

# Dualité onde-corpuscule et quantification de l'énergie

## Exercices

### Exercice 1 : Expérience de Shimizu, Shimizu, et Takuma

[◆◆◆]

Cet exercice est basé sur l'article « Double-slit interference with ultracold metastable neon atoms », publié dans *Physical Review A* le 1<sup>er</sup> juillet 1992 par les physiciens japonais F. Shimizu, K. Shimizu et H. Takuma. Ils ont réalisé une expérience d'interférences avec des atomes de néon dans un dispositif de fentes d'Young représenté figure 1 ci-dessous.

Un nuage de quelques millions d'atomes de néon est d'abord capturé dans une cellule à vide (« vacuum enclosure ») puis refroidi à 2,5 mK dans un piège laser (« trap »). La taille du piège est de l'ordre de 1 mm. Les lasers formant le piège sont alors éteints, ce qui libère les atomes sans vitesse initiale. On peut alors les considérer en chute libre. Le piège est situé  $d = 76$  mm au dessus de deux fentes séparées d'une distance  $a = 6 \mu\text{m}$  (« double slit »). La largeur d'une fente est de  $2 \mu\text{m}$ . Un écran MCP (« microchannel plate detector ») est placé à une distance  $D = 113$  mm sous la double fente et détecte les atomes de Néon avec une résolution de l'ordre de  $20 \mu\text{m}$ .

L'écran MCP enregistre l'impact de chaque atome, un impact étant représenté par un point sur la figure 2 ci-dessous. Ces impacts se distribuent suivant un système de franges semblable à celui obtenu dans le cas des interférences lumineuses : des zones sombres (beaucoup d'impacts donc flux d'atomes intense), parallèles à la direction des fentes, alternent avec des zones claires (peu ou pas d'impacts donc flux d'atomes faible).

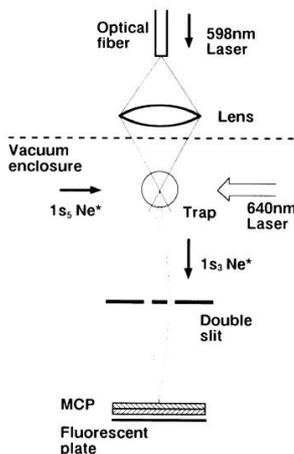


FIG. 1. Schematic experimental configuration. Details of the trap are not shown.



FIG. 2. The interference fringe pattern on the MCP for atoms with the initial velocity of approximately zero. The vertical length of the slit image is 2.8 mm. The spatial resolution of the picture is 20 and  $32 \mu\text{m}$  for the horizontal and vertical directions, respectively. The narrowing of the fringe separation on the upper part is due to the damage of the double-slit structure. This figure contains approximately  $6 \times 10^3$  atomic counts.

Données :

- ▷ Masse molaire du néon :  $M = 20 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- ▷ La distance séparant deux franges de même type est appelée interfrange  $i$  et dans le cas d'une expérience de fentes d'Young, elle est reliée à la longueur d'onde par

$$i = \frac{\lambda D}{a}$$

1 - Comment se manifestent respectivement les caractères corpusculaire et ondulatoire des atomes de néon dans cette expérience ?

2 - En admettant que les atomes se comportent indépendamment les uns des autres, expliquer ce qu'il advient d'un atome de néon lors de sa traversée du dispositif.

3 - Estimer l'ordre de grandeur de la longueur d'onde  $\lambda$  des atomes de néon dans ce dispositif interférentiel.

4 - En déduire un ordre de grandeur de la vitesse  $v$  des atomes de néon au cours de leur chute. Comparer à la vitesse d'un solide après une chute libre sans vitesse initiale de hauteur  $h$  qui vaut  $v = \sqrt{2gh}$ , où  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

**Exercice 2 : Taille de l'atome d'hydrogène**

[◆◆◆]

L'objectif de cet exercice est d'estimer l'ordre de grandeur de la taille de l'atome d'hydrogène par une modélisation semi-quantique, et par la même de comprendre comment la mécanique quantique permet d'expliquer la stabilité des atomes. Rappelons que le noyau de l'atome d'hydrogène est constitué d'un seul proton autour duquel « gravite » un électron sur une « orbite » de rayon  $a$ .

*Données :* masse de l'électron  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg, charge élémentaire  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C, constante de Planck réduite  $\hbar = 1,1 \cdot 10^{-34}$  J · s, permittivité diélectrique du vide  $\varepsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12}$  F · m<sup>-1</sup>.

**1** - En admettant que l'électron de l'atome d'hydrogène doit être décrit par la mécanique quantique, donner l'ordre de grandeur de sa quantité de mouvement en fonction du rayon  $a$ .

**2** - L'énergie totale de l'électron s'écrit sous la forme

$$E = \frac{\hbar^2}{2ma^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

Interpréter chacun des termes.

**3** - Estimer l'ordre de grandeur de la taille  $a$  de l'atome, sachant qu'elle est telle que l'énergie de l'électron soit minimale.

**4** - Une modélisation classique indique que l'électron en orbite circulaire à une distance  $a$  du proton a pour énergie mécanique

$$E_{\text{class}} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

En outre, l'électron perd de l'énergie par émission d'une onde électromagnétique. Expliquer alors en quoi la mécanique quantique est à l'origine de la stabilité des atomes.

**Exercice 3 : Électron dans une boîte quantique de semi-conducteur**

[◆◆◆]

Considérons un électron dans une hétérojonction entre deux semi-conducteurs, formant une boîte quantique de largeur de l'ordre de  $\ell = 1$  μm. Modélisons-la par un puits infini compris entre les plans  $x = 0$  et  $x = \ell$ . La fonction d'onde de l'électron dans le puits est donnée par

$$\psi(x, t) = A \sin(kx) e^{i\omega t},$$

où  $A$ ,  $k$  et  $\omega$  sont des constantes réelles positives et  $i$  le nombre complexe tel que  $i^2 = -1$ .

**1** - Déterminer les valeurs possibles de  $k$  en fonction de  $\ell$  et d'un entier positif  $n$ .

**2** - La probabilité de trouver l'électron à un instant  $t$  dans un intervalle  $[x, x + dx]$  vaut  $|\psi(x, t)|^2 dx$ .

**2.a** - Montrer que cela implique que la fonction d'onde doit respecter à tout instant la condition

$$\int_0^\ell |\psi(x, t)|^2 dx = 1.$$

**2.b** - En déduire la dimension de la fonction d'onde.

**2.c** - Utiliser cette condition de normalisation pour exprimer  $A$  en fonction de  $\ell$ .

**3** - Tracer  $|\psi(x, t)|^2$  pour  $n = 1$ ,  $n = 2$  et  $n \gg 1$ . Commenter, et comparer au cas d'une particule classique.

# Dualité onde-corpuscule et quantification de l'énergie

## Exercices

### Exercice 1 : Expérience de Shimizu, Shimizu, et Takuma

1 Le caractère corpusculaire se manifeste **lors de la détection des atomes** : chaque atome produit un impact ponctuel, comme le ferait une particule classique. L'aspect ondulatoire se manifeste lui **dans la répartition des différents impacts sur l'écran**, qui forme une figure d'interférences caractéristique d'un phénomène ondulatoire.

2 L'atome de néon est en chute libre, ce qui impose qu'il se déplace vers le bas, mais se propage dans le dispositif comme une onde. En particulier, il passe par les deux fentes à la fois, les deux ondes issues des deux fentes interférant ensuite. Enfin, lorsque l'atome de néon arrive au niveau de l'écran, son comportement redevient de type corpusculaire et il est détecté en un seul point de l'écran. La probabilité de détecter l'atome en un point est donnée par l'aspect ondulatoire, et redonne en moyenne la figure d'interférences.

3 D'après la relation donnée,

$$\lambda = \frac{ia}{D}$$

D'après les données de l'énoncé,  $a = 6 \mu\text{m}$  et  $D = 113 \text{mm}$ . On lit sur la figure 2 (sur *le bas* de la figure 2, la légende précisant que le dispositif est défectueux sur ce qui donne la partie haute) la valeur de l'interfrange  $i = 0,2 \text{mm}$ . Finalement,

$$\lambda = 1 \cdot 10^{-8} \text{m}.$$

4 La relation de de Bröglie permet de relier la longueur d'onde  $\lambda$  à la quantité de mouvement  $p = mv$  par

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad \text{soit} \quad v = \frac{h}{\lambda m}$$

En utilisant la masse molaire pour déterminer la masse d'un atome de néon, on trouve

$$v = \frac{hN_A}{\lambda M} = 2 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

5 La chute libre se fait sur une hauteur  $D + d \sim 200 \text{mm}$ , ce qui donne comme vitesse théorique de chute libre

$$v_{\text{th}} \sim 2 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Ainsi, la longueur d'onde calculée s'interprète bien en raisonnant sur une particule en chute libre : c'est une autre signature de la dualité onde-corpuscule.

### Exercice 2 : Taille de l'atome d'hydrogène

1 Qualitativement, l'électron de l'atome d'hydrogène est localisé avec une indétermination de l'ordre du rayon atomique  $a$ . Comme il doit être décrit par la mécanique quantique, l'inégalité d'Heisenberg est proche de la limite, donc

$$pa \simeq \hbar \quad \text{soit} \quad mva \simeq \hbar \quad \text{donc} \quad v \simeq \frac{\hbar}{ma}.$$

2 L'énergie mécanique de l'électron s'écrit comme la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle. L'énergie cinétique vaut

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{\hbar^2}{2ma^2},$$

ce qui correspond au premier terme. Le second terme est l'énergie potentielle électrique d'interaction entre le proton (charge  $+e$ ) et l'électron (charge  $-e$ ) séparés d'une distance  $a$ .

**3** Lorsque  $a$  augmente, l'énergie cinétique diminue alors que l'énergie potentielle augmente (il y a un signe  $-$ ). Il est donc probable qu'il y ait une valeur du rayon atomique  $a$  où la somme est minimale. On cherche donc cette valeur en calculant

$$\frac{dE}{da} = \frac{\hbar^2}{2m} \times \left(-\frac{2}{a^3}\right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \times \left(-\frac{1}{a^2}\right) = -\frac{\hbar^2}{ma^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}.$$

Cherchons la valeur  $a_0$  du minimum, c'est-à-dire la valeur de  $a$  qui annule la dérivée, telle que

$$-\frac{\hbar^2}{ma^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{\hbar^2}{ma^3} \quad \text{d'où} \quad \frac{4\pi\epsilon_0 a^2}{e^2} = \frac{ma^3}{\hbar^2}.$$

Finalement,

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = 53 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 53 \text{ pm}.$$

**4** D'après cette modélisation purement classique, l'énergie de l'électron est d'autant plus petite qu'il s'approche du proton. Ainsi, partant d'une quantité d'énergie donnée, il en perdrait par émission d'onde électromagnétique, s'approcherait du noyau, et finirait par s'y écraser. D'après ce modèle, un atome est instable et toute la matière devrait imploser en se contractant sur elle-même. D'après le modèle semi-quantique abordé dans l'exercice, l'origine du non-effondrement est l'énergie cinétique donc la forme s'obtient par le principe d'Heisenberg, ce qui explique pourquoi on peut raisonnablement dire que les atomes sont stables « grâce à » la mécanique quantique.

### Exercice 3 : Électron dans une boîte quantique de semi-conducteur

**1** La fonction d'onde est nulle hors du puits (l'électron ne peut pas en sortir), et par continuité elle est nulle aux deux extrémités du puits,

$$\forall t, \quad \psi(0, t) = \psi(\ell, t) = 0.$$

Explicitions la nullité en  $x = \ell$ ,

$$\psi(\ell, t) = A \sin(k\ell) e^{i\omega t} = 0$$

ce qui n'est possible que si  $k\ell = n\pi$  avec  $n$  entier, d'où

$$k = \frac{n\pi}{\ell}.$$

**2.a** Il y a par hypothèse un électron dans la boîte quantique, donc la probabilité de le trouver quelque part dans la boîte (c'est-à-dire pour  $0 \leq x \leq \ell$ ) vaut 1. Comme cette probabilité est la somme des probabilités de le trouver dans chaque intervalle de longueur  $dx$  de la boîte, on en déduit la condition cherchée,

$$\int_0^\ell |\psi(x, t)|^2 dx = 1.$$

**2.b** Une probabilité est sans dimension, donc

$$\left[ |\psi(x, t)|^2 dx \right] = 1 \quad \text{soit} \quad [\psi]^2 \times L = 1 \quad \text{d'où} \quad [\psi] = L^{-1/2}.$$

La fonction d'onde a la dimension de l'inverse de la racine carrée d'une longueur.

**2.c** En utilisant l'expression donnée de  $\psi$  et la condition de normalisation,

$$A_n^2 \int_0^\ell \sin^2(k_n x) dx = 1.$$

Ainsi,

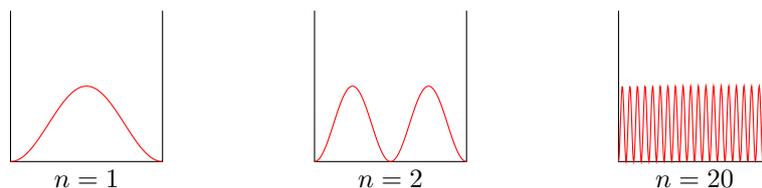
$$A_n^2 \int_0^\ell \frac{1}{2} [1 - \cos(2k_n x)] dx = 1 \quad \text{d'où} \quad \frac{A_n^2 \ell}{2} - \frac{A_n^2}{2} \left[ \frac{1}{2k_n} \sin(2k_n x) \right]_0^\ell = 1$$

Comme  $\sin(2k_n\ell) = 0$ , on trouve enfin

$$A_n = A = \sqrt{\frac{2}{\ell}}.$$

Remarquons que l'amplitude  $A$  ne dépend finalement pas de la valeur de  $n$ .

**3** La figure 2 représente l'allure de  $|\psi(x,t)|^2$ , c'est-à-dire de la densité de probabilité de présence, pour  $n = 1$ ,  $n = 2$  et  $n = 20$ . Une particule classique pourrait être détectée n'importe où dans la boîte avec la même probabilité. **C'est très différent dans le cas de la particule quantique**, en particulier dans les états  $n = 1$  et  $n = 2$ . Le cas  $n = 20$  s'approche davantage d'une densité de probabilité homogène dans la boîte, et permet de « deviner » que **le comportement classique se retrouve lorsque  $n \rightarrow \infty$** .



**Figure 2 – Tracé de  $|\psi_n(x,t)|^2$  pour  $n = 1, 2$  et  $20$ .**