Mécanique 2 – Travaux dirigés Langevin-Wallon, PTSI 2017-2018

Vers la mécanique des solides

Exercices

Exercice 1 : Ascenseur [♦◊◊]

Un ascenseur dont la cabine pèse 1300 kg monte du rez-de-chaussée au premier étage.

1 - Il démarre avec une accélération de $1{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Que vaut la tension du câble qui le hisse ?

2 - Il atteint rapidement une vitesse constante de $2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Déterminer à nouveau la tension du câble.

Exercice 2 : Brique sur un plan incliné [♦♦◊]

On s'intéresse à un plan incliné d'un angle $\alpha = 20°$ par rapport à l'horizontale sur lequel on lance une brique de masse $m = 600\,\mathrm{g}$. La brique est lancée le long de la ligne de plus grande pente du bas vers le haut avec une vitesse $\vec{v}_0$ de norme $1{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Pour étudier ce mouvement, on utilise un axe (Ox) parallèle au plan incliné et un axe (Oz) orthogonal dirigé vers le haut tel que $\vec{v_0} = v_0\vec{e}_x$ et tel que O coïncide avec le point de départ de la brique.

1 - Justifier le choix du repérage, et en particulier l'intérêt de considérer un axe incliné.

On imagine pour commencer que le contact entre la brique et le plan incliné se fait sans frottement.

2 - Établir l'équation différentielle du mouvement de la brique lors de la montée.

3 - Déterminer l'instant auquel la brique s'arrête et la distance qu'elle a parcouru.

4 - La brique redescend-elle le long du plan incliné ?

On tient compte maintenant des frottements solides. La force de contact entre le support et la brique se décompose en $\vec{R} = \vec{R}_\mathrm{n} + \vec{R}_\mathrm{t}$ où $\vec{R}_\mathrm{n}$ est perpendiculaire au support, et $\vec{R}_\mathrm{t}$ colinéaire et de sens opposé à la vitesse. **Tant que la brique glisse sur le support**, ces deux forces sont reliées par

$$||\vec{R}_\mathrm{t}|| = \mu_\mathrm{d}\,||\vec{R}_\mathrm{n}||$$

où $\mu_\mathrm{d} = 0{,}2$ est le coefficient de frottement dynamique.

5 - Établir l'équation du mouvement de la brique lors de la montée.

6 - En déduire sans calcul la loi horaire $x(t)$, l'instant auquel la brique s'arrête et la distance qu'elle a parcouru.

Une fois que la brique est arrêtée, la force de frottement solide change de nature : en effet, **lorsque la brique ne glisse pas sur le support**, les deux forces R_t et R_n sont reliées par

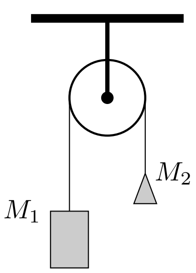
$$||\vec{R}_\mathrm{t}|| \leq \mu_\mathrm{s}\,||\vec{R}_\mathrm{n}||$$

où $\mu_\mathrm{s} \simeq \mu_\mathrm{d} = 0{,}2$ est le coefficient de frottement statique.

7 - Quelle est le sens de la force de frottement lorsque la brique est à l'arrêt ?

8 - À quelle condition sur l'angle α la brique reste-t-elle immobile sans glisser ? Attention, la force de frottement ayant changé, les équations précédentes ne s'appliquent plus.

Exercice 3 : Machine d'Atwood [♦♦◊]

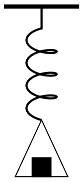


La machine d'Atwood est un appareil conçu pour l'étude de la chute libre par George Atwood (physicien anglais du XVIII[e] siècle) et longtemps amélioré pour se rapprocher davantage d'une véritable chute. L'intérêt de l'invention est de contourner la brièveté du temps de parcours en diminuant l'accélération des masses et de permettre par là la mesure du temps écoulé de bien meilleure façon que les plans inclinés déjà essayés par Galilée.

La machine se compose de deux solides M_1 et M_2, de masses respectives m_1 et m_2, reliés par un fil et suspendus de part et d'autre d'une poulie. La poulie est fixée à un bâti. Pour simplifier l'étude, le fil et la poulie sont supposés idéaux et transmettent parfaitement les efforts.

Déterminer les accélérations des deux solides ainsi que la force exercée par le fil sur M_1 et M_2.

Exercice 4 : Posé sur un plateau ? [♦♦♦]



À l'extrémité inférieure d'un ressort vertical est suspendu un plateau sur lequel est placé un cube. Le plateau est lâché sans vitesse initiale après l'avoir descendu d'une altitude A par rapport à sa position d'équilibre. Le cube décolle-t-il du plateau ?

Remarque : une des principales difficultés de l'exercice est d'établir les équations **rigoureusement**.

Résolution de problème

> *Pour aborder un exercice de type résolution de problème, il peut notamment être utile de faire un schéma modèle, d'identifier et nommer les grandeurs pertinentes, d'utiliser l'analyse dimensionnelle, de proposer des hypothèses simplificatrices, de décomposer le problème en des sous-problèmes simples, etc. Le candidat peut également être amené à proposer des valeurs numériques raisonnables pour les grandeurs manquantes ... et toutes les valeurs données ne sont pas forcément utiles. Le tout est évidemment à adapter à la situation proposée !*

Exercice 5 : Sieste en hamac [♦♦♦]

Nous sommes en juillet prochain. Pour vous reposer après une année bien remplie vous êtes partis au soleil et vous souhaitez vous accorder une petite sieste dans un hamac tendu entre deux pins. Malheureusement, les cordes d'attache du hamac sont très usées et vous n'aimeriez pas vous retrouver par terre.

Pour minimiser les risques, vaut-il mieux attacher le hamac presque à l'horizontale ou au contraire le laisser pendre largement ?

Vers la mécanique des solides

Exercices

Exercice 1 : Ascenseur

Le système étudié est la cabine d'ascenseur, en mouvement dans le référentiel terrestre, considéré galiléen. La cabine est soumise son poids $\overrightarrow{P}$, vertical et vers le bas, et à la tension du câble $\overrightarrow{T}$, verticale et vers le haut. D'après la loi de la quantité de mouvement,

$$m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{T}$$

ce qui donne en projection sur un axe vertical orienté vers le haut

$$ma = -mg + T$$

donc

$$\boxed{T = m(a+g)}$$

1 Numériquement,

$$\boxed{T = 1{,}5 \cdot 10^4\,\mathrm{N}}$$

2 Une fois la vitesse constante atteinte, l'accélération de la cabine d'ascenseur est nulle, donc

$$\boxed{T = mg = 1{,}3 \cdot 10^4\,\mathrm{N}}$$

Exercice 2 : Brique sur un plan incliné

Le système étudié est la brique, en évolution par rapport au référentiel terrestre, supposé galiléen. La brique est un solide en translation, son mouvement est donc complètement caractérisé par celui de son centre de masse G.

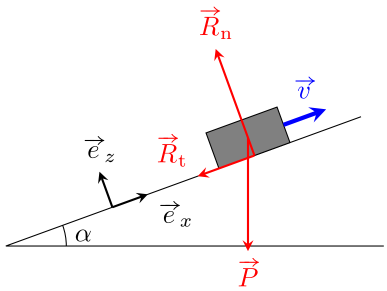


Figure 1 – Schéma de la brique sur un plan incliné.

1 Le choix d'un axe incliné est judicieux car la brique ne décolle pas du plan incliné. Comme elle est lancée le long de la ligne de plus grande pente, elle va rester le long de cette ligne sans tourner. La seule donnée de x suffit alors à repérer complètement la position de la brique. Si l'on avait pris un axe vertical parallèle à $\overrightarrow{g}$, il aurait fallu deux coordonnées pour décrire la position de la brique.

2 La brique n'est soumise qu'à deux forces : son poids $\overrightarrow{P}$ et la force de réaction du support plan $\overrightarrow{R}_n$, orthogonale à ce support. D'après le théorème de la résultante cinétique,

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}_{brique/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R}_n\,.$$

où $\overrightarrow{p}_{brique/\mathcal{R}} = m\overrightarrow{v}_{G/\mathcal{R}} = m\overrightarrow{v}$ pour simplifier les notations. Comme le mouvement se fait sur le plan incliné, on a tout du long du mouvment $z = \text{cte}$. Ainsi, en projection,

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -m\,g\sin\alpha \\ 0 = -m\,g\cos\alpha + R_n \end{cases}$$

ce qui donne l'équation du mouvement

$$\boxed{\ddot{x} = -g \sin \alpha \,.}$$

> *On peut alors en déduire la norme de la force inconnue, $R_n = mg \cos \alpha$, et cela grâce à la connaissance que l'on a du mouvement (cela vient du fait qu'on impose « à la main » $\ddot{z} = 0$). Cette idée est très générale : l'existence de la liaison (ici mouvement plan) donne une information sur le mouvement ($z = $ cte) mais ajoute une force inconnue (R_n).*

3 On intègre l'équation du mouvement en utilisant directement la condition initiale $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$, on trouve

$$v = \dot{x} = -g \sin \alpha \, t + v_0$$

qui s'annule en

$$\boxed{t_0 = \frac{v_0}{g \sin \alpha} = 0{,}45\,\mathrm{s}\,.}$$

La distance d parcourue est donnée par $x(t_0)$. Par une nouvelle intégration de l'équation du mouvement, et en insérant directement la condition initiale $x(0) = 0$ on trouve

$$x = -\frac{1}{2}\, g \sin \alpha \, t^2 + v_0 t + 0 \qquad \text{soit} \qquad d = x(t_0) = -\frac{1}{2}\frac{{v_0}^2}{g \sin \alpha} + \frac{{v_0}^2}{g \sin \alpha}$$

et finalement

$$\boxed{d = \frac{{v_0}^2}{2g \sin \alpha} = 34\,\mathrm{cm}}$$

4 La brique est accélérée vers la bas du plan incliné tout au long du mouvement, elle redescend donc forcément. Seuls les frottements peuvent l'en empêcher.

5 Prenons en compte la force supplémentaire dans la loi de la quantité de mouvement. Comme la brique se déplace dans le sens des x croissants, alors $\vec{R}_\mathrm{t} = -R_\mathrm{t}\,\vec{e}_x$.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{P} + \vec{R}_\mathrm{n} + \vec{R}_\mathrm{t}\,.$$

Comme le mouvement se fait le plan incliné, on a tout du long du mouvment $z = 0$. Ainsi, en projection,

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -m\,g \sin \alpha - R_\mathrm{t} = -m\,g \sin \alpha - \mu_\mathrm{d}\, R_\mathrm{n} \\ \quad 0 = -m\,g \cos \alpha + R_n \end{cases}$$

Cette fois, l'équation en projection sur $\vec{e}_x$ ne donne pas directement l'équation du mouvement à cause de la force de réaction du support, qui est une force de liaison, donc inconnue. On peut alors déterminer cette force inconnue à partir de la connaissance préalable du mouvement et de l'équation projetée sur $\vec{e}_y$. Ainsi,

$$R_n = m\,g \cos \alpha$$

ce qui donne finalement l'équation du mouvement sous la forme

$$\boxed{\ddot{x} = -mg(\sin \alpha + \mu_\mathrm{d} \cos \alpha)\,.}$$

6 L'équation du mouvement a la même forme que précédemment en remplaçant $\sin \alpha$ par $\sin \alpha + \mu_\mathrm{d} \cos \alpha$. Les résultats précédents se transposent alors directement,

$$\boxed{x = -\frac{1}{2}\, g(\sin \alpha + \mu_\mathrm{d} \cos \alpha)\, t^2 + v_0 t}$$

La transposition fonctionne de la même manière pour donner

$$\boxed{t_0' = \frac{v_0}{g(\sin \alpha + \mu_\mathrm{d} \cos \alpha)} = 0{,}29\,\mathrm{s} \qquad \text{et} \qquad d' = \frac{{v_0}^2}{2g(\sin \alpha + \mu_\mathrm{d} \cos \alpha)} = 22\,\mathrm{cm}\,.}$$

> *Vérifier la cohérence de la solution : les frottements solides font que la brique avance moins longtemps et moins loin, ce qui est cohérent.*

7 S'il n'y avait pas de frottement, la brique à l'arrêt se mettrait à glisser le long du plan incliné. Si elle ne descend pas, c'est que des frottements orientés selon $+\vec{e}_x$ la retiennent : $\vec{R}_\mathrm{t} = +R_\mathrm{t}\,\vec{e}_x$.

8 Lorsque la brique demeure immobile, les forces qu'elle subit se compensent,

$$\vec{P} + \vec{R}_\mathrm{n} + \vec{R}_\mathrm{t} = \vec{0}$$

En projection, cela donne

$$\begin{cases} -m\,g\sin\alpha + R_t = 0 \\ -m\,g\cos\alpha + R_n = 0 \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} R_t = m\,g\sin\alpha \\ R_n = m\,g\cos\alpha \end{cases}$$

Pour que la brique reste immobile et ne se mette pas à glisser, il faut que

$$\frac{R_\mathrm{t}}{R_\mathrm{n}} \leq \mu_\mathrm{s} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\tan\alpha \leq \mu_\mathrm{s}}$$

Ce résultat est conforme à l'intuition : la brique reste en place si l'angle est suffisamment petit, mais glisse s'il devient trop grand.

Exercice 3 : Machine d'Atwood

Menons l'étude dans le référentiel terrestre, considéré galiléen.

• Analyse qualitative

Les deux solides sont en mouvement de translation rectiligne vertical : il suffit donc d'introduire un axe z vertical, par exemple orienté vers le haut, pour repérer la position des deux solides.

Par ailleurs, les deux solides sont liés par une corde tendue inextensible : si M_1 (qui sur le schéma semble le plus lourd, on suppose donc $m_1 > m_2$) descend de Δz alors M_2 monte d'autant. Ils ont donc un vecteur vitesse de même norme, de même direction, mais de sens opposé. On comprend aussi qu'il en est de même pour les accélérations, on pose donc

$$\vec{a} = \vec{a}_1 = -\vec{a}_2 = -a\,\vec{e}_z$$

où a est la norme de l'accélération.

• Mise en équation

Appliquons maintenant le TRC au système composé du solide M_1 seul. Ce solide est soumis à son poids et à la tension de la corde $\vec{T}_1 = +T_1\,\vec{u}_z$ où T_1 désigne la norme. Ainsi,

$$m_1\,\vec{a} = m_1\,\vec{g} + \vec{T}_1 \qquad \text{soit} \qquad -m_1 a = -m_1 g + T_1$$

en projection sur l'axe z. De même, le solide M_2 est soumis à son poids et à la tension $\vec{T}_2 = +T_2\,\vec{u}_z$ de la corde, donc

$$m_2\,\vec{a}_2 = -m_2\,\vec{a} = m_2\,\vec{g} + \vec{T}_2 \qquad \text{soit} \qquad m_2 a = -m_2 g + T_2$$

en projetant.

> *Appliquer le TRC à un système composé des deux solides M_1 et M_2 serait une mauvaise idée : la loi de la quantité de mouvement s'applique au centre d'inertie, mais comme l'un des solides monte alors que l'autre descend, le mouvement du centre d'inertie ne renseigne en rien sur le mouvement de chacun des solides. Le même raisonnement vaut aussi pour les systèmes qui inclueraient le fil et les poulies.*

On a à ce stade un système de deux équations ... mais à trois inconnues. Pour s'en sortir, il faut revenir à la modélisation du dispositif. L'énoncé indique que « la corde et la poulie transmettent parfaitement les efforts », ce qui revient à dire que la norme de la force de tension de la corde est la même tout au long de la corde et de part et d'autre de la poulie,

$$T_1 = T_2 = T\,.$$

Le système se simplifie donc en

$$\begin{cases} -m_1 a = -m_1 g + T \\ m_2 a = -m_2 g + T \end{cases}$$

En soustrayant les deux lignes, on peut isoler a,

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 - m_2)g \qquad \text{donc} \qquad \boxed{a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g\,.}$$

On remarque que $a < g$, la chute est donc bien ralentie par rapport au cas de la chute libre. En les multipliant par « l'autre » masse et en les sommant, on peut en déduire T,

$$0 = -2m_1 m_2 g + (m_1 + m_2)T \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g\,.}$$

Enfin, terminons par tester la vraisemblance de la solution. Premier point à vérifier, a et T sont des normes et sont bien toujours positives (rappelons qu'on a supposé $m_1 > m_2$). Deuxième test possible, on peut noter que si les deux masses sont égales alors elles restent en équilibre si elles sont initialement immobiles.

> *L'expression de T permet de constater que contrairement à l'intuition qu'on peut en avoir, $T \neq m_2 g$, ou autrement dit M_2 ne retient pas M_1 de tout son poids. Cela n'a rien d'un problème : une force de liaison est toujours inconnue a priori.*

Exercice 4 : Posé sur un plateau ?

- **Analyse qualitative**

L'étude est évidemment menée dans le référentiel terrestre. Il s'agit d'une question de contact entre le plateau et le cube : on s'attend donc à utiliser la loi de la quantité de mouvement pour déterminer une force inconnue, celle qui traduit le contact entre cube et plateau. La démarche est donc de **supposer** le contact, de résoudre les équations, et de revenir sur l'hypothèse pour vérifier ses limites de validité.

- **Mise en équation**

Reste à trouver à quel système appliquer cette loi : compte tenu de la question, le choix est de considérer le cube, supposé de masse m. Il est soumis à son poids,

$$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\,\overrightarrow{e}_z$$

et à la force $\overrightarrow{R} = R\,\overrightarrow{e}_z$ verticale vers le haut exercée par le plateau. Par contre, comme le ressort et le cube ne se touchent pas, le ressort n'exerce **aucune** force sur le cube, tout passe par l'intermédiaire du plateau ... et ce même si on sent bien que le cube bouge grâce au ressort ! Méfiez-vous des intuitions trompeuses sur les forces ! D'après la loi de la quantité de mouvement appliquée au cube et projetée sur z,

$$\boxed{m\ddot{z} = -mg + R\,.}$$

Le problème ici est que cette unique équation implique deux inconnues : $\ddot{z}$ et R. Il faut donc une équation supplémentaire, qui a priori devrait nous donner $\ddot{z}$ puisque l'on cherche R. Cette équation va venir de la loi de la quantité de mouvement appliquée au plateau : comme le cube et le plateau sont indéformables et en contact, alors leur accélération est la même. Le plateau est soumis à trois forces que sont son poids,

$$\overrightarrow{P'} = m'\overrightarrow{g} = -m'g\,\overrightarrow{e}_z\,,$$

la force de rappel du ressort,

$$\overrightarrow{f}_{\text{ress}} = -k(\ell(t) - \ell_0)(-\overrightarrow{e}_z) = +k(\ell_{\text{éq}} - z - \ell_0)\,\overrightarrow{e}_z$$

et la force qu'il subit de la part du cube $\overrightarrow{R}'$, égale à $-\overrightarrow{R} = -R\,\overrightarrow{e}_z$ d'après le principe des actions réciproques. D'après la loi de la quantité de mouvement appliquée au plateau et projetée sur z,

$$\boxed{m'\ddot{z} = -m'g + k(\ell_{\text{éq}} - z - \ell_0) - R}$$

On aboutit donc finalement à un système de deux équations différentielle à deux inconnues, $\ddot{z}$ et R. Comme il s'agit d'équations différentielles, il n'est pas possible de les résoudre comme des équations algébriques (le z apparaissant dans la force exercée par le ressort « gênerait »). On va donc commencer par résoudre l'équation sur z puis en déduire R. En sommant les deux équations, on obtient

$$(m + m')\ddot{z} = -(m + m')g - kz + k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0)\,.$$

Avant de se lancer dans la résolution complète, il est préférable d'étudier la position d'équilibre où par définition de l'équilibre $\ddot{z} = 0$ et par définition du repère $z = 0$, donc

$$0 = -(m + m')g + k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0)$$

Cela permet de simplifier l'équation différentielle, qui s'écrit sous forme canonique

$$\ddot{z} + \frac{k}{m + m'} z = 0 \,.$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{k/(m + m')}$. Comme l'équation est homogène, on a directement

$$z(t) = \alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t) \,.$$

Les constantes se déterminent à partir des conditions initiales,

$$z(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} \alpha \underbrace{=}_{\text{CI}} -A \qquad \text{et} \qquad \dot{z}(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} \omega_0 \beta \underbrace{=}_{\text{CI}} 0$$

d'où finalement

$$\boxed{z(t) = -A \cos(\omega_0 t) \,.}$$

Maintenant que z est connu, on peut (enfin !) en déduire l'expression de R tant qu'il y a contact (rappelons que tous les calculs ont été faits en supposant le contact). En appliquant la loi de la quantité de mouvement à la masse, nous avions montré que

$$R = m\ddot{z} + mg$$

et nous venons de calculer

$$\ddot{z} = -\frac{k}{m + m'} z = +\frac{kA}{m + m'} \cos(\omega_0 t)$$

d'où

$$\boxed{R = \frac{m}{m + m'} kA \cos(\omega_0 t) + mg \,.}$$

La valeur minimale que prend R doit toujours rester positive, sans quoi le cube décolle, donc le cube reste sur le plateau tant que

$$-\frac{m}{m + m'} kA + mg > 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{A < \frac{(m + m')g}{k} \,.}$$

Résolution de problème

Exercice 5 : Sieste en hamac

- **Modélisation**

Pour faire simple, je te modélise par un point matériel de masse m suspendu par des cordes de même longueur, supposées inextensibles et tendues. Une modélisation par un solide indéformable ne changerait qualitativement rien. Le dispositif est donc symétrique, voir figure 2. Pour minimiser le risque que les cordes cassent, il faut minimiser leur force de tension, c'est-à-dire qu'il faut trouver la valeur de α qui minimise la norme de $\vec{T}$ et $\vec{T'}$, que je note plus simplement T et T'.

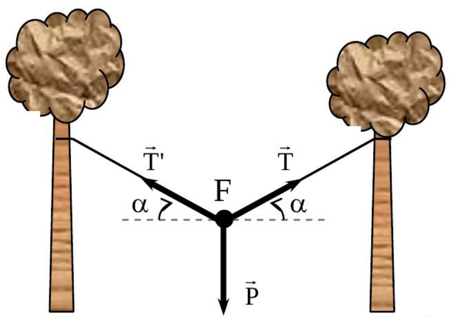


Figure 2 – Un point matériel en train de faire la sieste dans son hamac.

- **Mise en équation**

Tu es le système en « mouvement » dans le référentiel terrestre, qu'on peut considérer galiléen. On y fixe un repère (Oxy). Tu es soumis à

▷ ton poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u}_y$;
▷ la force de tension $\overrightarrow{T} = T(\cos\alpha\,\overrightarrow{u}_x + \sin\alpha\,\overrightarrow{u}_y)$;
▷ la force de tension $\overrightarrow{T'} = T'(-\cos\alpha\,\overrightarrow{u}_x + \sin\alpha\,\overrightarrow{u}_y)$;
Par application de la loi de la quantité de mouvement, on a vectoriellement puis en projection

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{T'} = \overrightarrow{0} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} (T - T')\cos\alpha = 0 \\ -mg + (T + T')\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

On en déduit finalement que $T' = T$, ce dont on pouvait se douter vue la symétrie des cordes, et

$$2T\sin\alpha = mg \qquad \text{d'où} \qquad T = T' = \frac{mg}{2\sin\alpha}$$

La tension des cordes est d'autant plus faible que $\sin\alpha$ est grand, donc que α est proche de $\pi/2$.

• **Conclusion**

Il vaut mieux que tu laisses pendre le hamac pour être sûr de ne pas tomber ... mais je ne sais pas si ce sera très favorable pour ta sieste :)