BLAISE PASCAL
PT 2020-2021

TD 3 – Mécanique des fluides *Correction*

Bilans d'énergie des écoulements en conduite

Exercice 1 : Écritures du théorème de Bernoulli

1 | 0 |

▷ *Homogénéité.*

1 Vrai, homogène à une énergie massique.

2 Faux : gz est une énergie massique mais $\frac{1}{2}\rho v^2$ une énergie volumique.

3 Faux : p/ρ et Δp dans la même équation.

4 Vrai, homogène à une puissance.

5 Vrai, homogène à une énergie massique.

6 Faux, z est une hauteur mais évidemment pas v^2.

7 Faux, membre de gauche homogène à une puissance et membre de droite à une énergie massique.

8 Vrai, homogène à une hauteur.

9 Faux : l'équation est homogène, mais la perte de charge traduit une dissipation et il manque donc le signe $-$.

10 Vrai, homogène à une puissance.

11 Vrai, homogène à une pression (ou une énergie volumique).

Exercice 2 : Débitmètre de Venturi

1 | 1

▷ *Écoulement parfait.*

1 L'écoulement étant incompressible,

$$D_V = v_1 S_1 = v_2 S_2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 > v_1\,.}$$

En négligeant les pertes de charge et en supposant le débitmètre horizontal, le théorème de Bernoulli donne

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}\,,$$

on a donc $p_2 < p_1$ et donc

$$\boxed{\Delta p > 0\,.}$$

2 En remplaçant les vitesses $v_{1,2}$ par $D_V/S_{1,2}$ on obtient en réécrivant le théorème de Bernoulli

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \frac{D_V^2}{2S_2^2} - \frac{D_V^2}{2S_1^2} \qquad \text{soit} \qquad \frac{D_V^2}{2}\left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right) = \frac{\Delta p}{\rho}$$

et finalement

$$\boxed{D_V = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho\left(\dfrac{1}{S_2^2} - \dfrac{1}{S_2^2}\right)}}\,.}$$

Exercice 3 : Fourche hydraulique　2 | 1

▷ *Système à plusieurs sorties ;*
▷ *Écoulement parfait.*

D'après la conservation du débit volumique,

$$D_{\text{v}0} = D_{\text{v}1} + D_{\text{v}2} \qquad \text{soit} \qquad S_0 v_0 = S_1 v_1 + S_2 v_2 \qquad \text{donc} \qquad 2v_0 = v_1 + v_2\,. \tag{1}$$

Appliquons maintenant le théorème de Bernoulli aux deux lignes de courant représentées figure 1. On prend l'origine des altitudes au centre de la conduite d'entrée, si bien que les conduites de sortie sont aux altitudes $\pm h/2$.

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{{v_0}^2}{2} + 0 = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + \frac{{v_1}^2}{2} + \frac{gh}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{P_0}{\rho} + \frac{{v_0}^2}{2} + 0 = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + \frac{{v_2}^2}{2} - \frac{gh}{2}$$

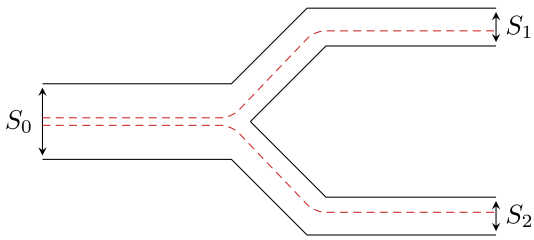

Figure 1 – Deux lignes de courant.

La pression d'entrée P_0 étant inconnue, on soustrait ces deux relations pour obtenir

$$\frac{{v_1}^2}{2} + \frac{gh}{2} - \frac{{v_2}^2}{2} + \frac{gh}{2} = 0 \qquad \text{soit} \qquad {v_2}^2 - {v_1}^2 = 2gh\,. \tag{2}$$

Pour faciliter la résolution, il est malin d'écrire la relation (2) sous la forme

$$(v_2 - v_1)(v_2 + v_1) = 2gh$$

car alors la relation (1) donne

$$(v_2 - v_1) \times 2v_0 = 2gh \qquad \text{soit} \qquad v_2 - v_1 = \frac{gh}{v_0}\,.$$

La somme et la différence donnent alors

$$\boxed{v_1 = \left(1 - \frac{gh}{2{v_0}^2}\right) v_0 \qquad \text{et} \qquad v_2 = \left(1 + \frac{gh}{2{v_0}^2}\right) v_0\,.}$$

Exercice 4 : Formule de Torricelli　2 | 2 |

▷ *Écoulement parfait ;*
▷ *Conservation du volume ;*
▷ *Intégration par séparation de variables.*

> *« Approximation de régime quasi-permanent » signifie que la hauteur d'eau dans le réservoir varie suffisamment lentement pour pouvoir appliquer toutes les relations du régime permanent (conservation du débit, Bernoulli, etc.)*

1 L'eau étant un fluide incompressible, on a par conservation du débit volumique

$$D_V = S\,v_A = s\,v_B \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v_B = \frac{S}{s} v_A \gg v_A\,.}$$

2 Appliquons le théorème de Bernoulli entre la surface libre du réservoir et la sortie de l'orifice (on pourrait tout aussi bien dire « sur la ligne de courant allant de A à B »), évidemment sans puissance indiquée et en négligeant les pertes de charge,

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gH = \frac{P_\text{atm}}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{P_\text{atm}}{\rho} + 0 + gH = \frac{P_\text{atm}}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + 0$$

car la pression dans un jet libre est égale à la pression atmosphérique. On en déduit

$$v_B^2 = 2gH$$

et ainsi le débit volumique

$$\boxed{D_V = s\sqrt{2gH}\,.}$$

3 Le volume d'eau dV sortant du réservoir pendant dt vaut

$$\mathrm{d}V = D_V\,\mathrm{d}t = S\,[H(t) - H(t+\mathrm{d}t)] \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{s\sqrt{2gH} = -S\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\,.}$$

4 Une telle équation s'intègre par séparation des variables,

$$\frac{\mathrm{d}H}{\sqrt{H}} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}\mathrm{d}t \qquad \text{soit} \qquad \int_{H_0}^{0} \frac{\mathrm{d}H}{\sqrt{H}} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}\int_0^T \mathrm{d}t$$

ce qui donne

$$0 - 2\sqrt{H_0} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}(T-0)$$

et ainsi

$$\boxed{T = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2H_0}{g}}\,.}$$

5 Le modèle utilisé ne tient pas compte des pertes de charge, qui peuvent être importantes, et tout particulièrement la **perte de charge singulière au niveau de l'orifice**.

Exercice 5 : Vase de Mariotte

oral banque PT | 2 | 3

- *Écoulement parfait ;*
- *Conservation de la masse ;*
- *Intégration par séparation de variables.*

1 Entre deux points A et B situés sur une même ligne de courant d'un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène, il y a conservation de la charge hydraulique

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A = \frac{P_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + gz_B\,.$$

2 Notons $h_1(t)$ la hauteur d'eau à l'instant t dans le réservoir. Raisonnons sur la ligne de courant AB de la figure 2. D'après la relation de Bernoulli,

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gh_1 = \frac{P_0}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + 0\,.$$

L'écoulement étant incompressible,

$$v_A S = v_B s \qquad \text{soit} \qquad v_A = \frac{s}{S} v_B \ll 1$$

ce qui permet de simplifier la relation précédente et d'obtenir

$$v_B = \sqrt{2gh_1}\,,$$

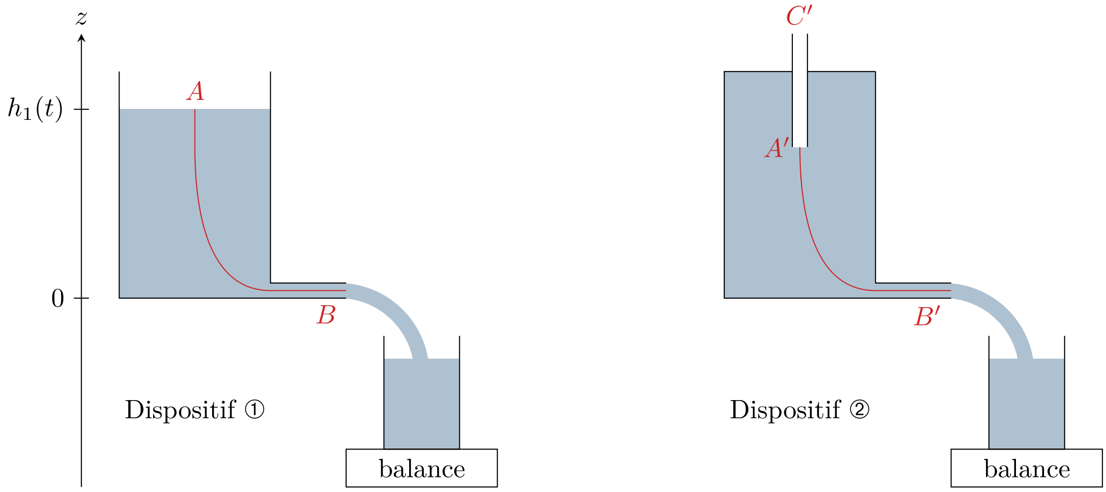

Figure 2 – Lignes de courant et notations utiles.

ce qui donne un débit

$$\boxed{D_1 = s\sqrt{2gh_1}\,.}$$

Un bilan de masse pour le bécher entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ donne

$$m_1(t + \mathrm{d}t) = m_1(t) + \rho D_1\,\mathrm{d}t \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t} = \rho s\sqrt{2gh_1}\,.$$

De plus, la conservation de la masse totale de fluide donne

$$\rho HS = \rho h_1 S + m_1 \qquad \text{d'où} \qquad h_1 = H - \frac{m_1}{\rho S}$$

Le plus simple est de résoudre d'abord l'équation différentielle sur h_1 puis d'en déduire la masse $m_1(t)$ qui s'est écoulée. L'équation différentielle s'écrit

$$-\rho S\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} = \rho s\sqrt{2gh_1} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{s}{S}\sqrt{2gh_1}\,.$$

Cette équation se résout par séparation des variables :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}h_1}{\sqrt{2gh_1}} &= -\frac{s}{S}\mathrm{d}t\\
2 \times \frac{1}{2g}\int_H^{h_1(t)} \frac{2g\,\mathrm{d}h_1}{2\sqrt{2gh_1}} &= -\frac{s}{S}\int_0^t \mathrm{d}t\\
\frac{1}{g}\left[\sqrt{2gh_1}\right]_H^{h_1(t)} &= -\frac{s}{S}t\\
\sqrt{2gh_1} - \sqrt{2gH} &= -\frac{s}{S}gt\\
\sqrt{h_1} &= \sqrt{H} - \frac{s}{S}\sqrt{\frac{g}{2}}t\\
h_1(t) &= H - \frac{s}{S}\sqrt{2gH}t + \frac{s^2}{S^2}\frac{g}{2}t^2
\end{aligned}$$

ce qui permet d'en déduire la masse,

$$m_1 = \rho S(H - h_1) \qquad \text{soit} \qquad m_1(t) = \rho S \times \left(\frac{s}{S}\sqrt{2gH}t - \frac{s^2}{S^2}\frac{g}{2}t^2\right)$$

et enfin

$$\boxed{m_1(t) = \rho s\sqrt{2gH}t - \frac{\rho s^2}{S}\frac{g}{2}t^2\,.}$$

3 Qualitativement, de l'air peut toujours pénétrer dans le haut du réservoir si bien que l'eau continue à s'écouler en étant remplacée par l'air qui entre par le tuyau. D'après la relation de Bernoulli appliquée entre le haut (point C')

et le bas de l'arrivée d'air (point A'), sachant que la conservation du débit d'air impose $v_{A'} = v_{C'}$:

$$\frac{P_{\text{atm}}}{\rho_{\text{air}}} + g z_{C'} = \frac{P_{A'}}{\rho_{\text{air}}} + g z_{A'} \qquad \text{soit} \qquad P_{A'} = P_{\text{atm}} + \rho_{\text{air}} g (z_{C'} - z_{A'})\,.$$

Sachant que $\rho_{\text{air}} \sim 1\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, pour $z_{C'} - z_{A'} \sim 10\,\text{cm}$, on a $\rho_{\text{air}} g(z_{C'} - z_{A'}) \sim 1\,\text{Pa}$, ce qui est négligeable devant $P_{\text{atm}} = 10^5\,\text{Pa}$.

4 Notons $z_{A'} = h_0$. En appliquant la relation de Bernoulli sur la ligne de courant $A'B'$, et en la simplifiant comme à la question précédente, on obtient

$$D_2 = s\sqrt{2gh_0} = \text{cte} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\text{d}m_2}{\text{d}t} = \rho s \sqrt{2gh_0}$$

et une intégration qui est, cette fois-ci, immédiate donne

$$\boxed{m_2(t) = \underbrace{\rho s \sqrt{2gh_0}}_{=a}\, t\,.}$$

5 Lorsque le bas de l'arrivée d'air est émergée, la ligne de courant $A'B'$ n'existe plus et le raisonnement précédent n'est plus valide. La situation devient analogue au dispositif ①, où c'est la surface libre de l'eau qui est à la pression atmosphérique, et on retrouve une évolution de la masse contenue dans le bécher du même type que $m_1(t)$.

Exercice 6 : Sonde de Pitot moyennée 3 | 1

- ▷ *Analyse d'un document vidéo ;*
- ▷ *Écoulement parfait ;*
- ▷ *Théorème de Bernoulli dans un écoulement externe.*

1 Les sondes de Pitot moyennées présentées dans la vidéo sont des systèmes sensibles, qui perturbent peu l'écoulement car elles sont de petite taille et qui peuvent fonctionner dans les deux sens d'écoulement.

2 Voir figure 3.

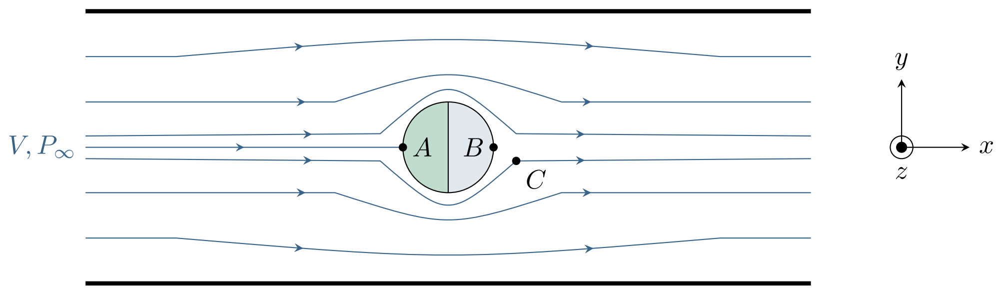

Figure 3 – Lignes de courant autour de la sonde de Pitot.

3 Raisonnons par symétrie. Le tracé des lignes de courant laisse penser que pour toute ligne de courant passant par la gauche de la sonde, il en existe une symétrique passant par la droite. Par conséquent, la ligne de courant correspondant à l'axe de la conduite arrive au point A de manière orthogonale à la sonde. Or en régime stationnaire, il n'y a pas/plus de fluide qui entre ni sort de la sonde (pas de communication entre les deux côtés de la membrane). Par conséquent, la vitesse v_A est nécessairement nulle.

> *L'argument sur la direction de la vitesse est important : une vitesse non nulle mais tangente à la sonde serait également compatible avec le fait qu'aucun fluide ne pénètre dans la sonde.*

D'après le théorème de Bernoulli appliqué à la ligne de courant centrale,

$$\frac{P_\infty}{\rho} + \frac{V^2}{2} + g z_A = \frac{P_A}{\rho} + \frac{0^2}{2} + g z_A \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P_A = P_\infty + \frac{1}{2}\rho V^2\,.}$$

4 Le même argument qu'à la question précédente montre que $v_B = 0$ ... mais cette fois il n'y a pas de ligne de courant partant du point B. Sans équation locale de la mécanique des fluides, on ne peut que raisonner qualitativement : on fait donc l'hypothèse que la sonde perturbe peu l'écoulement, si bien que sur les lignes de courants très proches de B (p.ex. au point C), la vitesse est approximativement égale à V et la pression à P_∞. Or si le fluide est immobile en B, c'est que les forces qu'il y subit s'équilibre, ce qui permet de conclure que $P_B \simeq P_C \simeq P_\infty$.

5 Comme les effets d'altitude sont négligés, alors la pression est uniforme dans les deux compartiments de la sonde. La membrane, de surface S, subit :

- ▷ la force de pression côté dynamique, $\overrightarrow{F}_\text{dyn} = +P_A\,S\,\overrightarrow{e}_x$;
- ▷ la force de pression côté statique, $\overrightarrow{F}_\text{stat} = -P_B\,S\,\overrightarrow{e}_x$;
- ▷ la force de rappel élastique, $\overrightarrow{f} = -kx\,\overrightarrow{e}_x$.

Lorsque l'équilibre de la membrane est atteint,

$$\boxed{\overrightarrow{F}_\text{dyn} + \overrightarrow{F}_\text{stat} + \overrightarrow{f} = \overrightarrow{0}\,.}$$

6 En projetant cette relation et en remplaçant les pressions,

$$\begin{aligned}
P_A\,S - P_B\,S - kx &= 0\\
\left(P_\infty + \frac{1}{2}\rho V^2 - P_\infty\right) S - kx &= 0\\
\frac{1}{2}\rho S V^2 &= kx\\
\boxed{V = \sqrt{\frac{2kx}{\rho S}}}&
\end{aligned}$$

Exercice 7 : Château d'eau

écrit PT 2015 | 2 | 1

- ▷ *Pertes de charge ;*
- ▷ *Prise de pression hydrostatique (tubes piézométriques) ;*
- ▷ *Puissance indiquée.*

Tout au long de l'exercice, on raisonne implicitement mais comme presque toujours sur des vitesses débitantes.

1 Notons v_0 la vitesse au niveau de la surface libre et v celle dans la canalisation. L'eau étant incompressible, il y a conservation du débit volumique, d'où on déduit

$$D_V \underbrace{=}_{\text{surf libre}} S_0 v_0 \underbrace{=}_{\text{canalisation}} sv \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{v_0}{v} = \frac{s}{S_0} \ll 1\,.}$$

2 Supposons de plus l'écoulement stationnaire et parfait. D'après le théorème de Bernoulli,

$$\left(\frac{P_\text{atm}}{\rho} + \frac{v^2}{2} + 0\right) - \left(\frac{P_\text{atm}}{\rho} + 0 + gH\right) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v = \sqrt{2gH} = 20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,,}$$

en considérant que la pression dans le jet libre est égale à la pression atmosphérique P_atm.

3 En interprétant la vitesse précédente comme la vitesse débitante,

$$\boxed{D_V = v\,s = 20\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3\cdot s^{-1}} = 20\,\mathrm{L\cdot s^{-1}}\,.}$$

4 Une perte de charge régulière décrit une dissipation d'énergie mécanique du fluide par viscosité répartie tout au long d'un écoulement. Choisissons d'écrire cette constante K comme étant homogène à une hauteur. Le théorème de Bernoulli écrit entre le haut du chateau d'eau et la sortie de la canalisation devient

$$\left(\frac{P_\text{atm}}{g\rho} + \frac{v^2}{2g} + 0\right) - \left(\frac{P_\text{atm}}{\rho g} + 0 + H\right) = -K\,.$$

> *L'énoncé n'est pas clair ... Une perte de charge peut s'exprimer indifféremment comme une pression ou comme une hauteur : ici K est homogène à une hauteur, mais on peut également l'écrire $K' = K/\rho g$ où K' est une pression. Seule certitude, on n'exprime jamais la perte de charge comme une énergie massique : même si c'est tentant, il vaut sans doute mieux ne peut pas simplement écrire $-K$ dans le membre de droite du théorème de Bernoulli.*

5 Le fluide ne s'écoule pas dans les deux tubes piézométriques verticaux, on y applique donc la loi de la statique des fluides pour en déduire la pression dans la canalisation : $P = P_{\text{atm}} + \rho g h$. La conservation du débit volumique indique que la vitesse d'écoulement v est la même sous les deux prises de pression. On en déduit en appliquant la relation de Bernoulli entre le bas des deux tubes notés 1 et 2

$$\left(\frac{P_{\text{atm}} + \rho g h_2}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + 0\right) - \left(\frac{P_{\text{atm}} + \rho g h_1}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + 0\right) = -K$$

d'où

$$K = h_1 - h_2 = \Delta h\,.$$

La perte de charge linéaire k s'en déduit par $k = K/\ell$ avec $\ell = 10\,\text{m}$ la distance séparant les deux tubes,

$$\boxed{k = \frac{\Delta h}{\ell} = 2 \cdot 10^{-3}\,.}$$

> *La perte de charge par unité de longueur k est sans dimension en tant que rapport de deux longueurs.*

6 La perte de charge sur toute la longueur de canalisation vaut kL avec $L = 1{,}0\,\text{km}$. D'après la relation de Bernoulli appliquée entre la surface libre du château d'eau et le robinet,

$$\left(\frac{P_{\text{atm}}}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + 0\right) - \left(\frac{P_{\text{atm}}}{\rho g} + 0 + H\right) = -kL \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v = \sqrt{2g\,(H - kL)} = 18{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\,.}$$

> *Comme c'est la pression qui est imposée aux deux extrémités de la conduite (pression atmosphérique) mais que rien ne contraint le débit volumique, c'est lui qui est modifié par la perte de charge. On ne peut donc plus utiliser la valeur précédente pour calculer la vitesse.*

7 La perte de charge kL est l'énergie massique perdue par perte de charge, qu'il faut donc compenser par une pompe de puissance

$$\mathcal{P} = D_{\text{m}} g k L \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\mathcal{P} = \rho D_V\, g\, kL = 400\,\text{W}\,.}$$

> *Ayant identifié l'énergie massique, vous devez savoir qu'il faut multiplier par D_m pour obtenir une puissance, puis savoir (ou retrouver par analyse dimensionnelle) que $D_m = \rho D_V$ pour conclure. Attention à ne pas oublier la multiplication par g !*

Exercice 8 : Alimentation d'un robinet par un récupérateur d'eau de pluie — 2 | 1

- ▷ *Pertes de charge et diagramme de Moody ;*
- ▷ *Puissance indiquée.*

L'installation est schématisée figure 4.

1 Le remplissage de l'arrosoir exige un débit volumique $Q = 0{,}5\,\text{L}\cdot\text{s}^{-1} = 5 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$. La vitesse débitante dans la conduite est donc

$$\boxed{V = \frac{Q}{\pi D^2/4} = 1{,}6\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\,.}$$

Le nombre de Reynolds de l'écoulement dans la conduite est donc

$$\boxed{Re = \frac{\mu V D}{\eta} = 3{,}2 \cdot 10^4\,.}$$

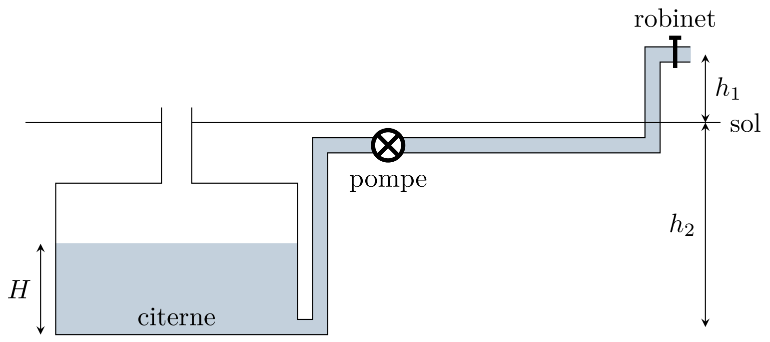

Figure 4 – Schéma de l'installation hydraulique.

2 La rugosité relative de la conduite est donnée par $\varepsilon = e/D = 1 \cdot 10^{-4}$. À partir des valeurs indiquées à droite du diagramme, on en déduit la courbe à suivre, indiquée par la flèche figure 5. On repère ensuite le point où cette courbe coupe la verticale $Re = 3 \cdot 10^4$. L'ordonnée de ce point donne la valeur du coefficient de friction,

$$\boxed{\lambda = 2{,}5 \cdot 10^{-2}\,.}$$

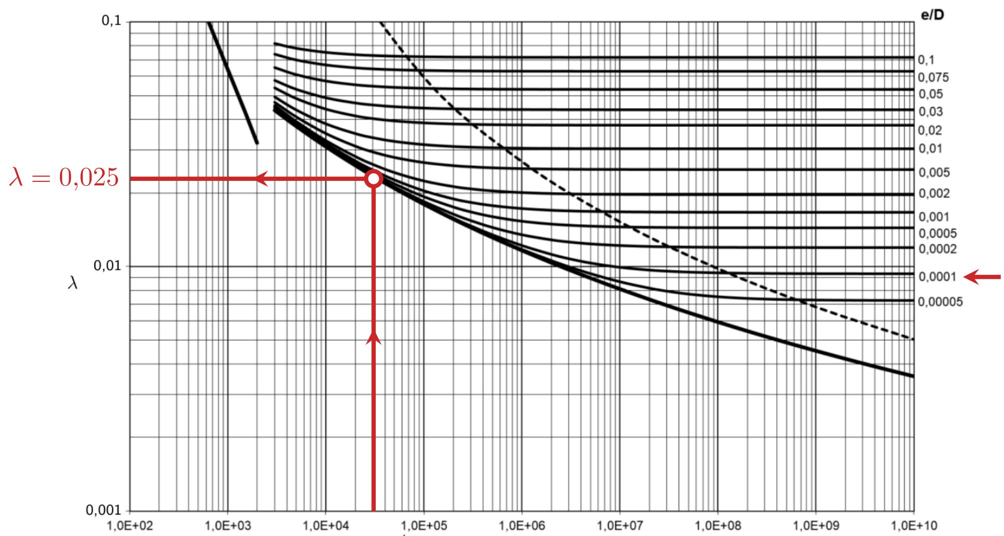

Figure 5 – Abaque de Moody complétée.

On en déduit la chute de pression,

$$\boxed{\Delta p = \lambda \frac{\mu L V^2}{2D} = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} = 2\,\mathrm{bar}\,.}$$

3 Appliquons la relation de Bernoulli entre le haut de la citerne d'eau ($P = P_{\mathrm{atm}}$, $v \simeq 0$ en la supposant très large, $z = -(h_2 - H) = H - h_2 < 0$) et la sortie du robinet ($P = P_{\mathrm{atm}}$ car jet libre, $z = h_1$). On prend bien sûr en compte la puissance indiquée $\mathcal{P}_{\mathrm{i}}$ fournie par la pompe et la perte de charge.

$$D_{\mathrm{m}}\left(\frac{P_{\mathrm{atm}}}{\mu} + \frac{V^2}{2} + g h_1\right) - D_{\mathrm{m}}\left(\frac{P_{\mathrm{atm}}}{\mu} + 0 + g(H - h_2)\right) = \mathcal{P}_{\mathrm{i}} - D_{\mathrm{m}}\frac{\Delta p}{\mu}\,.$$

> *Les facteurs D_m et μ à faire apparaître devant la perte de charge Δp se retrouvent par comparaison avec les pressions apparaissant dans le membre de gauche (qu'il faut connaître !).*

Sachant que le débit volumique est donné par $Q = D_{\mathrm{m}}/\mu$, on obtient

$$\boxed{\mathcal{P}_{\mathrm{i}} = Q\,\Delta p + \mu\, Q\,\frac{V^2}{2} + g(h_1 + h_2 - H) = 120\,\mathrm{W}\,.}$$

4 La puissance indiquée est reliée à la puissance consommée par

$$\mathcal{P}_\mathrm{i} = 0{,}6\,\mathcal{P}_\mathrm{cons} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\mathcal{P}_\mathrm{cons} = \frac{\mathcal{P}_\mathrm{i}}{0{,}6} = 200\,\mathrm{W}\,.}$$

5 Outre la perte de charge régulière, il aurait aussi fallu prendre en compte des **pertes de charges singulières** au niveau des coudes des canalisations et du robinet.

Exercice 9 : Écoulement cryogénique

oral banque PT | 2 | 2

- *Calcul de débit par intégration ;*
- *Pertes de charge ;*
- *Puissance indiquée.*

1 Les lignes de courant sont des droites, l'écoulement est donc laminaire. Le profil de vitesse dans une section est parabolique avec vitesse nulle aux parois, voir figure 6, en conséquence de la viscosité du fluide.

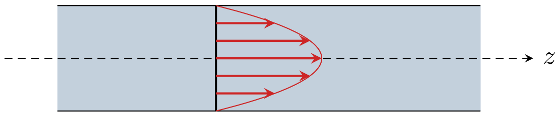

Figure 6 – Profil de vitesse dans l'écoulement.

2 Le débit massique se déduit du débit volumique par

$$\boxed{D_\mathrm{m} = \rho D_\mathrm{v} = 80\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,.}$$

Le débit massique se calcule par une intégration sur une section transverse circulaire,

$$\begin{aligned}
D_\mathrm{m} &= \iint \rho\, v(r)\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\rho\,\Delta P}{4\eta L} \times \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R (R^2 - r^2)\, r\mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi\,\rho\,\Delta P}{2\eta L} \left[R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R \\
&= \frac{\pi\,\rho\,\Delta P}{2\eta L} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{D_\mathrm{m} = \frac{\pi\,\rho\,\Delta P\,R^4}{8\eta L}\,.}$$

3 L'écoulement est permanent et incompressible. D'après le théorème de Bernoulli entre l'entrée et la sortie de la conduite, en raisonnant sur les vitesses débitantes, et en tenant compte de la perte de charge ΔP_c,

$$\left(\frac{P_\mathrm{s}}{\rho} + \frac{{v_\mathrm{s}}^2}{2} + g z_\mathrm{s}\right) - \left(\frac{P_\mathrm{e}}{\rho} + \frac{{v_\mathrm{e}}^2}{2} + g z_\mathrm{e}\right) = -\frac{\Delta P_\mathrm{c}}{\rho}\,.$$

L'écoulement étant incompressible, il y a conservation du débit volumique, et comme la conduite est de section constant alors $v_\mathrm{s} = v_\mathrm{e}$. Comme la conduite est horizontale, alors $z_\mathrm{s} = z_\mathrm{e}$. Enfin, $P_\mathrm{e} - P_\mathrm{s} = \Delta P$ par définition. Ainsi, il ne reste que

$$\boxed{\Delta P_\mathrm{c} = \Delta P\,.}$$

Si la conduite était verticale, on aurait

$$\boxed{\Delta P'_\mathrm{c} = \Delta P + \rho g (z_\mathrm{e} - z_\mathrm{s})\,.}$$

> *Le débit volumique est imposé, les pertes de charge ont donc ici un effet sur la pression au sein de l'écoulement.*

4 Pour maintenir le débit, il faut que la pompe compense exactement la perte de charge. Elle doit donc fournir une puissance

$$\mathcal{P} = D_\mathrm{m} \, \frac{\Delta P_\mathrm{c}}{\rho} = D_\mathrm{v} \, \Delta P \,.$$

Or d'après la question 2,

$$\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi \rho R^4} D_\mathrm{m} \,.$$

Comme $D_\mathrm{m} = \rho D_\mathrm{v}$, on en déduit

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{8\eta L}{\pi R^4} {D_\mathrm{v}}^2 = 7\,\mathrm{W} \,.}$$

5 On constate sur l'expression de la puissance qu'elle devient nulle si le fluide n'est pas visqueux : il n'a pas besoin que de la puissance lui soit apportée pour pouvoir s'écouler. Cela est physiquement cohérent car c'est la viscosité qui est responsable de la perte de charge que le pompe vient compenser.

> *Cependant, l'utilisation de superfluides pose bien d'autres difficulté ... à commencer par le refroidissement à des températures de l'ordre de 4 K (limite pour que l'hélium soit superfluide).*

Exercice 10 : Production d'énergie hydroélectrique — oral banque PT | 2 | 2 |

- ▷ *Puissance indiquée ;*
- ▷ *Pertes de charge.*

1 Le débit volumique représente le volume de fluide traversant une section donnée de la conduite chaque seconde, ou ici de façon équivalente le volume de fluide sortant de la conduite chaque seconde.

2 Le lac étant très grand par rapport à la conduite, on peut considérer qu'à la surface

$$v_1 \simeq 0 \,.$$

La vitesse (débitante) en sortie de la conduite se déduit du débit volumique,

$$v_2 = \frac{Q_\mathrm{vol}}{S} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v_2 = \frac{4 Q_\mathrm{vol}}{\pi D^2} = 5{,}1\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \,.}$$

3 L'écoulement est incompressible et permanent. Comme on cherche la puissance maximale disponible, on néglige les pertes de charge. La relation de Bernoulli appliquée entre la surface du lac et la sortie de la conduite donne

$$D_\mathrm{m} \left(\frac{P_\mathrm{atm}}{\rho} + \frac{{v_1}^2}{2} + g z_1 \right) - D_\mathrm{m} \left(\frac{P_\mathrm{atm}}{\rho} + \frac{{v_2}^2}{2} + g z_2 \right) = -\mathcal{P}$$

où $\mathcal{P}$ est la puissance indiquée *cédée* par le fluide à la turbine. Comme $D_\mathrm{m} = \rho \, Q_\mathrm{vol}$, on en déduit

$$\boxed{\mathcal{P} = \rho \, Q_\mathrm{vol} \left[g(z_2 - z_1) - \frac{{v_2}^2}{2} \right] = 5{,}8\,\mathrm{MW} \,.}$$

> *On peut remarquer que cette puissance ne dépend pas de la position de la turbine au sein de la conduite : elle est la même que la turbine soit proche de la surface du lac ou au contraire proche de la sortie de la conduite.*
>
> *Ce résultat met donc en défaut deux raisonnements spontanés (contradictoires !) : on pourrait croire que la puissance est plus élevée en bas de la chute d'eau car l'eau aurait davantage de temps pour accélérer ... ou au contraire qu'elle est plus élevée en haut car les pertes de charge qui dissipent de l'énergie ont lieu dans la conduite. Ces raisonnements sont faux, car ils sont issus d'une transposition trop naïve de la mécanique des solides. En raison de l'incompressibilité de l'eau, il y a conservation du débit volumique et la vitesse de l'écoulement est la même dans toute la conduite.*

> *De façon plus imagée, si l'écoulement était accéléré sur le bas de la conduite alors cela créerait un vide qui aspirerait l'eau située au dessus, et donc l'accélérerait autant. Réciproquement, si l'écoulement était freiné sur le bas de la conduite alors cela formerait un bouchon qui ralentirait tout l'écoulement.*

4 La valeur donnée est cohérente avec celle qu'on vient de déterminer ... ouf ! La différence vient des pertes de charge, non prises en compte dans la question précédente. Celles-ci sont de deux types : régulières le long de la conduite, et singulière à l'entrée. On peut par exemple exprimer la perte de charge sous forme d'une altitude Δz_c. Ici, la puissance perdue s'écrit

$$\mathcal{P}_\mathrm{diss} = \rho Q_\mathrm{vol}\, g\, \Delta z_\mathrm{c} = 0{,}4\mathcal{P}$$

d'où on déduit

$$\boxed{\Delta z_\mathrm{c} = 0{,}4\frac{\mathcal{P}}{\rho\, g\, Q_\mathrm{vol}} = 9{,}5\,\mathrm{m}\,.}$$

Tout se passe donc comme si l'écoulement était parfait (pas de perte de charge) mais que l'écart $z_2 - z_1$ était réduit de 9,5 m, c'est-à-dire comme si le niveau du lac était plus bas de 9,5 m.

> *Pour savoir comment positionner les facteurs D_m, ρ, Q_vol, etc. on raisonne dimensionnellement à partir du théorème de Bernoulli ... qu'il faut donc connaître par cœur et sans erreur.*