (1-\mathrm{j})\alpha\,\vec{u}_z \wedge E_0\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \alpha z)}\,\vec{u}_x = \omega\vec{B}$$

d'où

$$\boxed{\vec{B} = \frac{(1-\mathrm{j})\alpha E_0}{\omega}\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \alpha z)}\,\vec{u}_y\,.}$$

3 Le vecteur de Poynting est défini par

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\,.$$

Sa moyenne temporelle vaut

$$\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}^*}{\mu_0}\right)\,.$$

Or

$$\vec{E} \wedge \vec{B}^* = \frac{(1+\mathrm{j})\alpha {E_0}^2}{\mu_0 \omega} \, \mathrm{e}^{-2\alpha z} \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y$$

d'où

$$\boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\alpha {E_0}^2}{2\mu_0 \omega} \, \mathrm{e}^{-2\alpha z} \vec{u}_z \, .}$$

> ***Attention !*** *Les champs complexes ne donnent accès qu'à la moyenne temporelle. Trouver le vecteur de Poynting instantané exige de revenir aux champ réels.*
> *(et bien sûr on peut aussi passer par les champs réels pour trouver $\langle \vec{\Pi} \rangle$)*

4 Puissance moyenne entrant par la face située en z :

$$\langle \mathcal{P}_\mathrm{e} \rangle = \iint \langle \vec{\Pi}(z) \rangle \cdot \mathrm{d}S \, \vec{u}_z = \frac{\alpha {E_0}^2}{2\mu_0 \omega} S \, \mathrm{e}^{-2\alpha z} \, .$$

Puissance moyenne sortant par la face située en $z + \mathrm{d}z$:

$$\langle \mathcal{P}_\mathrm{s} \rangle = \iint \langle \vec{\Pi}(z+\mathrm{d}z) \rangle \cdot \mathrm{d}S \, \vec{u}_z = \frac{\alpha {E_0}^2}{2\mu_0 \omega} S \, \mathrm{e}^{-2\alpha (z+\mathrm{d}z)} \, .$$

La puissance entrant dans le conducteur mais n'en sortant pas est cédée au conducteur. Ainsi,

$$\langle \mathcal{P}_\mathrm{J} \rangle = \mathcal{P}_\mathrm{e} - \mathcal{P}_\mathrm{s} = \frac{\alpha {E_0}^2}{2\mu_0 \omega} S \left(\mathrm{e}^{-2\alpha z} - \mathrm{e}^{-2\alpha (z+\mathrm{d}z)} \right) \, .$$

En utilisant un développement limité

$$\mathrm{e}^{-2\alpha z} - \mathrm{e}^{-2\alpha (z+\mathrm{d}z)} \simeq 2\alpha \, \mathrm{e}^{-2\alpha z} \, \mathrm{d}z \, ,$$

on obtient

$$\langle \mathcal{P}_\mathrm{J} \rangle = \frac{\alpha {E_0}^2}{2\mu_0 \omega} S \times 2\alpha \, \mathrm{e}^{-2\alpha z} \, \mathrm{d}z$$

et finalement

$$\boxed{\langle \mathcal{P}_\mathrm{J} \rangle = \frac{\alpha^2 {E_0}^2}{\mu_0 \omega} S \, \mathrm{e}^{-2\alpha z} \, \mathrm{d}z \, .}$$

5 La puissance volumique dissipée par effet Joule vaut $\mathcal{P}_{\mathrm{J,vol}} = \gamma E^2$ donc en moyenne et sur la tranche de volume $S \, \mathrm{d}z$,

$$\langle \mathcal{P}_\mathrm{J} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\gamma \vec{E} \cdot \vec{E}^* \right) S \, \mathrm{d}z$$

soit

$$\boxed{\langle \mathcal{P}_\mathrm{J} \rangle = \frac{\gamma {E_0}^2}{2} \, \mathrm{e}^{-2\alpha z} S \, \mathrm{d}z \, .}$$

6 Par identification,

$$\frac{\alpha^2 {E_0}^2}{\mu_0 \omega} S \, \mathrm{e}^{-2\alpha z} \mathrm{d}z = \frac{\gamma {E_0}^2}{2} \, \mathrm{e}^{-2\alpha z} S \, \mathrm{d}z \, ,$$

soit en simplifiant

$$\frac{\alpha^2}{\mu_0 \omega} = \frac{\gamma}{2} \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}} \, .$$

La longueur de peau $\delta = 1/\alpha$ s'écrit finalement

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} \, .}$$