Mouvements à trajectoires circulaires

Exercices

Exercice 1 : Musculation vectorielle [♦◊◊]

On considère une base cartésienne de centre O et de vecteurs unitaires $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. On lui superpose la base cylindrique de même centre et de vecteurs unitaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ et on note θ l'angle orienté de $\vec{u}_x$ vers $\vec{u}_r$.

1 - Faire un schéma représentant les six vecteurs définis précédemment et l'angle θ.

2 - Exprimer les trois vecteurs de la base cylindrique dans la base cartésienne.

3 - Exprimer les trois vecteurs de la base cartésienne dans la base cylindrique.

4 - En dérivant $|\vec{u}_r|^2$, montrer que le vecteur dérivé $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t}$ est perpendiculaire à $\vec{u}_r$.

Exercice 2 : Descente dans un parking souterrain [♦◊◊]

L'architecture du parking des Halles de Lyon est telle que lorsqu'une voiture descend elle reste à distance constante de l'axe du parking. On supposera l'inclinaison de la rampe de parking constante, on ne décrira la voiture que par un point, et on supposera qu'elle se déplace dans le parking à vitesse constante.

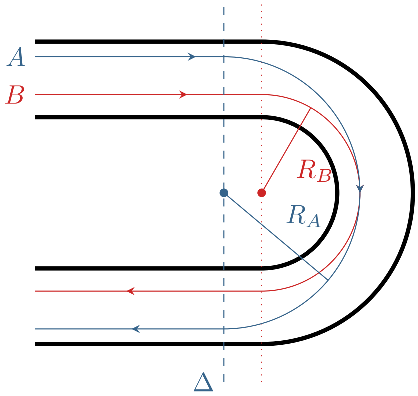
1 - Justifier que le repérage adapté à décrire le mouvement de la voiture dans le parking est un repérage cylindrique.

2 - Donner sans calcul les équations horaires $r(t)$ et $z(t)$.

3 - Exprimer le vecteur vitesse de la voiture et son vecteur accélération.

4 - En déduire que l'accélération de la voiture est toujours radiale, c'est-à-dire portée par le vecteur $\vec{u}_r$.

Exercice 3 : Duel de McLaren [♦♦◊]



Lors des essais chronométrés d'un grand prix, Fernando Alonso et Jenson Button arrivent en ligne droite et coupent l'axe Δ au même instant de leur parcours. Ils prennent le virage de deux façons différentes :

▷ Alonso suit une trajectoire circulaire de rayon $R_A = 90{,}0\,\mathrm{m}$;

▷ Button choisit une trajectoire de rayon $R_\mathrm{B} = 75{,}0\,\mathrm{m}$.

On cherche à trouver la trajectoire optimale, c'est-à-dire à savoir lequel des deux pilotes gagne du temps dans le virage.

1 - Déterminer les distances D_A et D_B parcourues par les deux pilotes entre leurs deux passages par l'axe Δ. Peut-on conclure ?

2 - Pour simplifier, on imagine que les deux voitures roulent à des vitesses v_A et v_B constantes entre leurs deux passages par l'axe Δ. Déterminer ces vitesses en sachant que l'accélération des voitures doit rester inférieure à $0{,}8g$: au delà de cette limite, elles dérapent et finissent la course dans les graviers. Les calculer numériquement.

3 - Quelle est finalement la meilleure trajectoire ?

Exercice 4 : La face cachée de la Lune [♦♦◊]

Le référentiel géocentrique est caractérisé par trois directions fixes, définies par le centre de la Terre T et trois étoiles suffisamment éloignées pour que les considérer fixes soient une bonne approximation (on parle souvent de l'étoile polaire et de l'étoile Beta du Centaure, mais en pratique énormément d'étoiles sont suffisament éloignées pour convenir). Dans ce référentiel géocentrique, la Lune effectue une révolution circulaire centrée sur la Terre en 27,3 jours. Les distance du centre de la Terre au centre de la Lune est environ égale à $D = 3{,}8 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$.

1 - Décrire le mouvement de la Lune dans le référentiel géocentrique, en distinguant notamment s'il s'agit d'un mouvement de translation circulaire ou d'un mouvement de rotation.

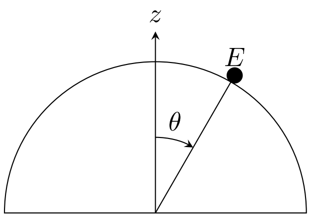
2 - En déduire la vitesse angulaire Ω du centre de la Lune sur sa trajectoire.

3 - Déterminer la vitesse et l'accélération du centre de la Lune dans le référentiel géocentrique. Calculer numériquement la norme de sa vitesse.

4 - Décrire la mouvement de la Lune dans le référentiel sélénocentrique, qui a les mêmes axes de référence que le référentiel géocentrique mais suit le centre de la Lune.

5 - Déterminer la vitesse angulaire Ω_p de rotation propre de la Lune, c'est-à-dire de la rotation de la Lune sur elle-même.

Exercice 5 : Glissade sur un igloo [♦♦◊]



Cet exercice s'intéresse à la glissade d'un enfant esquimau E de masse m sur le toit d'un igloo d'où il s'élance sans vitesse initiale. L'enfant glisse sans aucun frottement à la surface de l'igloo. Sa position est repérée par l'angle θ. Pour simplifier, l'igloo est supposé sphérique de rayon R.

1 - Appliquer le théorème de la résultante cinétique à l'enfant pour en déduire deux équations différentielles portant sur l'angle θ. Identifier l'équation du mouvement, qui permet de déterminer $\theta(t)$. Quelle information l'autre équation contient-elle ?

2 - En multipliant l'équation du mouvement par $\dot\theta$, montrer que

$$\dot\theta^2 = \frac{2g}{R}\left(1 - \cos\theta\right) .$$

3 - En déduire l'expression de la force de réaction de l'igloo.

4 - L'enfant décolle-t-il du toit de l'igloo avant d'atteindre le sol ? Si oui, pour quel angle ?

Exercice 6 : Mouvement circulaire avec ressort [♦♦◊]

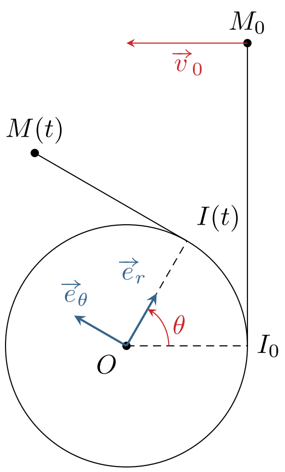
On considère une masse, assimilable à un point matériel M de masse m, placée sur un plan horizontal où elle peut se déplacer sans frottement. Elle est reliée par un ressort de raideur k et longueur naturelle ℓ_0 à un point O. À l'instant initial, $OM = L$ et la masse est lancée avec une vitesse $\vec v_0$. On cherche comment choisir $\vec v_0$ et L pour que le mouvement soit circulaire.

1 - Déterminer sans calcul le rayon du cercle et la direction à donner à $\vec v_0$.

2 - Montrer que si le mouvement est circulaire alors il est également uniforme.

3 - En déduire une condition sur L et la valeur à donner à v_0 en fonction de L pour que le mouvement soit circulaire.

Exercice 7 : Enrouler le fil, dérouler le fil ... [♦♦♦]



Un fil de longueur L, inextensible et de masse négligeable, est accroché tangentiellement à une bobine plate de rayon R. À l'extrémité libre est accroché un point matériel M, de masse m. L'effet de la pensanteur est négligé.

Le fil est tendu et M lancé dans le plan de la bobine depuis la position M_0, perpendiculairement au fil, avec une vitesse initiale $\vec v_0$, afin d'enrouler le fil autour de la bobine.

On utilise la base polaire relative au point I, point du fil le plus proche de M à être en contact avec la bobine.

1 - Montrer que $\overrightarrow{OM} = R\vec e_r + (L - R\theta)\vec e_\theta$. En déduire les composantes de la vitesse et de l'accélération de M dans cette base.

2 - En utilisant le PFD, montrer que la vitesse radiale de M est constante. Que vaut cette constante ?

3 - En déduire par intégration une relation entre θ et t, puis déterminer la durée totale τ nécessaire pour enrouler le fil en totalité.

4 - Établir la loi horaire

$$\theta(t) = \frac{L}{R}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{t}{\tau}}\right) .$$

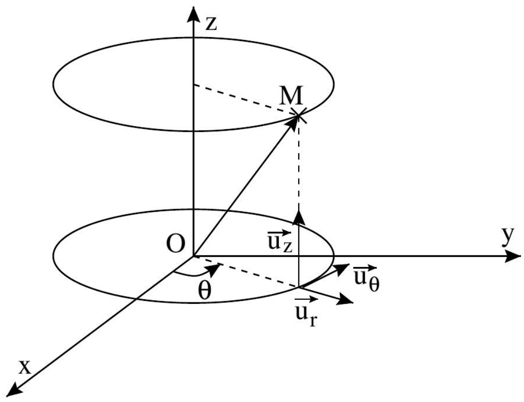
5 - Vérifier que le fil reste tendu tout au long du mouvement.

Mouvements à trajectoires circulaires

Exercices

Exercice 1 : Musculation vectorielle

1



2 Les projections donnent

$$\vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\vec{u}_y \qquad \vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y \qquad \vec{u}_z = \vec{u}_z$$

> *Il existe un moyen mnémotechnique pour retrouver les projections. Comme $\sin 0 = 0$, se placer en $\theta = 0$ permet de trouver le vecteur qui porte $\cos\theta$ et de même, comme $\cos(\pi/2) = 0$ se placer en $\theta = \pi/2$ permet de trouver le vecteur qui porte $\sin\theta$.*

3 On peut évidemment inverser les équations précédentes, mais il est plus intéressant de raisonner aussi par projections.

$$\vec{u}_x = \cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta \qquad \vec{u}_y = \sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta \qquad \vec{u}_z = \vec{u}_z$$

4 Comme $|\vec{u}_r|^2 = \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r$, alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\vec{u}_r|^2 = 2\vec{u}_r \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t}$$

mais par ailleurs $|\vec{u}_r|^2 = 1$ donc $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\vec{u}_r|^2 = 0$. On en déduit

$$\vec{u}_r \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = 0\,,$$

ce qui signifie bien que $\vec{u}_r$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t}$ sont perpendiculaires.

Exercice 2 : Descente dans un parking souterrain

Le mouvement est implicitement étudié par rapport au référentiel terrestre : il est sous-entendu que toutes les dérivées sont calculées par rapport à ce référentiel.

1 L'énoncé indique que la voiture reste à distance constante d'un axe : cet axe a donc une importance particulière pour le mouvement, est il est naturel de le choisir comme axe z d'un repérage cylindrique. Ce repérage est rendu d'autant plus naturel par l'hypothèse de distance constante.

2 Par hypothèse, $r(t) = R = \text{cte}$. Par ailleurs comme la voiture se déplace à vitesse constante sur une rampe d'inclinaison constante, sa vitesse de déplacement vertical V_z est constante, donc $z(t) = V_z t + z_0$ où z_0 est déterminé par une condition initiale.

3 En repérage cylindrique, le vecteur vitesse vaut

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{u}_z \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta + V_z\,\vec{u}_z\,.}$$

Le vecteur accélération s'écrit lui

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{u}_\theta + \ddot{z}\,\vec{u}_z \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta\,.}$$

4 La voiture est supposée rouler à vitesse uniforme V dans le parking. En le traduisant sur la norme du vecteur vitesse,

$$|\vec{v}|^2 = V^2 \qquad \text{soit} \qquad R^2\dot{\theta}^2 + V_z^2 = V^2$$

On déduit de cette équation que la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est constante, et par conséquent $\ddot{\theta} = 0$. L'accélération se simplifie alors en

$$\boxed{\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r\,,}$$

elle est donc bien toujours radiale.

Exercice 3 : Duel de McLaren

1 La voiture A d'Alonso entame son virage dès qu'il passe par l'axe Δ et parcourt un demi-cercle, de longueur

$$D_A = \frac{2\pi\,R_A}{2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{D_A = \pi\,R_A = 283\,\mathrm{m}\,.}$$

En revanche, la voiture B de Button continue en ligne droite sur une distance $R_A - R_B$ avant d'entamer son virage, et parcourt de nouveau la même distance en ligne droite avant la sortie du virage. Ainsi,

$$\boxed{D_B = 2(R_A - R_B) + \pi R_B = 266\,\mathrm{m}\,.}$$

La voiture B parcourt moins de distance que la voiture A, mais **il est impossible d'en conclure quoi que ce soit** puisqu'on ne sait pas si les deux trajectoires sont parcourues à la même vitesse.

2 Lorsqu'elles sont sur la partie circulaire de leur trajectoire, parcourue à vitesse constante (en norme), l'accélération (en norme) des voitures vaut

$$a = \frac{v^2}{R} = 0{,}8g$$

puisque les pilotes prennent tous les risques. Ainsi,

$$\boxed{v_A = \sqrt{0{,}8\,g\,R_A} = 26{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \qquad \text{et} \qquad v_B = \sqrt{0{,}8\,g\,R_B} = 24{,}3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

3 Calculons pour conclure le temps mis par chacun des pilotes pour passer le virage,

$$\Delta t = \frac{D}{v}$$

ce qui donne numériquement

$$\boxed{\Delta t_A = 10{,}6\,\mathrm{s} \qquad \text{et} \qquad \Delta t_B = 10{,}9\,\mathrm{s}}$$

Finalement, Alonso va plus vite que Button pour parcourir le virage : **la meilleure trajectoire est la plus extérieure des deux** ... ne vérifiez pas en rentrant chez vous ;)

Exercice 4 : La face cachée de la Lune

1 Représentons le mouvement de la Lune dans le référentiel géocentrique, figure 1. Pour représenter son mouvement, on utilise le fait que la face visible depuis la Terre est toujours la même. Ainsi, **la Lune a un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe $(T, \vec{u}_z)$**.

2 La Lune effectue une révolution complète, c'est-à-dire une rotation de 2π en $\Delta T = 27{,}3$ jours. Sa vitesse angulaire de rotation vaut donc

$$\boxed{\Omega = \frac{2\pi}{\Delta T} = 2{,}7\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}\,.}$$

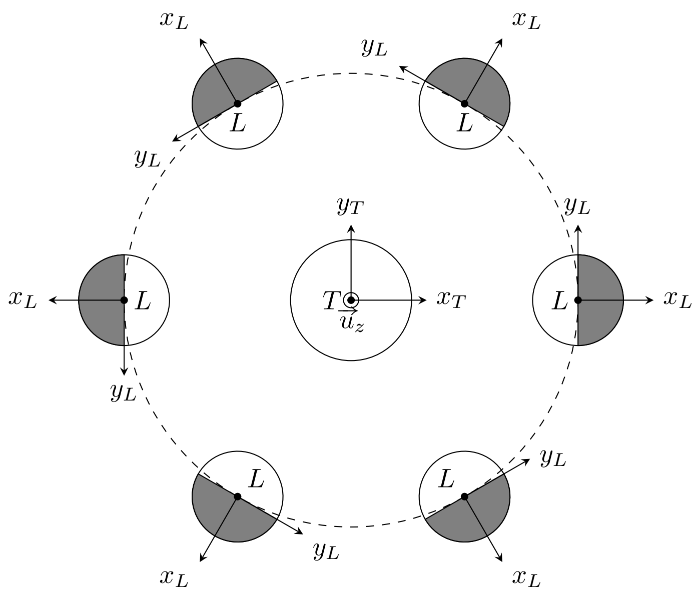


Figure 1 – Mouvement de la Lune dans le référentiel géocentrique. La face cachée de la Lune est grisée.

3 Le centre de la Lune a une trajectoire circulaire, parcourue à vitesse angulaire constante. L'analogue à la base polaire locale de centre T est ici la base $(\vec{u}_{xL}, \vec{u}_{yL})$. En traduisant les résultats établis en cours, on aboutit à

$$\boxed{\vec{v}_{L/\text{géo}} = D\,\Omega\,\vec{u}_{yL} \qquad \text{et} \qquad \vec{a}_{L/\text{géo}} = -D\,\Omega^2\,\vec{u}_{xL}\,.}$$

Numériquement, $v_{L/\text{géo}} = 1{,}0 \cdot 10^3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

4 Dans le référentiel sélénocentrique, la Lune a un **mouvement de rotation** autour de l'axe $(L, \vec{u}_z)$. On voit à partir du schéma que comme dans le référentiel géocentrique, elle fait un tour sur elle-même en 27,3 jours.

5 On en déduit que la vitesse Ω_p de rotation propre de la Lune sur elle-même est la même que la vitesse de rotation Ω de la Lune autour de la Terre,

$$\boxed{\Omega_\text{p} = \Omega = 2{,}7\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\,.}$$

Exercice 5 : Glissade sur un igloo

Le système étudié est l'enfant esquimau, en mouvement dans le référentiel terrestre. Il est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la réaction $\vec{N}$ de l'igloo, qui est sans frottement. Dans la base polaire, voir figure 2,

$$\vec{N} = N\,\vec{e}_r \qquad \text{et} \qquad \vec{P} = -m\,g\,\cos\theta\,\vec{e}_r + m\,g\,\sin\theta\,\vec{e}_\theta$$

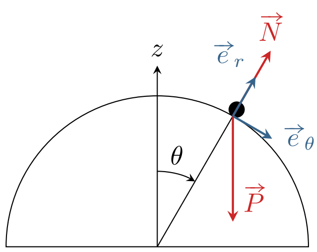


Figure 2 – Glissade d'un enfant esquimau.

1 Exprimons l'accélération de l'enfant : comme l'igloo est sphérique alors $r = R = \text{cte}$.

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r \qquad \text{donc} \qquad \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \qquad \text{et} \qquad \vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

> ***Rappel :*** $\dot{\vec{e}}_r = \dot\theta\,\vec{e}_\theta$ et $\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot\theta\,\vec{e}_r$.

D'après le théorème de la résultante cinétique,

$$\begin{cases} -mR\dot\theta^2 = N - mg\cos\theta \\ mR\ddot\theta = mg\sin\theta \end{cases}$$

L'équation du mouvement est celle projetée sur $\vec{e}_\theta$. L'équation projetée sur $\vec{e}_r$ contient en effet une force inconnue N, et ne permet donc pas de déterminer le mouvement ... par contre elle permet de déterminer cette force.

2 L'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot\theta - \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$

ce qui donne en multipliant par $\dot\theta$

$$\ddot\theta\dot\theta - \frac{g}{R}\sin\theta\dot\theta = 0\,.$$

Intégrons l'équation par rapport au temps,

$$\frac{\dot\theta^2}{2} + \frac{g}{R}\cos\theta = C$$

Comme l'enfant s'élance de $\theta = 0$ sans vitesse ($\dot\theta(0) = 0$), donc

$$C = \frac{g}{R}$$

soit finalement

$$\boxed{\dot\theta^2 = \frac{2g}{R}\left(1-\cos\theta\right)\,.}$$

> *La méthode pour passer d'une équation sur $\ddot\theta$ à une équation portant sur $\dot\theta^2$ est à retenir. C'est la même méthode qui permet d'établir le théorème de l'énergie cinétique, et on retrouve des méthodes voisines pour démontrer les expressions des énergies potentielles ... et aussi celles de l'énergie stockée dans un condensateur ou une bobine.*
>
> *Cependant, nous verrons dans un prochain chapitre qu'il est bien plus rentable pour cette question d'utiliser le théorème de l'énergie cinétique plutôt que le théorème de la résultante cinétique.*

3 D'après le TRC en projection radiale,

$$-mR\dot\theta^2 = N - mg\cos\theta \qquad \text{donc} \qquad N = -2gm\left(1-\cos\theta\right) + mg\cos\theta \qquad \text{soit} \qquad \boxed{N = mg(3\cos\theta - 2)}$$

4 L'enfant décolle de l'igloo si la force N de la liaison avec l'igloo s'annule, donc pour un angle θ_d tel que

$$3\cos\theta_\mathrm{d} - 2 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\theta_\mathrm{d} = \arccos\frac{2}{3} = 48°\,.}$$

> *Une façon évidente de se rendre compte « qu'il se passe quelque chose » pour $\theta = \theta_d$ est de remarquer qu'au delà la norme de N deviendrait* négative *... ce qui n'a bien sûr aucun sens.*

Exercice 6 : Mouvement circulaire avec ressort

Le système est évident, c'est le point matériel, en mouvement par rapport au référentiel terrestre, que l'on suppose galiléen. Il va tourner autour du point O : ce sont donc les coordonnées cylindriques qui sont adaptées.

1 Le cercle a forcément **un rayon égal à L** : à $t = 0$, M est déjà sur le cercle trajectoire. De plus, le vecteur vitesse est à tout instant tangent à la trajectoire, donc orthoradial pour un mouvement circulaire : **$\vec{v}_0$ doit être dirigée selon $\pm\vec{e}_\theta$**. On fait le choix de ne garder que le signe $+$ pour la suite des calculs, le signe $-$ revient simplement à changer le sens de parcours du cercle.

2 Supposons le mouvement circulaire de rayon L. Dans ce cas,

$$\overrightarrow{OM} = L\vec{e}_r \qquad \text{donc} \qquad \vec{v} = L\dot\theta\vec{e}_\theta \qquad \text{et} \qquad \vec{a} = L\ddot\theta\vec{e}_\theta - L\dot\theta^2\vec{e}_r$$

> ***Rappel :*** $\dot{\vec{e}_r} = \dot\theta\,\vec{e}_\theta$ et $\dot{\vec{e}_\theta} = -\dot\theta\,\vec{e}_r$.

Le point M est soumis à trois forces :
▷ son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{e}_z$;
▷ la réaction du support, normale car les frottements sont négligés : $\vec{R}_N = R_N\,\vec{e}_z$;
▷ la force de rappel exercée par le ressort :

$$\vec{f} = -k(\ell - \ell_0)\,\vec{u}_{\text{sortant}} = -k(L - \ell_0)\,\vec{e}_r\,.$$

D'après le PFD, on a en projection

$$\begin{cases} -mL\dot\theta^2 = -k(r - \ell_0) \\ mL\ddot\theta = 0 \\ m\ddot z = -mg + R_N \end{cases}$$

Intégrer la projection sur $\vec{e}_\theta$ conduit à

$$\dot\theta = \text{cte}\,,$$

c'est-à-dire que **le mouvement est uniforme**.

> *Une méthode plus rapide vue dans un prochain chapitre serait d'utiliser le théorème de l'énergie cinétique : toutes les forces sont orthogonales au vecteur vitesse, donc aucune ne travaille, donc la vitesse est de norme constante.*

3 L'accélération pour un mouvement circulaire uniforme à vitesse v_0 vaut

$$\vec{a} = -\frac{{v_0}^2}{L}\,\vec{e}_r$$

donc ici

$$-m\frac{{v_0}^2}{L} = -k(L - \ell_0) \qquad \text{soit} \qquad {v_0}^2 = \frac{kL(L - \ell_0)}{m}$$

Comme ${v_0}^2$ doit être positif, alors **un mouvement circulaire n'est possible que si $L > \ell_0$**, et

$$\boxed{\vec{v}_0 = \pm\sqrt{\frac{kL(L-\ell_0)}{m}}\,\vec{e}_\theta\,.}$$

.

> *La condition sur L peut peut se comprendre intuitivement en pensant « force centrifuge » (concept physiquement subtil et compliqué, pas au programme de la filière PTSI-PT, mais utilisons-le pour comprendre) : la force centrifuge tend à éloigner le point matériel du centre de la trajectoire. Pour qu'un mouvement circulaire soit possible, il faut que le ressort ait lui pour effet de ramener M vers le centre, ce qui n'est possible que si le ressort est étendu, donc $L > \ell_0$. Si le ressort est initialement comprimé, il éloigne M de O, et le mouvement ne peut pas être circulaire.*

Exercice 7 : Enrouler le fil, dérouler le fil ...

1 La longueur de fil enroulée lorsque I se trouve à l'angle θ vaut $R\theta$. Ainsi,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} = R\,\vec{e}_r + (L - R\theta)\,\vec{e}_\theta\,.$$

En dérivant,

$$\vec{v} = R\,\dot{\vec{e}_r} + (-R\dot\theta)\,\vec{e}_\theta + (L - R\theta)\,\dot{\vec{e}_r} = R\dot\theta\,\vec{e}_\theta + (-R\dot\theta)\,\vec{e}_\theta + (L - R\theta)(-\dot\theta\,\vec{e}_r) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\vec{v} = (R\theta - L)\dot\theta\,\vec{e}_r\,.}$$

Et de même,

$$\vec{a} = (R\dot\theta)\dot\theta\,\vec{e}_r + (R\theta - L)\ddot\theta\,\vec{e}_r + (R\theta - L)\dot\theta\,\dot{\vec{e}_r} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\vec{a} = \left[R\dot\theta^2 + (R\theta - L)\ddot\theta\right]\,\vec{e}_r + (R\theta - L)\dot\theta^2\,\vec{e}_\theta\,.}$$

2 M n'est soumis qu'à la tension du fil $\vec{T} = -T\,\vec{e}_\theta$, dirigée de M vers I. D'après le PFD,

$$\begin{cases} mR\dot\theta^2 + m(R\theta - L)\ddot\theta = 0 \\ m(R\theta - L)\dot\theta^2 = -T \end{cases}$$

Sur la projection radiale on reconnaît, à la masse près, la dérivée de v_r, composante radiale de la vitesse (ce qui est évident compte tenu de la façon dont on a établi l'expression de l'accélération). Ainsi, par « intégration »,

$$(R\theta - L)\,\dot\theta = \text{cte}$$

En se plaçant à l'instant initial où $\vec{v} = -v_0\,\vec{e}_r$ pour déterminer la constante, on en déduit qu'à tout instant

$$\boxed{(R\theta - L)\,\dot\theta = -v_0\,.}$$

3 La relation précédente s'écrit

$$R\theta\dot\theta - L\dot\theta + v_0 = 0$$

soit en intégrant

$$\frac{1}{2}R\theta^2 - L\theta + v_0 t = \text{cte}\,.$$

Or à l'instant $t = 0$, $\theta = 0$, donc la constante est nulle. On en déduit la relation

$$\boxed{\frac{1}{2}R\theta^2 - L\theta + v_0 t = 0\,.}$$

Lorsque tout le fil est enroulé autour de la bobine, $t = \tau$ et $\theta = L/R$ d'où

$$\frac{1}{2}\frac{L^2}{R} - \frac{L^2}{R} + v_0\tau = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\tau = \frac{L^2}{2Rv_0}\,.}$$

4 Cherchons la valeur de θ à t donné. La question précédente nous donne une équation polynômiale, de discriminant

$$\Delta = L^2 - 4 \times \frac{1}{2}R \times v_0 = L^2 - 2Rv_0 t = L^2\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) > 0$$

car on a nécessairement $t < \tau$. On a donc deux solutions mathématiques pour θ, la solution physique étant nécessairement positive,

$$\theta(t) = \frac{L + \sqrt{L^2\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)}}{R} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\theta(t) = \frac{L}{R}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{t}{\tau}}\right)\,.}$$

5 La tension du fil est donnée par l'autre composante du PFD,

$$T = m(L - R\theta)\dot\theta^2 = \frac{m{v_0}^2}{L - R\theta}$$

d'où en remplaçant

$$T = \frac{m{v_0}^2}{L\sqrt{1 - \dfrac{t}{\tau}}}$$

qui est toujours positif, ce qui indique que **le fil est toujours tendu**.