Dualité onde-corpuscule et quantification de l'énergie

Plan du cours

Ce que vous devez savoir et savoir faire

- ▷ Savoir définir la dualité onde-corpuscule pour la lumière et la matière.
- ▷ Connaître et utiliser les relations de Planck-Einstein et de de Bröglie pour évaluer des ordres de grandeur de phénomènes quantiques.
- ▷ À partir de documents, analyser une expérience illustrant la notion d'onde de matière.
- ▷ À partir de documents, interpréter une expérience d'interférences (matière ou lumière) « particule par particule » en termes probabilistes.

- ▷ Connaître l'interprétation probabiliste associée à la fonction d'onde.
- ▷ Connaître et utiliser l'inégalité d'Heisenberg pour évaluer des ordres de grandeur de phénomènes quantiques.
- ▷ À partir de documents, comprendre les conséquences d'une inégalité d'Heisenberg dans une expérience nécessitant une description quantique.

- ▷ Établir le lien qualitatif entre confinement spatial et quantification sur l'exemple de la quantification de l'énergie d'une particule libre confinée à une dimension.

Questions de cours pour les colles

- ▷ Donner l'ordre de grandeur de la constante de Planck.
- ▷ Énoncer les relations de de Bröglie.
- ▷ Énoncer l'inégalité d'Heisenberg relative à la position et donner son interprétation qualitative pour un système quantique (« égalité » d'Heisenberg si le système est quantique).
- ▷ Donner les conséquences du confinement sur une particule quantique (aucune formule ni démonstration n'est à apprendre, seulement la phénoménologie).

Étienne Thibierge, 2 octobre 2017, www.etienne-thibierge.fr

I - Dualité onde-corpuscule pour la matière

I.1 - Mise en évidence expérimentale

- **Expérience**

☕ *Analyse du document 2 sur les interférences d'électrons.*

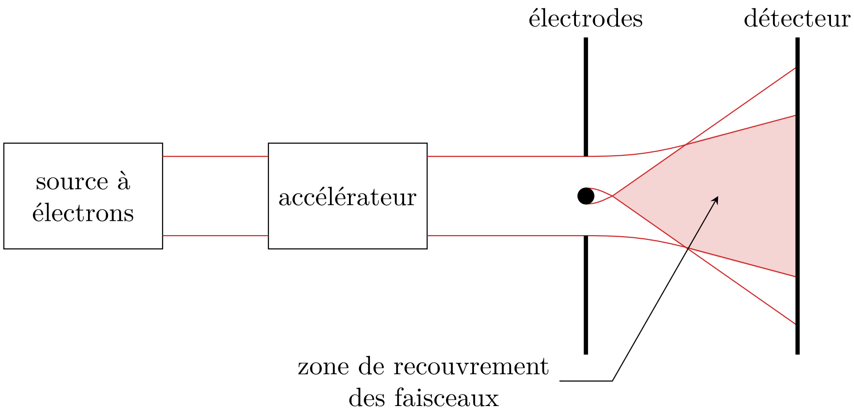


Figure 1 – Schéma de l'expérience.

Point important : il n'y a qu'un seul électron à la fois dans le dispositif.

Espace 1

Observations :

Espace 2

- **Interprétation**

Les résultats sont analogues à ceux de l'expérience des fentes d'Young avec de la lumière de faible intensité, voir le chapitre O3. Les conclusions sont donc analogues.

Les électrons possèdent également un comportement de type particule dans leur détection,
mais leur propagation dans le dispositif est régie par des lois ondulatoires.

Les électrons ont également une double nature : on parle à nouveau de **dualité onde-corpuscule**.

Une telle particule quantique est parfois appelée « quanton ».

- **Conséquence innatendue : influence d'un observateur extérieur**

☕ *Vidéo du site « Tout est quantique » sur la dualité onde-corpuscule.*

Espace 3

I.2 - Relations de de Bröglie

Dans un cadre plus large, on parle d'**onde de matière**. Comme pour le photon et l'onde lumineuse, la particule et l'onde de matière décrivent le même objet physique et leurs propriétés sont donc intimement liées. Ces propriétés sont données par les relations de de Bröglie (prononcer « de Breuille »), qui sont le pendant des relations de Planck-Einstein.

Une onde de matière

- ▷ se propage à la vitesse $\overrightarrow{v}$ de déplacement de la particule ;
- ▷ a pour vecteur d'onde $\overrightarrow{k} = \dfrac{\overrightarrow{p}}{\hbar}$ où $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$ est la quantité de mouvement de la particule ;
- ▷ de façon équivalente, a pour longueur d'onde la **longueur d'onde de de Bröglie** $\lambda = \dfrac{h}{p}$;

avec la constante de Planck $h = 6{,}6261 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$ et la constante de Planck réduite $\hbar = h/2\pi$.

> ***Remarque :*** *Il ne faut pas pousser trop loin l'application quantitative de ces relations à l'expérience décrite dans le document 2. Compte tenu de leur vitesse $v \sim 1 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, les électrons sont relativistes et leur quantité de mouvement n'est donc pas donnée par la relation de mécanique classique $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$.*

II - Description d'une particule quantique

II.1 - Quand une description quantique est-elle nécessaire ?

Espace 4

Exercice C1 : Longueur d'onde de de Bröglie d'une balle de tennis

Nadal sert à $200\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, la balle est-elle diffractée par la raquette de Federer ?

Espace 5

II.2 - Fonction d'onde

En mécanique classique : deux particules lancées d'un même point M_0 à l'instant t_0 avec une même vitesse arriveront toujours au même point M_1 au même temps t_1 et on peut suivre leur trajectoire.

En mécanique quantique : ce n'est plus vrai, comme l'atteste l'émergence de figures d'interférence qui implique la nécessité d'une description ondulatoire.

- ⇝ tous les électrons ou tous les photons, même émis exactement de la même façon, peuvent arriver à deux endroits différents avec une certaine probabilité ;
- ⇝ parler de trajectoire d'une particule quantique n'a pas vraiment de sens puisqu'il n'est pas possible de localiser une onde.

En mécanique quantique, la notion de trajectoire $t \mapsto \overrightarrow{OM}(t)$ doit être remplacée par celle de **fonction d'onde** $(M, t) \mapsto \psi(M, t)$.
Cette fonction d'onde est telle que $\mathrm{d}P = |\psi(M,t)|^2 \,\mathrm{d}V$ est la probabilité qu'une mesure de la position de la particule à l'instant t indique qu'elle se trouve dans un petit volume $\mathrm{d}V$ centré sur le point M.

> ***Remarque pour l'avenir :*** *Les notations $\mathrm{d}P$ et $\mathrm{d}V$ sont celles de différentielles. Elles désignent des quantités dites élémentaires ou infinitésimales.*

L'existence et la définition de la fonction d'onde constituent un principe (un postulat) de la mécanique quantique, qui décrit le caractère intrinsèquement probabiliste de la détection quantique. En particulier, cette probabilité n'est **pas du tout** reliée à des incertitudes expérimentales.

La fonction d'onde est dimensionnée :

Espace 6

Elle est également normalisée. Comme la particule se trouve forcément quelque part, alors

$$\sum_{\text{espace}} \mathrm{d}P = 1 \qquad \text{soit} \qquad \iiint_{\text{espace}} |\psi(M,t)|^2 \,\mathrm{d}V = 1\,.$$

Enfin, une particularité de la fonction d'onde est d'être à valeurs complexes. Cela peut paraître surprenant mais ne pose pas de difficulté car c'est son module (donc un nombre réel) qui a une signification expérimentale.

Lorsque l'on raisonne en termes de fonction d'onde, les lois de Newton ne s'appliquent évidemment pas et doivent être remplacées par une autre équation, appelée **équation de Schrödinger**.

II.3 - Inégalité d'Heisenberg

En mécanique classique : la position et la vitesse peuvent être connues avec une précision infinie, en pratique seulement limitée par la précision des instruments de mesure.

En mécanique quantique : la nécessité de prendre en compte le caractère ondulatoire implique une indétermination sur la position et la quantité de mouvement de la particule (une onde ne peut pas être parfaitement localisée), et ce **indépendamment** de toute problématique de précision des mesures.

Espace 7

Cette inégalité est appelée **inégalité d'Heisenberg**.

Δx et Δp_x s'apparentent aux écarts-types de la distribution de probabilité.

> ***Remarque essentielle :*** *Δx et Δp_x traduisent une indétermination physique, ce n'est pas une question de manque de précision de l'appareil de mesure. Autrement dit, même avec des appareils (fictifs) qui seraient infiniment précis, répéter un grand nombre de fois la même mesure donnerait toujours des résultats qui présenteraient une dispersion Δx et Δp_x.*

Exercice C2 : Bras automatisé d'un robot

Considérons le bras automatisé d'un robot chargé d'enfoncer une pièce dans une autre.

- Masse de la pièce : $m = 10\,\mathrm{g}$;
- Position finale de la pièce : doit être précise à mieux que $\Delta x = 0{,}1\,\mathrm{mm}$;
- Vitesse de la pièce au moment où elle est enfoncée : inférieure à $\Delta v = 1\,\mathrm{mm \cdot s^{-1}}$.

La précision du robot est-elle limitée par la physique quantique ?

Espace 8

Exercice C3 : Piégeage d'atomes

Par des techniques de refroidissement laser et confinement magnétique, on peut piéger un nuage d'atomes de sodium.

- Masse d'un atome de sodium : $m = 4 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$;
- En étudiant les positions des atomes du nuage, on mesure une dispersion $\Delta x \sim 3\,\mathrm{\mu m}$;
- En étudiant les vitesses de ces atomes, on mesure une dispersion $\Delta v \sim 2\,\mathrm{mm \cdot s^{-1}}$.

Peut-on améliorer le piégeage en gardant la même dispersion des vitesses ?

Espace 9

- **« Égalité » d'Heisenberg pour un système quantique**

Il s'agit de renverser l'interprétation faite dans les exemples précédents : si un système est quantique, alors les indéterminations de position et quantité de mouvement sont proches de la limite d'Heisenberg.

Si le comportement d'une particule est quantique, alors

$$\Delta x \times p \simeq \hbar$$

Le système est à la limite de l'inégalité d'Heisenberg.

On assimile $\Delta p_x \simeq p = ||\vec{p}||$ car la projection p_x du vecteur quantité de mouvement peut prendre toutes les valeurs entre $-p$ et p, ce qui entraîne donc une dispersion de l'ordre de p.

Espace 10

- **Inégalité d'Heisenberg et diffraction**

☕ *Analyse du document 3 sur la diffraction d'électrons.*

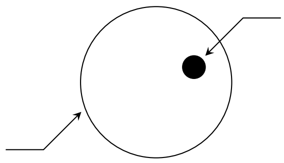
La diffraction des ondes de matière, en l'occurence des électrons, peut s'interpréter à partir de l'inégalité d'Heisenberg. Ces phénomènes sont liés.

III - Particule quantique confinée

Une particule est dite **confinée** lorsqu'elle est contrainte de rester dans une région restreinte de l'espace.

Origine physique du confinement : forces qui s'exercent sur la particule, qu'on peut également interpréter en termes d'énergie potentielle.

▷ ou bien des forces répulsives viennent de l'extérieur, l'énergie potentielle est minimale au centre de la zone de confinement. Exemple :



▷ ou bien des forces attractives retiennent la particule, l'énergie potentielle est à nouveau minimale au centre de la zone de confinement. Exemple : bille dans une cuvette type saladier ou électron autour d'un atome.

III.1 - Une particule confinée ne peut pas être immobile

- **Vitesse minimale de confinement**

Si l'on mesure les positions de la particule le long d'un axe x, la dispersion Δx est nécessairement inférieure à la taille a de la zone de confinement. D'après le principe d'Heisenberg,

$$p \geq \frac{\hbar}{\Delta x} \geq \frac{\hbar}{a} \qquad \text{soit} \qquad v \geq \frac{\hbar}{m\,a}$$

Espace 11

Exercice C4 : Confinement d'une bille dans un bol

Considérons une bille de masse $m = 10\,\mathrm{g}$ placée dans un bol de rayon $a = 5\,\mathrm{cm}$. Estimer sa vitesse minimale due au confinement dans le bol, puis le temps nécessaire à la bille pour parcourir 1 mm à cette vitesse. Commenter.

Espace 12

- **Énergie minimale**

Conventionnellement, on considère presque toujours que l'énergie potentielle minimale est nulle dans la zone de confinement. Ainsi, l'énergie totale minimale est égale à l'énergie cinétique minimale de la particule,

$$E_\mathrm{c} \geq \frac{1}{2} m v_\mathrm{min}^2 \simeq \frac{1}{2} m \frac{\hbar^2}{m^2\,a^2} \simeq \frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

L'expression n'est pas à retenir, mais il faut savoir la retrouver.

Espace 13

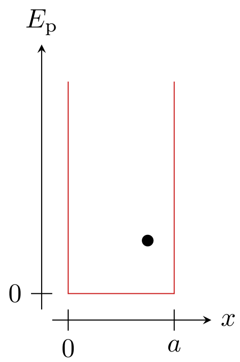
Exercice C5 : Confinement d'un électron dans un atome

Estimer la vitesse minimale d'un électron dans un atome. En déduire son énergie cinétique minimale.

Espace 14

> ***Remarque :*** *Bien que très qualitatif, ce constat est relié au fait qu'une transformation nucléaire libère plus d'énergie qu'une transformation chimique qui libère elle-même plus d'énergie qu'une transition de phase, cf. chapitre introductif AM0 : le confinement est plus poussé dans le noyau que dans une molécule qu'entre plusieurs molécules d'une même phase.*

III.2 - Confinement et quantification de l'énergie



Considérons le modèle de confinement le plus simple possible : la particule est supposée piégée dans un puits carré infini de largeur a compris entre $x = 0$ et $x = a$. L'hypothèse de puits infini signifie concrètement que la particule ne peut pas en sortir, le fait qu'il soit carré que l'énergie potentielle est constante dans le puits.

Si la particule peut être décrite classiquement : On la place dans le puits avec une certaine vitesse (donc une certaine énergie cinétique). Tant que les frottements sont négligeables, elle parcourt des allers-retours dans le puits en rebondissant sur les côtés car elle ne peut pas sortir du puits.

Si la particule doit être décrite quantiquement : Cela sous-entend donc que $\lambda = h/p \sim a$. Il faut raisonner en termes ondulatoires.

▷ Traduction ondulatoire de « la particule fait des allers-retours » :

Espace 15

▷ Traduction ondulatoire de « la particule ne peut pas sortir du puits » :

Espace 16

Conclusion :

Espace 17

Cette expression n'est pas à retenir mais il faut savoir la retrouver.

Généralisation : la longueur d'onde de de Bröglie d'une particule quantique confinée ne peut prendre que certaines valeurs discrètes, repérées par un entier n.

Cette quantification de la longueur d'onde a également des conséquences énergétiques. Calculons d'abord la quantité de mouvement, qui est aussi quantifiée, puisque

$$p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{nh}{2a}\,.$$

Calculons maintenant l'énergie cinétique de la particule,

Espace 18

Cette expression est qualitative et n'est pas à retenir, seule la conclusion qui suit l'est.

> **Remarque :** *On retrouve la phénoménologie discutée au paragraphe précédent, en particulier le fait que l'énergie est d'autant plus élevée que la particule est confinée. En revanche, on peut constater que les deux expressions de l'énergie minimale (ici $n = 1$) ne sont pas égales. Cela est dû au caractère qualitatif des raisonnements menés.*

Conclusion importante : et à retenir !

Espace 19

Le niveau de plus basse énergie est appelé **niveau fondamental**.

La quantification a une double origine :
- ▷ quantique : elle vient du caractère ondulatoire ;
- ▷ confinement : elle vient des conditions aux limites aux bords du puits.

La donnée de l'énergie E_n et de la fonction d'onde ψ_n associée définit l'**état quantique** de la particule.
L'entier n est qualifié de **nombre quantique**.