Cinématique

La **mécanique** est le domaine de la physique qui s'intéresse aux mouvements et à leurs causes.

On y distingue la **cinématique**, qui donne les outils nécessaire à la description du mouvement, et la **dynamique**, qui relie le mouvement à ses causes, les actions mécaniques. L'**énergétique** donne un point de vue complémentaire en interprétant le mouvement du système à partir de ses échanges d'énergie avec l'extérieur.

Comme son nom l'indique, ce chapitre est focalisé sur les outils physiques et mathématiques permettant de décrire le mouvement d'un système. Après une présentation générale des outils cinématiques, la démarche est de partir d'exemple pour montrer comment ils sont paramétrés et mis en équation pour en tirer des conclusions efficacement.

1 Phénoménologie et premiers outils

1.1 Référentiel et repère de temps

Comment définir « bouger » ou « être en mouvement » ?

Espace 1

On voit dans cette définition apparaître deux aspects :
- nécessité d'une référence de position : il n'y a pas de mouvement absolu, on bouge toujours par rapport à quelque chose (exemple du passager assis dans un bus, immobile par rapport au bus mais en mouvement par rapport au trottoir) ;
- nécessité d'une référence de temps : il faut comparer les positions relatives entre deux instants pour savoir s'il y a mouvement.

On appelle **référentiel** le système physique de référence, considéré fixe,
par rapport auquel sont étudiés les mouvements.

Il y a donc une infinité de référentiels imaginables. En pratique, il y a deux façons de définir un référentiel :
- ou bien en donnant un solide de référence, c'est par exemple le cas du référentiel terrestre ;
- ou bien en donnant trois directions de référence (donc en pratique des points), c'est par exemple le cas des référentiels géocentrique ou héliocentrique, définis par les droites formées par le centre de la Terre ou du Soleil et trois étoiles très lointaines.

Attention ! Il ne faut pas confondre le *référentiel*, c'est-à-dire le système de référence (notion *physique*) avec le *repère*, c'est-à-dire l'outil géométrique qui sert à décrire le mouvement (notion *mathématique*). Il y a une infinité de repères différents qui peuvent être associés à un même référentiel. Cette confusion est d'autant plus tentante qu'elle est faite (à tort !) en SI où quasiment tous les mouvements sont implicitement étudiés dans le référentiel terrestre et où seul le repère est précisé.

Le repérage du temps donne lieu à moins de subtilité :

En mécanique classique, le temps est dit **absolu** :
les durées ne dépendent pas du référentiel dans lequel elles sont mesurées.

Concrètement, pour un tour en voiture chronométré depuis la voiture (référentiel en mouvement par rapport au référentiel terrestre) ou depuis la maison (référentiel terrestre), les deux chronomètres afficheront la même durée. Par conséquent, choisir un repère de temps ne consiste qu'à choisir un instant initial $t = 0$, où les chronomètres sont déclenchés.

> ***Remarque :*** *Ce n'est plus le cas si vous faites un tour en fusée à une vitesse proche de celle de la lumière. Le caractère absolu du temps est un principe de la mécanique classique, mais il est mis en défaut dans le cadre de la relativité restreinte.*

1.2 Mouvement d'un solide indéformable et trajectoire de ses points

a) Modèle du solide indéformable

- **Définition**

Un **solide indéformable** est un modèle de système matériel $\mathcal{S}$
dont les points restent à distance constante les uns des autres au cours du temps.

Espace 2

Le solide indéformable est un modèle : un solide parfaitement indéformable n'existe pas. Ce modèle n'est évidemment pas adapté pour décrire les systèmes déformables tels que les fluides, les milieux granulaires (tas de sable) ou encore les solides « mous » (pâte à modeler), mais il exclut aussi tous les systèmes composés de plusieurs solides liés entre eux par des liaisons possédant au moins un degré de liberté.

Espace 3

- **Repérage d'un solide indéformable**

Repérer un solide dans l'espace demande de repérer à la fois sa « position » et son « orientation ».

▷ repérer la « position » signifie donner les trois coordonnées spatiales d'un point de repère sur le solide, souvent son centre d'inertie (cf. chapitre M2) mais pas toujours, penser par exemple au point d'attache d'un ressort ;

▷ repérer « l'orientation » signifie définir un repère lié au solide et donner les angles entre les axes de ce repère et les axes d'un autre repère lié au référentiel d'étude.

Conclusion :

Espace 4

Par exemple, il est fréquent de repérer un solide par la donnée de ses angles d'Euler, voir le cours de SI. Dans le cadre du cours de physique, on se restreindra à des cas plus simples où certains de ces paramètres restent constants au cours du mouvement.

b) Rappels sur la notion de trajectoire

Le mouvement d'un solide est caractérisé par la trajectoire de tous ses points. Dans ce paragraphe on décrit donc les types de mouvement à partir des trajectoires, d'autres caractérisations plus mathématiques seront abordées dans la suite du cours. Le solide est de plus supposé indéformable.

On appelle **trajectoire d'un point** la courbe de ses positions successives au cours du temps.

Donner la trajectoire d'un point revient ni plus ni moins à dire par où il est passé. Ne parler que de trajectoire fait perdre toute notion de temps : on ne sait pas si elle est parcourue « vite » ou « lentement ».

> ***Remarque :*** *La trajectoire d'un point dépend du référentiel. Par exemple, la valve d'une roue de vélo a une trajectoire circulaire dans le référentiel lié au vélo mais une trajectoire cycloïdale dans le référentiel lié à la route.*

c) Mouvement de translation

- **Cas général**

Un solide a un **mouvement de translation** par rapport à un référentiel
si pour tous points M_1 et M_2 du solide le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ garde une direction constante
par rapport à ce référentiel tout au long du mouvement.

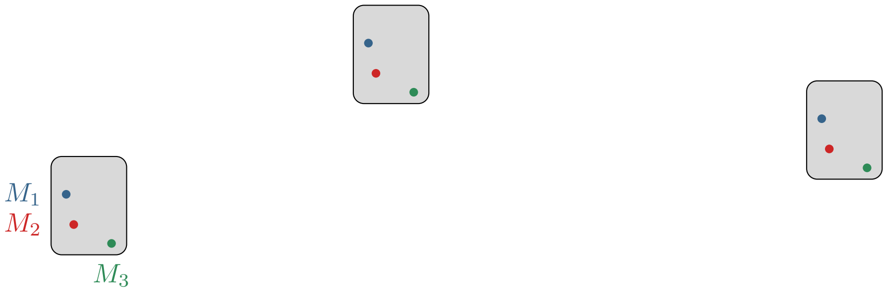
Comme le solide est indéformable, alors la norme $||\overrightarrow{M_1M_2}||$ est également constante, si bien qu'au cours d'un mouvement de translation le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ est un vecteur constant.

⇝ tous les points du solide ont la même trajectoire « en décalé » (les trajectoires sont superposables) et ils la parcourent de la même façon.

Conséquence essentielle :

Espace 5

Exemple :



- **Cas particulier : translation rectiligne**

Si la trajectoire de chaque point du solide est un segment de droite, alors la translation est dite **rectiligne**.

Dans ce cas, tous les segments sont évidemment parallèles entre eux.

Exemple :

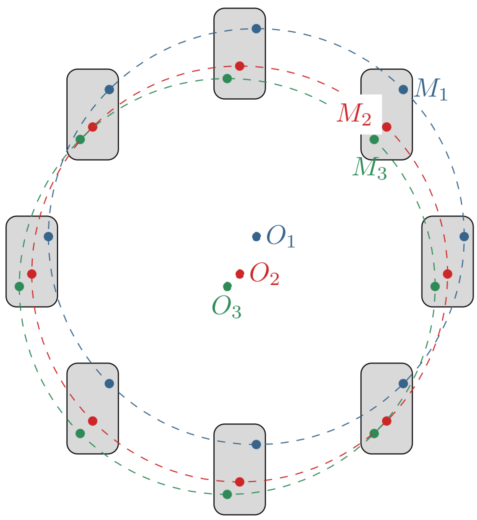
Le fait que les trajectoires soient des segments implique forcément que le mouvement est une translation, on parle donc souvent de « mouvement rectiligne » en sous-entendant qu'il s'agit d'une translation.

> ***Remarque :*** *Tous les mouvements que nous avons étudié jusqu'à présent (chute verticale et oscillations d'une masse attachée à un ressort) sont des mouvements de translation rectiligne. Le fait qu'il y ait des oscillations (notion temporelle) n'empêche pas le mouvement d'être une translation (trajectoire).*

- **Cas particulier : translation circulaire**

Si la trajectoire de chaque point d'un solide *en translation* est un arc de cercle,
alors la translation est dite **circulaire**.

Exemple :



Espace 6

Exemple de système en translation circulaire :

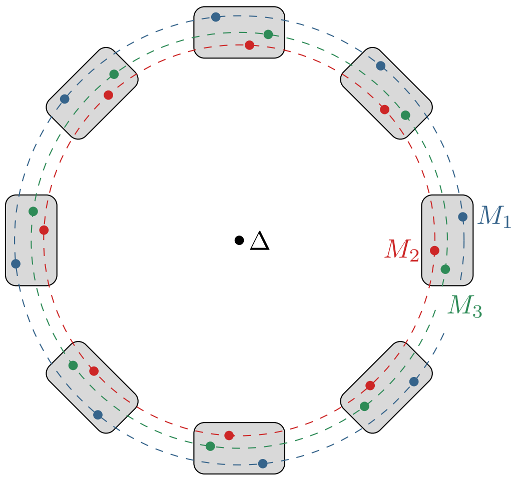
d) Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Attention à ne pas confondre une translation circulaire et une rotation autour d'un axe fixe.

Un solide a un **mouvement de rotation autour d'un axe fixe $\boldsymbol{\Delta}$**
si la distance de tout point du solide à tout point de cet axe est constante au cours du mouvement,

$$\forall M \in \mathcal{S}, \forall A \in \Delta, \quad ||\overrightarrow{AM}|| = \text{cte}$$

Exemple :



Espace 7

Espace 8

Exemple de système en rotation autour d'un axe fixe :

e) Remarque finale

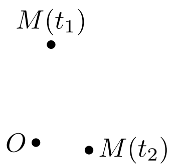
Ces exemples permettent de constater que les notions de *mouvement* et de *trajectoire* ne doivent pas être confondues. Parler de « mouvement d'un point » n'a pas vraiment de sens (qu'est-ce qu'une rotation de point ?), et la notion de « trajectoire d'un solide » n'est définie que si elle est la même pour tous ses points, donc pour une translation. Un solide en rotation n'a pas de trajectoire à proprement parler.

De plus, décrire complètement le mouvement nécessite de s'intéresser à la façon dont les trajectoires sont parcourues au cours du temps, ce que nous allons faire dans les paragraphes suivants.

1.3 Position, vitesse et accélération

a) Position d'un point

Rappel : la position d'un point n'a de sens que par rapport à un point de référence, presque toujours noté O et qui sert d'origine au repère géométrique.



On appelle **position** ou **vecteur position** d'un point M à un instant t le vecteur

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM(t)}$$

où O est presque toujours un point fixe dans le référentiel d'étude.

Notation : on sous-entend la plupart du temps la variable t, et on note donc $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

Le vecteur position dépend donc évidemment du choix du repère, qui est a priori arbitraire ... même si certains choix sont plus malins que d'autres !

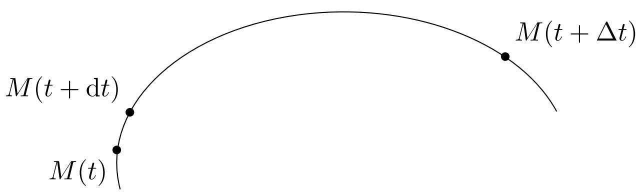
On appelle **vecteur déplacement** d'un point M entre t et $t + \Delta t$ le vecteur

$$\Delta\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM(t+\Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)} \underset{\text{Chasles}}{=} \overrightarrow{M(t)M(t+\Delta t)}\,.$$

Dans la limite où Δt est infinitésimal, on note

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M(t)M(t+\mathrm{d}t)}\,,$$

appelé **vecteur déplacement élémentaire**.



Géométriquement :

Espace 9

b) Vitesse d'un point, champ des vitesses d'un solide

Le vecteur vitesse moyenne pendant une durée Δt est défini à partir du vecteur déplacement pendant cette durée,

$$\langle \vec{v} \rangle_{\Delta t} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}\,.$$

Pour définir une vitesse instantanée, il faut considérer une durée infinitésimale,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}$$

Espace 10

La vitesse dépend du référentiel dans lequel le mouvement est étudié.

Géométriquement, le vecteur vitesse instantanée a même direction et même sens que le vecteur déplacement élémentaire :

Le vecteur vitesse instantané est tangent à la trajectoire et dirigé dans le sens du mouvement.

On appelle **champ des vitesses d'un solide** la donnée du vecteur vitesse de chacun de ses points.

Cette donnée est souvent implicite, et peut se faire par exemple grâce au torseur cinématique et à la propriété de Varignon (aussi appelée propriété d'équiprojectivité),

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}_{1/0} \\ \vec{v}_{A\in 1/0} \end{matrix} \right\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{v}_{B\in 1/0} = \vec{v}_{A\in 1/0} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}\,.$$

Dans cette écriture typée SI, 1 désigne le solide étudié et 0 le solide de référence ... avec une écriture de physicien on les remplacerait par $\mathcal{S}$ pour le système étudié et $\mathcal{R}$ pour le référentiel.

Exemple :

Espace 11

Remarque PT : *La notion de champ des vitesses s'étend aux systèmes déformables, on définit par exemple le champ des vitesses d'un fluide en écoulement.*

c) Accélération d'un point, champ des accélérations d'un solide

Qualitativement, l'accélération d'un point quantifie ses variations de vitesse. Comme la vitesse peut changer en norme mais aussi en direction, on comprend que l'accélération est une quantité vectorielle.

Espace 12

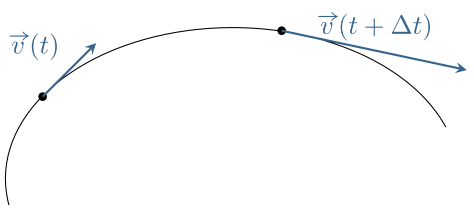
Comme le vecteur vitesse, le vecteur accélération dépend du référentiel dans lequel le mouvement est étudié.

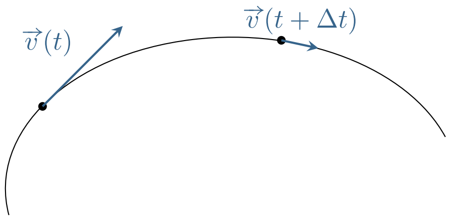
On définit de même le **champ des accélérations** d'un solide.

Pour interpréter géométriquement le vecteur accélération, il est plus simple de le relier aux variations du vecteur vitesse. En revenant à la définition de la dérivée comme limite du taux de variation,

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

Illustration : les échelles sont très exagérées !





Les observations faites sur ces dessins se généralisent :

Espace 13

Mathématiquement, les variations de la norme du vecteur vitesse sont reliées au signe de $\vec{a} \cdot \vec{v}$. La démonstration est identique à celle du théorème de l'énergie cinétique, détaillée au chapitre M3.

d) Remarque finale

Jusqu'à présent, nous n'avons jamais introduit explicitement de repère mais seulement donné des définitions très générales, et il y a une bonne raison pour cela.

Le choix du repère est à adapter au mouvement étudié.

2 Mouvement uniformément accéléré

« Uniformément accéléré » est synonyme de « vecteur accélération constant ».

2.1 Exemples de situation et construction du repérage

- **Souvenirs du lycée**

Espace 14

- **Exemple : lancer d'une balle de tennis**

On lance une balle de tennis. Que peut-on dire de son mouvement dans le référentiel de la salle de cours ?

Espace 15

- **Construction du repérage**

La construction du repérage inclut le choix d'un point de repère sur le système étudié, ici la balle de tennis, et celle d'un repère géométrique permettant de décrire mathématiquement le mouvement.

Convention de représentation : comme une flèche d'archer, un vecteur (ou un axe) perpendiculaire au plan du dessin et qui pointe vers l'œil de l'observateur est représenté par un point entouré $\odot$ alors qu'un vecteur qui s'enfonce dans le plan du dessin est représenté par une croix entourée $\otimes$.

Espace 16

▷ Point de repère sur la balle :

Espace 17

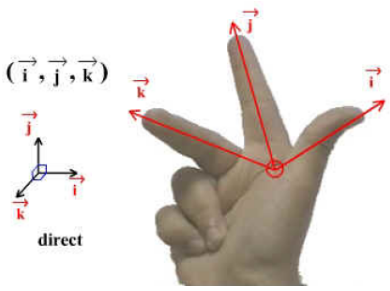
▷ Origine du repère :

Espace 18

▷ Deux directions orthogonales qui définissent le plan du mouvement : on préfère toujours travailler dans un repère orthonormé.

Espace 19

▷ Troisième direction : permet de compléter le trièdre de telle sorte qu'il soit direct. Ce n'est pas vraiment utile si on *postule* que le mouvement est plan, mais nous allons l'utiliser pour *montrer* le caractère plan.

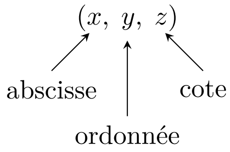


Rappel : Un repère orthonormé $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **direct** si ses trois vecteurs de base **pris dans cet ordre** ont des directions qui correspondent à celles des trois premiers doigts de la main droite.

Attention ! L'ordre des vecteurs a une importance ! Le repère $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct, mais le repère $(\vec{i}, \vec{k}, \vec{j})$ ne l'est pas.

2.2 Vecteurs cinématiques en coordonnées cartésiennes

- **Coordonnées cartésiennes :**



Les **vecteurs unitaires** associés sont notés $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ ou $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et ils forment une base orthonormée directe appelée **base cartésienne**.

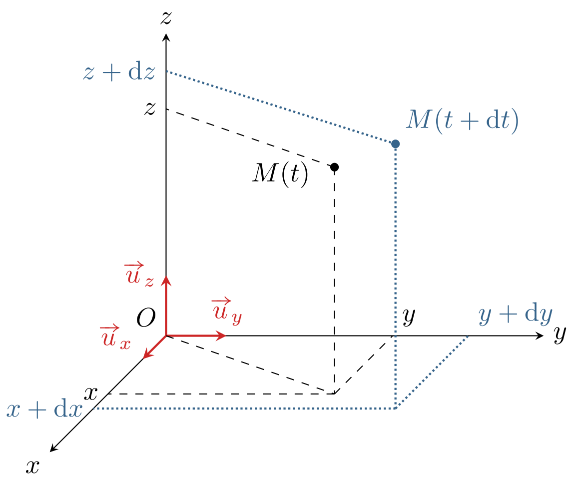
> ***Remarque :*** *La notation $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ utilisée en SI pour désigner les vecteurs unitaires n'est pas utilisable en physique car elle est source de confusion, en particulier lorsqu'il s'agit de relier les forces aux énergies potentielles.*

Par définition, la base cartésienne est une base fixe par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ d'étude.

Espace 20

- **Schéma :**

O est un point fixe dans le référentiel d'étude.



- **Vecteur position :**

Espace 21

- **Vecteur déplacement élémentaire :**

Entre t et $t + \mathrm{d}t$, les coordonnées du point M sont passées de (x, y, z) à $(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z)$. On peut alors placer le point $M(t + \mathrm{d}t)$ sur le schéma et y tracer le vecteur déplacement élémentaire.

> ***Astuce :*** *Choisir positives toutes les variations élémentaires des coordonnées dès que vous tracez un schéma !*

Espace 22

- **Vecteur vitesse :**

▷ à partir du vecteur déplacement élémentaire :

Espace 23

▷ à partir d'un calcul direct de la dérivée du vecteur position :

Espace 24

Conclusion :

Espace 25

- **Vecteur accélération :**

Il s'obtient par un calcul de dérivée exactement analogue.

Espace 26

Étienne Thibierge, 1er janvier 2017, www.etienne-thibierge.fr

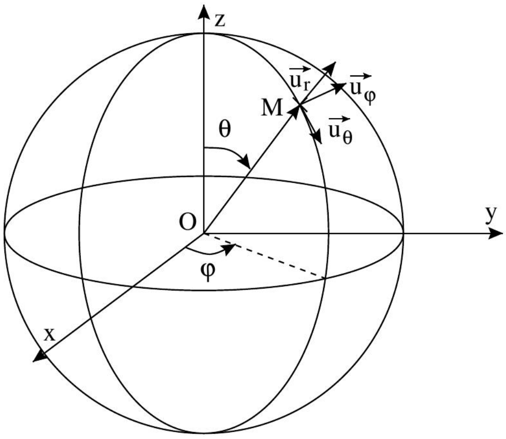
4 Repérage d'un point sur une sphère, coordonnées sphériques

- **Exemple de situation**

Mouvement d'un voilier du Vendée Globe, ou mouvement d'un satellite autour de la Terre ... mais les coordonnées sphériques sont aussi et très utiles pour étudier des phénomènes à symétrie centrale dans bien d'autres domaines de la physique.

- **Schéma**

Le centre O est un point fixe du référentiel d'étude. Les coordonnées sphériques dépendent de deux directions de référence, fixes dans le référentiel d'étude, en général notées (Ox) et (Oz).



- **Coordonnées du point M**

▷ r, appelé rayon, est la distance OM, $r \in [0, +\infty[$;
▷ θ, appelé colatitude, est l'angle entre (Oz) et $\overrightarrow{OM}$, $\theta \in [0, \pi]$;
▷ φ, appelé azimuth, est l'angle entre (Ox) et $\overrightarrow{OH}$, $\varphi \in [0, 2\pi[$.

> ***Remarque :*** *Plutôt que la colatitude θ, on utilise traditionnellement en mécanique terrestre la latitude λ définie comme l'angle $\widehat{HOM}$, mesurée depuis un rayon équatorial et non pas depuis l'axe des pôles. Ainsi, $\lambda = \theta + \pi/2$.*

- **Base sphérique**

La base sphérique est une base **locale**, qui dépend de la position du point M.
▷ $\vec{u}_r$ est dirigé de O vers M ;
▷ $\vec{u}_\theta$ est orthogonal à $\vec{u}_r$, dans le plan (OHM) et orienté dans le sens des θ croissants ;
▷ $\vec{u}_\varphi$ est dans le plan (xOy), orthogonal aux deux précédents, et dirigé dans le sens des φ croissants.

> ***Remarque :*** *On a toujours le même moyen mnémotechnique pour retrouver la direction des vecteurs de base : quand on tire sur $\vec{u}_{\text{truc}}$, truc augmente.*

- **Vecteur position**

Espace 27

Comme pour les coordonnées polaires, on remarque la différence entre les coordonnées du point M et celles du vecteur position.

Les vecteurs vitesse et accélération sont dans le cas général définis par des formules trop complexes pour être intéressantes en pratique. Néanmoins, nous les rencontrerons dans les chapitres futurs dans des cas où le mouvement possède des caractéristiques telles que les expressions se simplifient grandement.