Cinématique

Exercice 1 : Musculation vectorielle [♦◇◇]

On considère une base cartésienne de centre O et de vecteurs unitaires $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. On lui superpose la base cylindrique de même centre et de vecteurs unitaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ et on note θ l'angle orienté de $\vec{u}_x$ vers $\vec{u}_r$.

1 - Faire un schéma représentant les six vecteurs définis précédemment et l'angle θ.

2 - Exprimer les trois vecteurs de la base cylindrique dans la base cartésienne.

3 - Exprimer les trois vecteurs de la base cartésienne dans la base cylindrique.

4 - En dérivant $|\vec{u}_r|^2$, montrer que le vecteur dérivé $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t}$ est perpendiculaire à $\vec{u}_r$.

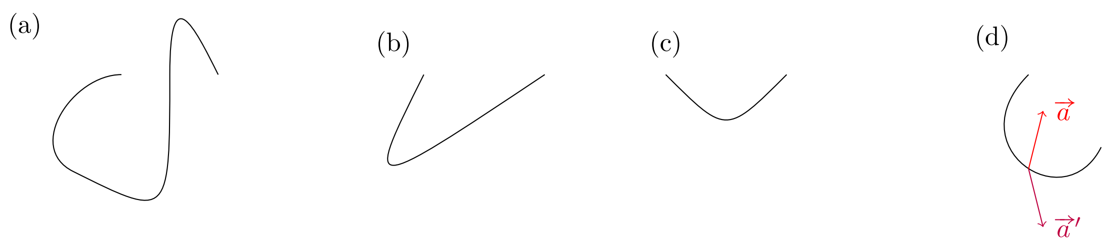
5 - Montrer par un calcul explicite de dérivée que $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = \dot\theta\vec{u}_\theta$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot\theta\vec{u}_r$.

Exercice 2 : Vecteur accélération [♦◇◇]

1 - Sur la trajectoire (a) ci-dessous, le vecteur vitesse est-il constant ? Représenter en quelques points de la trajectoire le vecteur accélération.

2 - Un système peut suivre les deux trajectoires (b) et (c) avec une même vitesse v de norme constante dans les deux cas. Dans quel cas la norme de l'accélération est-elle la plus grande ?

3 - L'accélération du système à un instant donné est représentée sur la trajectoire (d).
3.a **-** Lequel des vecteurs $\vec{a}$ ou $\vec{a}'$ est le vecteur accélération ?
3.b **-** Peut-on en déduire le sens de parcours de la trajectoire ?
3.c **-** En supposant la trajectoire parcourue dans le sens horaire, que peut-on en déduire sur la variation de la norme de la vitesse ?



Exercice 3 : Descente dans un parking souterrain [♦◇◇]

Le parking des Halles de Lyon a une forme très particulière, voir photo ci-contre. Son architecture est telle que lorsqu'une voiture descend elle reste à distance constante de l'axe du parking. On supposera l'inclinaison de la rampe de parking constante, on ne décrira la voiture que par un point, et on supposera qu'elle se déplace dans le parking à vitesse constante.

1 - Justifier que le repérage adapté à décrire le mouvement de la voiture dans le parking est un repérage cylindrique.

2 - Donner sans calcul les équations horaires $r(t)$ et $z(t)$.

3 - Exprimer le vecteur vitesse de la voiture et son vecteur accélération.

4 - En déduire que l'accélération de la voiture est toujours radiale, c'est-à-dire portée par le vecteur $\vec{u}_r$.

Exercice 4 : Course de voitures télécommandées [♦♦◇]

Anatole et Barnabé comparent les performances des voitures télécommandées que le Père Noël leur a apporté. La voiture d'Anatole a une accélération de $2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ alors que celle de Barnabé accélère à $3\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, mais la voiture d'Anatole peut atteindre $12\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ alors que celle de Barnabé plafonne à $10\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

1 - Qui gagne la course dans l'allée du jardin, longue de $15\,\mathrm{m}$?

2 - Grand prince, le gagnant accorde une revanche à son malheureux adversaire et lui laisse même choisir la distance de la course. Quelle distance le perdant doit-il proposer pour être sûr de gagner ?

Exercice 5 : Le drop de Dan Carter [♦♦◊]

À la 70e minute de la finale de la Coupe du Monde de rugby 2015, l'ouvreur néo-zélandais Dan Carter a remis son équipe sur la voie de la victoire en marquant un superbe drop. Pour les non-initiés, un drop consiste à taper le ballon au pied pour le faire passer entre les deux poteaux, au dessus d'une barre horizontale placée à 3 m au dessus du sol.

En analysant la vidéo, on peut estimer le joueur placé à une quarantaine de mètres des poteaux. Le ballon est envoyé avec un angle d'environ 40° par rapport au sol et passe à cinq mètres au dessus de la barre.

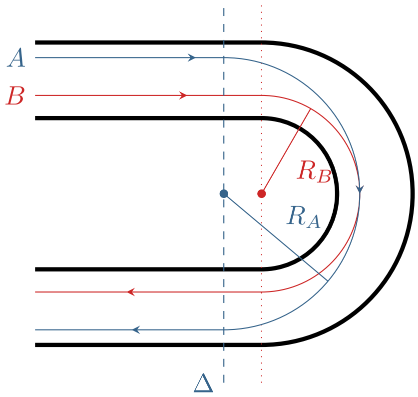
1 - Proposer une modélisation simple permettant d'étudier le mouvement du ballon, en indiquant explicitement les effets négligés.

2 - Définir avec précision un repérage adapté à la description du mouvement.

3 - Dans le cadre de cette modélisation, déterminer la loi horaire puis la trajectoire du ballon.

4 - En déduire la vitesse initialement donnée au ballon par Dan Carter.

Exercice 6 : Duel de McLaren [♦♦◊]



Lors des essais chronométrés d'un grand prix, Fernando Alonso et Jenson Button arrivent en ligne droite à la même vitesse et coupent l'axe Δ au même instant de leur parcours. Ils prennent le virage de deux façons différentes :

- ▷ Alonso suit une trajectoire circulaire de rayon $R_A = 90{,}0\,\mathrm{m}$;
- ▷ Button négocie le même virage mais sur une trajectoire de rayon $R_\mathrm{B} = 75{,}0\,\mathrm{m}$.

On cherche à trouver la trajectoire optimale, c'est-à-dire à savoir lequel des deux pilotes gagne du temps dans le virage.

1 - Déterminer les distances D_A et D_B parcourues par les deux pilotes entre leurs deux passages par l'axe Δ. Peut-on conclure ?

2 - On imagine que les deux voitures roulent à des vitesses v_A et v_B constantes pendant tout le virage. Déterminer ces vitesses en sachant que l'accélération des voitures doit rester inférieure à $0{,}8g$: au delà de cette limite, elles dérapent et finissent la course dans les graviers. Les calculer numériquement.

3 - Quelle est finalement la meilleure trajectoire ?

Exercice 7 : La face cachée de la Lune [♦♦◊]

Le référentiel géocentrique est caractérisé par trois directions fixes, définies par le centre de la Terre T et trois étoiles suffisamment éloignées pour que les considérer fixes soient une bonne approximation (on parle souvent de l'étoile polaire et de l'étoile Beta du Centaure, mais en pratique énormément d'étoiles sont suffisament éloignées pour convenir).

Dans ce référentiel géocentrique, la Lune effectue une révolution circulaire centrée sur la Terre en 27,3 jours. Les distance du centre de la Terre au centre de la Lune est environ égale à $D = 3{,}8 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$.

1 - Décrire le mouvement de la Lune dans le référentiel géocentrique, en distingant notamment s'il s'agit d'un mouvement de translation circulaire ou d'un mouvement de rotation.

2 - En déduire la vitesse angulaire $\dot\theta_0$ du centre de la Lune sur sa trajectoire.

3 - Déterminer la vitesse et l'accélération du centre de la Lune dans le référentiel géocentrique. Calculer numériquement la norme de sa vitesse.

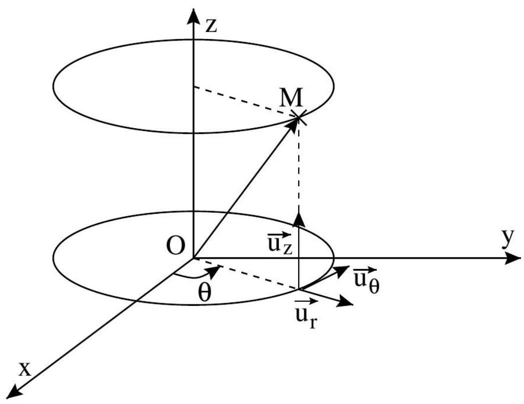
4 - Décrire la mouvement de la Lune dans le référentiel sélénocentrique, qui a les mêmes axes de référence que le référentiel géocentrique mais suit le centre de la Lune.

5 - Déterminer la vitesse angulaire Ω_p de rotation propre de la Lune, c'est-à-dire de la rotation de la Lune sur elle-même.

Cinématique

Exercice 1 : Musculation vectorielle

1



2 Les projections donnent

$$\vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\vec{u}_y \qquad \vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y \qquad \vec{u}_z = \vec{u}_z$$

> *Il existe un moyen mnémotechnique pour retrouver les projections. Comme* $\sin 0 = 0$*, se placer en* $\theta = 0$ *permet de trouver le vecteur qui porte* $\cos\theta$ *et de même, comme* $\cos(\pi/2) = 0$ *se placer en* $\theta = \pi/2$ *permet de trouver le vecteur qui porte* $\sin\theta$*.*

3 On peut évidemment inverser les équations précédentes, mais il est plus intéressant de raisonner aussi par projections.

$$\vec{u}_x = \cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta \qquad \vec{u}_y = \sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta \qquad \vec{u}_z = \vec{u}_z$$

4 Comme $|\vec{u}_r|^2 = \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r$, alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\vec{u}_r|^2 = 2\,\vec{u}_r \cdot \frac{\mathrm{d}\,\vec{u}_r}{\mathrm{d}t}$$

mais par ailleurs $|\vec{u}_r|^2 = 1$ donc $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\vec{u}_r|^2 = 0$. On en déduit

$$\vec{u}_r \cdot \frac{\mathrm{d}\,\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = 0\,,$$

ce qui signifie bien que $\vec{u}_r$ et $\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{u}_r}{\mathrm{d}t}$ sont perpendiculaires.

5 D'après les expressions obtenues précédemment, et comme les vecteurs $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ sont fixes,

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = -\dot\theta\,\sin\theta\,\vec{u}_x + \dot\theta\,\cos\theta\,\vec{u}_y = \dot\theta\,\vec{u}_\theta$$

et de même

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot\theta\,\cos\theta\,\vec{u}_x - \dot\theta\sin\theta\,\vec{u}_y = -\dot\theta\,\vec{u}_r$$

Étienne Thibierge, 2 janvier 2017, www.etienne-thibierge.fr

Exercice 2 : Vecteur accélération

1 Comme le mobile change de direction, le vecteur vitesse ne peut pas être constant. Le vecteur accélération est toujours dirigé vers l'intérieur de la courbure. Au niveau des points d'inflexion (lorsqu'il n'y a pas de courbure), il est tangent à la trajectoire.

2 D'après la définition, la norme de l'accélération est d'autant plus grande que les variations de vitesse sont grandes, qu'il s'agisse de la norme ou de la direction. La direction de la vitesse change plus vite sur la trajectoire (b), donc c'est dans ce cas que la norme du vecteur accélération est la plus grande. Pour s'en convaincre, on peut tracer le vecteur vitesse en entrée et sortie de virage dans les deux cas puis construire le vecteur accélération moyenne.

3.a Le vecteur $\overrightarrow{a}'$ est dirigé vers l'extérieur de la courbure : il ne peut donc pas être le vecteur accélération. C'est donc le vecteur $\overrightarrow{a}$ qui est l'accélération du système.

3.b Il n'est pas possible de déduire du schéma le sens de parcours de la trajectoire : le vecteur accélération sera le même si elle est parcourue dans le sens horaire en accélérant ou dans le sens trigonométrique en freinant.

3.c Si la trajectoire est parcourue dans le sens horaire, alors compte tenu du sens du vecteur $\overrightarrow{a}$ la norme de la vitesse augmente. Techniquement, il faut regarder la projection du vecteur accélération sur le vecteur tangent à la trajectoire.

Exercice 3 : Descente dans un parking souterrain

Le mouvement est implicitement étudié par rapport au référentiel terrestre : il est sous-entendu que toutes les dérivées sont calculées par rapport à ce référentiel.

1 L'énoncé indique que la voiture reste à distance constante d'un axe : cet axe a donc une importance particulière pour le mouvement, est il est naturel de le choisir comme axe z d'un repérage cylindrique. Ce repérage est rendu d'autant plus naturel par l'hypothèse de distance constante.

2 Par hypothèse, $r(t) = R = \text{cte}$. Par ailleurs comme la voiture se déplace à vitesse constante sur une rampe d'inclinaison constante, sa vitesse de déplacement vertical V_z est constante, donc $z(t) = V_z t + z_0$ où z_0 est déterminé par une condition initiale.

3 En repérage cylindrique, le vecteur vitesse vaut

$$\overrightarrow{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + \dot{z}\,\overrightarrow{u}_z \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + V_z\,\overrightarrow{u}_z\,.}$$

Le vecteur accélération s'écrit lui

$$\overrightarrow{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\overrightarrow{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{u}_\theta + \ddot{z}\,\overrightarrow{u}_z \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u}_r + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta\,.}$$

4 La voiture est supposée rouler à vitesse uniforme V dans le parking. En le traduisant sur la norme du vecteur vitesse,

$$|\overrightarrow{v}|^2 = V^2 \qquad \text{soit} \qquad R^2\dot{\theta}^2 + V_z^2 = V^2$$

On déduit de cette équation que la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est constante, et par conséquent $\ddot{\theta} = 0$. L'accélération se simplifie alors en

$$\boxed{\overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u}_r\,,}$$

elle est donc bien toujours radiale.

Exercice 4 : Course de voitures télécommandées

1 Pour connaître le nom du gagnant, il faut déterminer les lois horaires donnant la position des deux voitures. Les deux mouvements sont du même type : après une première phase uniformément accélérée d'accélération a, le mouvement devient ensuite rectiligne uniforme à la vitesse v. Notons x la position d'une des voitures. Supposons par ailleurs que les voitures partent de $x = 0$ sans vitesse initiale. Dans la première phase,

$$\ddot{x} = a \qquad \text{donc} \qquad \dot{x} = at + 0 \qquad \text{et} \qquad x = \frac{1}{2}at^2 + 0$$

Le temps τ au bout quel la voiture atteint sa vitesse limite v vaut $\tau = v/a$ et la position atteinte par la voiture vaut $x_0 = v^2/2a$. Numériquement,

$$x_{0,A} = \frac{v_A^2}{2a_A} = 2{,}8\,\mathrm{m} \qquad \text{et} \qquad x_{0,B} = 1{,}3\,\mathrm{m}$$

Les deux voitures atteignent donc leur vitesse limite, et il faut étudier la seconde phase du mouvement. Dans cette seconde phase, $t > \tau$, le mouvement est rectiligne uniforme à la vitesse maximale v que peut atteindre la voiture, donc

$$\dot{x} = v \qquad \text{et} \qquad x(t) = vt + C$$

La constante d'intégration C se trouve à partir de la condition initiale

$$x(\tau) = \frac{v^2}{2a} \qquad \text{soit} \qquad v\tau + C = \frac{v^2}{2a} \qquad \text{donc} \qquad v\frac{v}{a} + C = \frac{v^2}{2a} \qquad \text{et} \qquad C = -\frac{v^2}{2a}$$

Finalement, on trouve la loi horaire « complète », mais valable seulement pour $t > \tau$,

$$x(t) = vt - \frac{v^2}{a}\,.$$

Le temps t_{arr} au bout duquel les voitures ont parcouru la longueur L de l'allée s'en déduit,

$$L = vt_{\text{arr}} - \frac{v^2}{a} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{t_{\text{arr}} = \frac{L}{v} + \frac{v}{2a}\,.}$$

Numériquement,

$$t_{\text{arr,A}} = \frac{L}{v_A} + \frac{v_A}{2a_A} = 3{,}8\,\mathrm{s} \qquad \text{et} \qquad t_{\text{arr,B}} = \frac{L}{v_B} + \frac{v_B}{2a_B} = 4{,}0\,\mathrm{s}$$

C'est donc Anatole qui gagne.

> *Attention à bien faire les conversions des vitesses en $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pour l'application numérique.*

2 Barnabé l'emporte si $t_{\text{arr,B}} < t_{\text{arr,A}}$, donc si

$$\frac{L'}{v_B} + \frac{v_B}{2a_B} < \frac{L'}{v_A} + \frac{v_A}{2a_A} \qquad \text{soit} \qquad L'\left(\frac{1}{v_B} - \frac{1}{v_A}\right) < \frac{v_A}{2a_A} - \frac{v_B}{2a_B}$$

et enfin en réduisant au même dénominateur

$$\boxed{L' < \left(\frac{v_A}{2a_A} - \frac{v_B}{2a_B}\right)\frac{v_A\,v_B}{v_A - v_B} = 6{,}2\,\mathrm{m}}$$

> *Il est normal de trouver $L' < L$: la voiture de Barnabé accélère plus vite que celle d'Anatole, mais cet avantage se perd avec la distance.*

Exercice 5 : Le drop de Dan Carter

Pour les amateurs de rugby ou ceux qui veulent découvrir ce qu'est un drop, la vidéo est disponible sur le lien `https://www.youtube.com/watch?v=gTmt_IB3Ya0`

Le système est le ballon, en mouvement par rapport au référentiel terrestre.

1 En première approximation, on peut considérer que le ballon est en chute libre sans frottement, c'est-à-dire en mouvement uniformément accéléré, d'accélération $\vec{a} = \vec{g}$. Cela revient à négliger les frottements de l'air sur le ballon et également tout effet dû à la rotation du ballon sur lui-même. Dans ce cadre, le mouvement du ballon sera décrit par la trajectoire de son centre de masse.

2 Le repérage naturel pour étudier un mouvement uniformément accéléré est un repérage cartésien dont une des directions, par exemple z, coïncide avec la direction de l'accélération et une deuxième direction, par exemple x, est définie telle que la vitesse initiale $\vec{v}_0$ du ballon soit incluse dans le plan (xOz). Comme le ballon part du niveau du sol, le plus naturel consiste à fixer l'origine du repère à la position initiale du ballon. On note alors $x = d$ la position des poteaux et $z = h$ la hauteur à laquelle se trouve le ballon au niveaux des poteaux. L'ensemble est récapitulé figure 1.

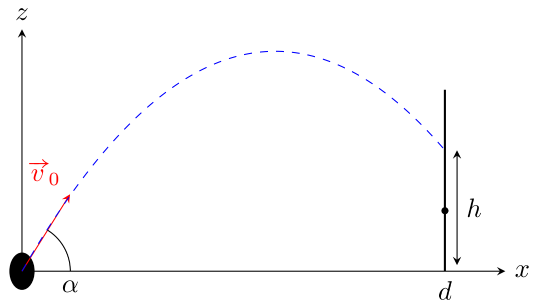


Figure 1 – Repérage pour décrire le drop.

$\boxed{3}$ Tout le calcul qui suit a été fait en cours. Il « suffit » d'intégrer correctement les équations du mouvement en tenant compte des conditions initiales. Plutôt que de le faire par composante comme en cours, utilisons directement ici l'intégration vectorielle. On note $\overrightarrow{OM}(t)$ le vecteur position du ballon à l'instant t. Comme

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{g} \qquad \text{alors} \qquad \vec{v} = \vec{g}\,t + \vec{C}$$

où la constante $\vec{C}$ se détermine à partir de la condition initiale $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$, soit $\vec{C} = \vec{0}$. On intègre ensuite une seconde fois pour déterminer le vecteur position,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\,\vec{g}\,t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{C'}$$

où la nouvelle constante $\vec{C'}$ se détermine encore à partir de la condition initiale $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0}$, soit $\vec{C'} = \vec{0}$. Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = \frac{1}{2}\,\vec{g}\,t^2 + \vec{v}_0 t\,.}$$

On a ici la loi horaire, mais pas encore la trajectoire. Pour cela, il faut trouver l'équation $z(x)$ de la trajectoire en faisant disparaître le temps. Cette équation se trouve par l'intermédiaire des projections, en se rappelant que $\vec{g} = -g\vec{u}_z$, ce qui donne

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}t = v_0\cos\alpha\,t \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_{0z}t = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin\alpha\,t \end{cases}$$

La projection sur x permet d'exprimer le temps t en fonction de x,

$$t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}\,,$$

En remplaçant dans l'équation sur z, on trouve

$$z(x) = -\frac{1}{2}\,g\,\frac{x^2}{{v_0}^2\cos^2\alpha} + v_0\sin\alpha\,\frac{x}{v_0\cos\alpha}$$

ce qui donne l'équation d'une parabole,

$$\boxed{z(x) = -\frac{g}{2\,{v_0}^2\cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha\,x\,.}$$

$\boxed{4}$ L'énoncé indique $\alpha = 40°$ et avec les notations introduites précédemment $z(d) = h$ avec $d = 40\,\mathrm{m}$ et $h = 3 + 5 = 8\,\mathrm{m}$. Il suffit d'injecter ces données dans l'équation de la trajectoire pour déterminer v_0,

$$h = -\frac{g}{2\,{v_0}^2\cos^2\alpha}d^2 + \tan\alpha\,d$$

$$d\tan\alpha - h = \frac{g\,d^2}{2\cos^2\alpha}\,\frac{1}{{v_0}^2}$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{g\,d^2}{2\cos^2\alpha\,(d\tan\alpha - h)}}}$$

Numériquement, on trouve

$$\boxed{v_0 = 23\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 82\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}}$$

L'ordre de grandeur semble plutôt acceptable : une recherche indique que la vitesse typique d'un ballon en vol est de l'ordre de $50\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$, mais le ballon a été ralenti par frottements ... et Dan Carter n'est pas n'importe quel joueur.

Exercice 6 : Duel de McLaren

1 La voiture A d'Alonso entame son virage dès qu'il passe par l'axe Δ et parcourt un demi-cercle, de longueur

$$D_A = \frac{2\pi\, R_A}{2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{D_A = \pi\, R_A = 283\,\mathrm{m}\,.}$$

En revanche, la voiture B de Button continue en ligne droite sur une distance $R_A - R_B$ avant d'entamer son virage, et parcourt de nouveau la même distance en ligne droite avant la sortie du virage. Ainsi,

$$\boxed{D_B = 2(R_A - R_B) + \pi R_B = 266\,\mathrm{m}\,.}$$

La voiture B parcourt moins de distance que la voiture A, mais **il est impossible d'en conclure quoi que ce soit** puisqu'on ne sait pas si les deux trajectoires sont parcourues à la même vitesse.

2 Lorsqu'elles sont sur la partie circulaire de leur trajectoire, parcourue à vitesse constante (en norme), l'accélération (en norme) des voitures vaut

$$a = \frac{v^2}{R} = 0{,}8g$$

puisque les pilotes prennent tous les risques. Ainsi,

$$\boxed{v_A = \sqrt{0{,}8\, g\, R_A} = 26{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \qquad \text{et} \qquad v_B = \sqrt{0{,}8\, g\, R_B} = 24{,}3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

3 Calculons pour conclure le temps mis par chacun des pilotes pour passer le virage,

$$\Delta t = \frac{D}{v}$$

ce qui donne numériquement

$$\boxed{\Delta t_A = 10{,}6\,\mathrm{s} \qquad \text{et} \qquad \Delta t_B = 10{,}9\,\mathrm{s}}$$

Finalement, Alonso va plus vite que Button pour parcourir le virage : **la meilleure trajectoire est la plus extérieure des deux** ... ne vérifiez pas en rentrant chez vous ;)

Exercice 7 : La face cachée de la Lune

1 Représentons le mouvement de la Lune dans le référentiel géocentrique, figure 2. Pour représenter son mouvement, on utilise le fait que la face visible depuis la Terre est toujours la même. Ainsi, **la Lune a un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe $(T, \vec{u}_z)$**.

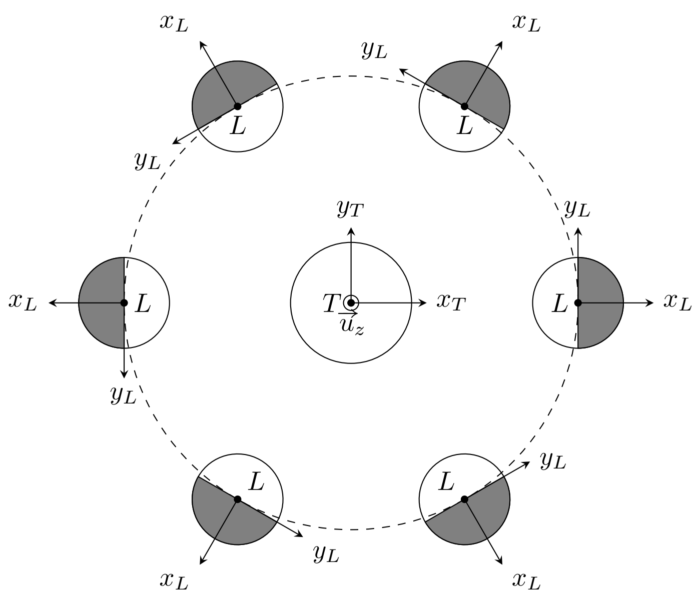


Figure 2 – Mouvement de la Lune dans le référentiel géocentrique. La face cachée de la Lune est grisée.

2 La Lune effectue une révolution complète, c'est-à-dire une rotation de 2π en $\Delta T = 27{,}3$ jours. Sa vitesse angulaire de rotation vaut donc

$$\boxed{\Omega = \frac{2\pi}{\Delta T} = 2{,}7\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,.}$$

3 Le centre de la Lune a une trajectoire circulaire, parcourue à vitesse angulaire constante. L'analogue à la base polaire locale de centre T est ici la base $(\vec{u}_{xL}, \vec{u}_{yL})$. En traduisant les résultats établis en cours, on aboutit à

$$\boxed{\vec{v}_{L/\text{géo}} = D\,\Omega\,\vec{u}_{yL} \qquad \text{et} \qquad \vec{a}_{L/\text{géo}} = -D\,\Omega^2\,\vec{u}_{xL}\,.}$$

Numériquement, $v_{L/\text{géo}} = 1{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

4 Dans le référentiel sélénocentrique, la Lune a un **mouvement de rotation** autour de l'axe $(L, \vec{u}_z)$. On voit à partir du schéma que comme dans le référentiel géocentrique, elle fait un tour sur elle-même en 27,3 jours.

5 On en déduit que la vitesse Ω_p de rotation propre de la Lune sur elle-même est la même que la vitesse de rotation Ω de la Lune autour de la Terre,

$$\boxed{\Omega_\mathrm{p} = \Omega = 2{,}7\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,.}$$