Lois de la mécanique

Exercice 1 : Vibration d'une molécule de monoxyde de carbone 1 | 2 |

- *Force exercée par un ressort ;*
- *Oscillateur harmonique.*

1 L'atome de carbone n'est soumis qu'à la force exercée par le ressort. Comme on le constate facilement sur la figure 1, sa longueur instantanée est $L = x_2 - x_1$, donc

$$\vec{F}_\mathrm{C} = -k(x_2 - x_1 - L_0)(-\vec{e}_x) = +k(x_2 - x_1 - L_0)\vec{e}_x\,.$$

Par application du PFD dans un référentiel galiléen (qu'on ne précisera pas !) et en projetant, on obtient

$$m_1\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - L_0)\,. \qquad (1)$$

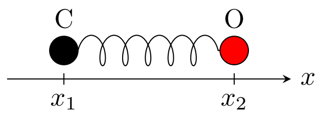

Figure 1 – Molécule de monoxyde de carbone.

2 De même, la force exercée par le ressort sur l'atome d'oxygène vaut

$$\vec{F}_\mathrm{O} = -k(x_2 - x_1 - L_0)(+\vec{e}_x) = -k(x_2 - x_1 - L_0)\vec{e}_x\,.$$

et ainsi

$$m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - L_0)\,. \qquad (2)$$

3 Par combinaison linéaire,

$$\frac{(1)+(2)}{m_1+m_2} \iff \begin{aligned} \frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{k}{m_1+m_2}(x_2-x_1-L_0) - \frac{k}{m_1+m_2}(x_2-x_1-L_0) \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}x_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}x_2\right) &= 0 \\ \boxed{\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}t^2} = 0} \end{aligned}$$

De même,

$$\frac{(2)}{m_2} - \frac{(1)}{m_1} \iff \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} &= -\frac{k}{m_2}(x_2-x_1-L_0) - \frac{k}{m_1}(x_2-x_1-L_0) \\ \frac{\mathrm{d}^2(x_2-x_1)}{\mathrm{d}t^2} &= -k\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)(x_2-x_1-\ell_0) \\ \boxed{\frac{\mathrm{d}^2\delta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{\mu}(\delta-\ell_0)\,.} \end{aligned}$$

4 • **Expression de σ :** raisonnons par intégrations successives,

$$\ddot\sigma = 0 \qquad \text{donc} \qquad \dot\sigma = A = \text{cte}\,.$$

À l'instant initial,

$$\dot\sigma(t{=}0) \underbrace{=}_{\text{CI}} \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\dot x_1(t{=}0) + \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\dot x_2(t{=}0) = 0 \underbrace{=}_{\text{sol}} A \qquad \text{d'où} \qquad A = 0\,.$$

Ainsi,

$$\dot\sigma = 0 \qquad \text{donc} \qquad \sigma = B = \text{cte}\,.$$

À l'instant initial,

$$\sigma(t{=}0) \underbrace{=}_{\text{CI}} \frac{m_1}{m_1+m_2}\,X_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\,X_2 \underbrace{=}_{\text{sol}} B$$

Finalement,

$$\boxed{\sigma = \frac{m_1}{m_1+m_2}\,X_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\,X_2\,.}$$

• **Expression de δ :** l'équation différentielle vérifiée par δ est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{k/\mu}$ et dont $\delta = \ell_0$ est une solution particulière. Ainsi,

$$\delta(t) = \ell_0 + A'\cos(\omega_0 t) + B'\sin(\omega_0 t)\,.$$

À l'instant initial,

$$\delta(t{=}0) \underbrace{=}_{\text{CI}} X_2 - X_1 \underbrace{=}_{\text{expr}} \ell_0 + A' + 0 \qquad \text{d'où} \qquad A' = X_2 - X_1 - \ell_0\,.$$

La deuxième condition initiale porte sur la dérivée $\dot\delta$, qui est donnée par

$$\dot\delta = -A'\omega_0\sin(\omega_0 t) + B'\omega_0\cos(\omega_0 t)\,.$$

À l'instant initial,

$$\dot\delta(t{=}0) \underbrace{=}_{\text{CI}} \dot x_2(t{=}0) - \dot x_1(t{=}0) = 0 \underbrace{=}_{\text{expr}} 0 + B' \qquad \text{d'où} \qquad B' = 0\,.$$

Finalement,

$$\boxed{\delta(t) = \ell_0 + (X_2 - X_1 - \ell_0)\cos(\omega_0 t)\,.}$$

• **Expressions de x_1 et x_2 :** il suffit de renverser le changement de variables pour exprimer x_1 et x_2 en fonction de σ et δ, et de remplacer. À vous de jouer !

5 En identifiant la fréquence des oscillations à celle de l'onde électromagnétique,

$$\nu \underbrace{=}_{\text{EM}} \frac{c}{\lambda} \underbrace{=}_{\text{méca}} \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

on en déduit

$$k = 4\pi^2\mu\frac{c^2}{\lambda^2}\,.$$

La masse d'un atome de carbone vaut $m_1 = M_\text{C}/\mathcal{N}_\text{A}$, de même pour l'oxygène, et ainsi

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} = \frac{M_\text{C}\,M_\text{O}}{(M_\text{C}+M_\text{O})\mathcal{N}_\text{A}} = 1{,}1\cdot 10^{-26}\,\text{kg}\,.$$

Ainsi,

$$\boxed{k = 1{,}9\cdot 10^{3}\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}\,.}$$

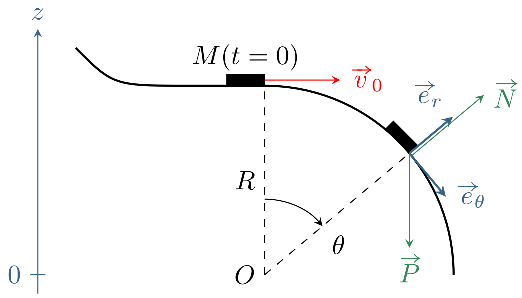

Figure 2 – Schéma des notations.

Exercice 2 : Une luge sur une bosse

2 | 2 |

▷ *Énergie mécanique ;*
▷ *Décollage d'un support.*

1 Appliquons le théorème de la résultante cinétique à la luge, en mouvement par rapport au référentiel terrestre que l'on considère galiléen. On se place dans le repère polaire de centre O défini figure 2. La luge est soumise son poids,

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\cos\theta\,\vec{e}_r + mg\sin\theta\,\vec{e}_\theta\,,$$

et à la force de réaction de la piste,

$$\vec{N} = N\,\vec{e}_r \qquad \text{avec} \qquad N > 0\,.$$

Ainsi, par application de la loi de la quantité de mouvement dans le référentiel terrestre,

$$m\,\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{N}$$

et comme

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r \qquad \text{alors} \qquad \vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta \qquad \text{et} \qquad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

En projetant sur $\vec{e}_r$, on en déduit

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + N \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{N = -mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta\,.}$$

2 Pour faire apparaître la vitesse initiale au lieu de $\dot{\theta}$, utilisons la conservation de l'énergie mécanique. En effet, la luge n'est soumise qu'à une force conservative (son poids) et à une force qui ne travaille pas (la réaction de la piste). Exprimons l'énergie potentielle de pesanteur de la luge. Comme l'axe z est ascendant et en prenant l'origine des énergies potentielles en $z = 0$, alors

$$E_{\mathrm{pp}} = mgz = mgR\cos\theta\,.$$

De plus, la vitesse de la luge a pour norme $v = R\dot{\theta}$, donc son énergie cinétique vaut

$$E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2\,.$$

Finalement, son énergie mécanique vaut

$$E_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta\,.$$

Cette quantité est constante, égale à sa valeur initiale,

$$E_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + mgR$$

Par identification, on en déduit

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 + mgR = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta$$

ce qui permet d'isoler le terme à remplacer dans l'expression de N,

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + mgR(1-\cos\theta)$$

$$-mR\dot{\theta}^2 = -\frac{m{v_0}^2}{R} + 2mg(\cos\theta - 1)\,.$$

On en déduit finalement

$$\boxed{N = -\frac{mv_0^2}{R} + mg\,(3\cos\theta - 2)\,.}$$

3 La luge quitte la piste si la force de réaction s'annule, c'est-à-dire pour un angle θ_d tel que $N(\theta_\mathrm{d}) = 0$, soit

$$0 = -\frac{mv_0^2}{R} + mg\,(3\cos\theta_\mathrm{d} - 2) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\theta_\mathrm{d} = \arccos\left(\frac{v_0^2}{3gR} + \frac{2}{3}\right)\,.}$$

Si la vitesse de la luge est faible, à la limite $v_0 \simeq 0$, cet angle est bien défini et vaut $\arccos 2/3$. Ainsi, **la luge quitte la piste quelle que soit sa vitesse initiale.**

4 Pour que l'arccosinus soit défini, il faut que son argument soit inférieur à 1, c'est-à-dire

$$\frac{v_0^2}{3gR} + \frac{2}{3} \leq 1 \qquad \text{soit} \qquad v_0^2 \leq 3gR \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \qquad \text{donc} \qquad \boxed{v_0 < \sqrt{gR} = v_\mathrm{lim}\,.}$$

Si $v_0 > v_\mathrm{lim}$, les équations établies dans les questions précédentes indiquent que la norme de la force de réaction $\overrightarrow{N}$ serait toujours négative, quelle que soit la valeur de θ. Cela n'a pas de sens, et signifie que l'hypothèse utilisée pour les établir (contact entre la luge et la piste) est fausse. Par conséquent, on en déduit qu'il n'y a jamais de contact : **la luge quitte la piste dès $\boldsymbol{\theta = 0}$**, et elle suit une trajectoire parabolique (chute libre).

Exercice 3 : Balourd

oral banque PT | 2 | 3

- *Moment cinétique ;*
- *Oscillations autour d'une position d'équilibre.*

1 Deux types de mouvement sont possibles :
- si m est suffisamment faible, alors le poids du balourd suffit à compenser celui de la masse et il existe une position d'équilibre ;
- si m est trop élevée, alors le poids de la masse entraîne le cylindre en rotation et le fil se déroule complètement.

Le moment du poids du balourd est maximal pour $\theta = \pi/2$, voir figure 3. Dans cette situation, en utilisant les bras de levier pour calculer les moments par rapport à Ox,

$$\mathcal{M}_{\mathrm{b,max}} + \mathcal{M}_m = -Mgd + m_\mathrm{c}ga = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{m_\mathrm{c} = M\frac{d}{a}\,.}$$

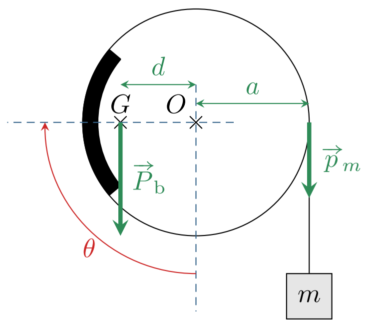

Figure 3 – Position d'équilibre lorsque $m = m_\mathrm{c}$.

> *En appliquant le théorème de la résultante cinétique à la masse m puis en supposant que le fil transmet parfaitement les efforts, on peut montrer que la force exercée par le fil sur le cylindre vaut en fait*
>
> $$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{g} + m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}$$
>
> *avec $\overrightarrow{v}$ la vitesse de la masse m. On suppose ici son accélération suffisamment faible devant $\overrightarrow{g}$ pour la négliger.*

2 Évidemment, on suppose $m < m_\mathrm{c}$. Le point d'application de $\overrightarrow{p}_\mathrm{m}$ ne dépend pas de θ, donc son moment par rapport à (Ox) vaut toujours

$$\mathcal{M}_m = mga\,.$$

Le moment du poids du balourd vaut

$$\mathcal{M}_{\mathrm{b}} = (\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{P}_{\mathrm{b}}) \cdot \overrightarrow{e}_x = -Mgd \sin\theta$$

Dans la position d'équilibre, ces deux moments se compensent donc

$$-Mgd \sin\theta_{\mathrm{e}} + mga = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\theta_{\mathrm{e}} = \arcsin \frac{ma}{Md}\,.}$$

> *On retrouve la condition d'existence de la position d'équilibre : pour qu'elle soit définie, il faut*
>
> $$ma < Md \qquad \text{soit} \qquad m < \frac{Md}{a} = m_c\,.$$

3 D'après le théorème du moment cinétique,

$$J\ddot\theta = -Mgd \sin\theta + mga$$

On se place au voisinage de la position d'équilibre : on pose donc

$$\theta = \theta_{\mathrm{e}} + \varepsilon \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon \ll 1\,.$$

On peut alors faire un développement limité du sinus :

$$\sin(\theta_{\mathrm{e}} + \varepsilon) \simeq \sin\theta_{\mathrm{e}} + \varepsilon\, \cos\theta_{\mathrm{e}}\,.$$

> *Il s'agit ni plus ni moins de la formule de Taylor,*
>
> $$f(a+h) = f(a) + h\, f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \dots$$
>
> *Attention au développement limité : ce n'est pas l'angle θ qui est faible, mais bien l'écart ε. Il est donc a priori faux de faire un développement limité par rapport à θ.*

L'équation différentielle devient

$$J\ddot\varepsilon + Mgd \cos\theta_{\mathrm{e}}\, \varepsilon = -Mgd \sin\theta_{\mathrm{e}} + mga\,,$$

et compte tenu de l'expression de $\sin\theta_{\mathrm{e}}$ obtenue à la question précédente on obtient

$$\ddot\varepsilon + \frac{Mgd \cos\theta_{\mathrm{e}}}{J} \varepsilon = 0\,.$$

> *Il est normal de trouver un second membre nul : l'équation différentielle porte sur l'écart à la position d'équilibre, qui est par définition nul lorsque le système est à l'équilibre.*

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0{}^2 = \frac{Mgd \cos\theta_{\mathrm{e}}}{J} = \frac{Mgd\sqrt{1 - \left(\dfrac{ma}{Md}\right)^2}}{Ma^2} = \frac{g}{Ma^2}\sqrt{M^2d^2 - m^2a^2}$$

d'où on déduit la période des oscillations

$$\boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{Ma^2}{g\sqrt{M^2d^2 - m^2a^2}}}\,.}$$

Exercice 4 : Distributeur de plateaux 3 | 1

- *Résolution de problème ;*
- *Force exercée par un ressort ;*
- *Ordres de grandeur de la vie courante.*

Supposons que le distributeur porte N plateaux, tous d'épaisseur $e = 1\,\mathrm{cm}$ et de masse $m = 200\,\mathrm{g}$. Quelle que soit la valeur de N, le sommet de la pile de plateaux se trouve $h = 10\,\mathrm{cm}$ sous le point d'attache des ressorts. On néglige le poids du support à plateaux devant celui des plateaux. Comme les plateaux sont évidemment immobiles (...) alors la force exercée par « le » ressort doit compenser le poids des plateaux, ce qui se traduit par

$$k(Ne + h - \ell_0) = Nmg \qquad \text{soit} \qquad k(h - \ell_0) + N(ke - mg) = 0$$

Cette condition devant être vérifiée pour toute valeur de N, on en déduit les deux égalités

$$\begin{cases} k(h-\ell_0) = 0 \\ ke - mg = 0 \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\begin{cases} \ell_0 = h = 10\,\mathrm{cm} \\ k = \dfrac{mg}{e} = 200\,\mathrm{N\cdot m^{-1}} \end{cases}}$$

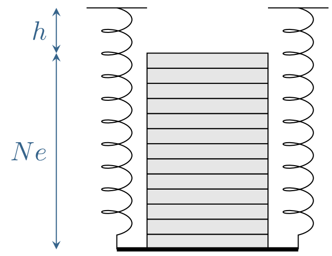

Figure 4 – Distributeur de plateaux.

> *Pour identifier le système d'équations, on peut également raisonner d'abord sur le cas $N = 0$ qui donne la première équation du système, puis simplifier l'équation issue du PFD, et en déduire la deuxième équation du système.*