

Mouvements dans un champ de force central et conservatif

Donnée pour tous les exercices : constante de gravitation $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

Exercices

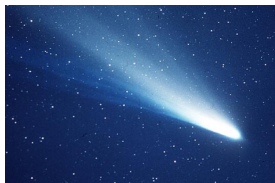
Exercice 1 : Constante des aires

[◆◆◆]

Nous avons établi en cours l'expression de la constante des aires $C = r^2 \dot{\theta}$ à partir de la conservation du moment cinétique. Retrouver ce résultat à partir de la loi de la quantité de mouvement : projeter sur \vec{u}_θ , multiplier par r , et intégrer.

Exercice 2 : Comète de Halley

[◆◆◆]



La comète de Halley est la plus connue. La première mention de son observation date de 611 av. J.-C. en Chine, et on la retrouve tout au long de l'Antiquité et du Moyen-Âge ... évidemment sans savoir qu'il s'agit d'une seule comète. Cette découverte a été formalisée en 1705 par Edmond Halley, qui publia un livre avançant que les observations en 1531, 1607 et 1682 concernaient en fait la même comète. Son prochain passage est prévu en 2061.

On sait aujourd'hui que la comète de Halley suit une trajectoire elliptique de période de révolution autour du Soleil 76 ans, sa distance minimale au Soleil étant de $d_{\min} = 0,59$ unités astronomiques.

Données :

- ▷ Une unité astronomique correspond à la distance moyenne Terre-Soleil, soit $1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$;
- ▷ Masse solaire $m_S = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.

- 1 - Faire un schéma de la trajectoire indiquant la position du Soleil et d_{\min} .
- 2 - Dédurre de la troisième loi de Kepler la plus grande distance au Soleil de la comète.
- 3 - Une conique est décrite par une équation polaire de la forme

$$r(\theta) = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$$

où l'origine du repérage polaire est prise sur un des foyers de la conique. Déterminer le paramètre p et l'excentricité e de la trajectoire de la comète de Halley.

Exercice 3 : Modèle classique de trou noir

[◆◆◆]

En 1783, le physicien britannique John Michell eut pour la première fois l'idée de l'existence d'astres dont la gravitation serait si forte que même la lumière ne pourrait s'en échapper. L'idée fut reprise par Pierre-Simon Laplace¹ en 1796, puis oubliée car elle semblait trop abstraite. Elle ressurgit en 1916 dans le cadre de la relativité générale lorsque Karl Schwarzschild vit apparaître un tel objet dans les solutions des équations d'Einstein, que l'on peut voir comme l'analogie relativiste du principe fondamental de la dynamique. Ce concept fut développé par la suite, et la dénomination de trou noir s'est imposé dans les années 1960. On pense aujourd'hui en avoir détecté plus d'une centaine (la liste est sur Wikipédia), mais comme rien ne peut s'échapper d'un trou noir la détection ne peut être qu'indirecte.

Cet exercice propose de calculer l'ordre de grandeur de la taille et de la densité d'un trou noir dans un modèle heuristique de physique newtonienne. Considérons pour cela un point matériel M de masse m à proximité d'un astre sphérique de masse m_0 , de rayon R et de centre O . Cet astre est supposé suffisamment massif pour que l'on puisse considérer que M n'est soumis qu'à la force gravitationnelle due à l'astre. On étudie le mouvement de M dans le référentiel \mathcal{R} astrocentrique, que l'on suppose galiléen.

1. Celui-là même qui a introduit la transformation de Laplace ... et qui a également élaboré une théorie dynamique des marées encore utilisée aujourd'hui pour prévoir les heures de pleine et basse mer.

- 1 - Exprimer la force gravitationnelle ressentie par M ainsi que l'énergie potentielle dont elle dérive en la supposant nulle à l'infini. Exprimer l'énergie mécanique de M . Celle-ci se conserve-t-elle ?
- 2 - Montrer que le mouvement de M est nécessairement plan. M étant alors repéré par ses coordonnées polaires, montrer que $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement.
- 3 - Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$$

en introduisant l'énergie potentielle effective $E_{p,\text{eff}}(r)$ dont on précisera l'expression en fonction de r .

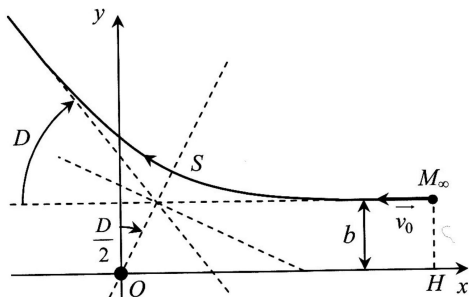
- 4 - Tracer l'allure de la courbe représentative de $E_{p,\text{eff}}(r)$. À l'aide d'un raisonnement graphique, déterminer pour quelles valeurs de E_m le point M peut échapper à l'attraction de l'astre, c'est-à-dire se trouver dans un état de diffusion.
- 5 - En déduire la vitesse de libération v_{lib} à la surface de cet astre.
- 6 - Dans la conception classique de Michell, un trou noir est un astre dont la vitesse de libération est supérieure à $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer le rayon de Schwarzschild R_S de l'astre, c'est-à-dire le rayon maximal qu'il doit avoir pour être un trou noir.
- 7 - Calculer numériquement R_S pour le Soleil ($M_S = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$) et pour la Terre ($M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$). En déduire la densité minimale d'un trou de noir de cette masse.
- 8 - Quelles sont les deux contradictions internes à cette approche ?

Notons toutefois que malgré les deux limites évoquées, le rayon de Schwarzschild donne le bon ordre de grandeur de la taille d'un trou noir de masse m .

Exercice 4 : Expérience de Rutherford



Entre 1909 et 1911, Ernest Rutherford et ses deux étudiants Hans Geiger et Ernest Marsden ont réalisé et interprété une expérience consistant à bombarder une mince feuille d'or avec des particules α , dont Rutherford avait précédemment montré qu'il s'agit de noyaux d'hélium. Ils observèrent que la plupart de ces particules traversaient la feuille sans être affectées (donc ne recontraint que du vide), mais que certaines étaient déviées, parfois très fortement. En reliant les angles de déviation aux dimensions microscopiques, cela permit la découverte du noyau atomique et l'estimation de sa taille.



Modélisons l'expérience en considérant une particule α de masse m et de charge $2e$, venant de l'infini avec la vitesse $-v_0 \vec{e}_x$ et s'approchant avec un paramètre d'impact b d'un unique noyau cible de numéro atomique Z . Le paramètre d'impact est la distance minimale entre le prolongement de la trajectoire rectiligne de la particule et le noyau situé en O . Le noyau reste pratiquement immobile dans le référentiel terrestre : on travaille dans ce référentiel supposé galiléen, le repère étant situé sur la position O du noyau. La trajectoire suivie par la particule α est la branche d'hyperbole représentée ci-contre.

Données : $\varepsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $m = 6,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ et $Z_{\text{Au}} = 79$.

- 1 - Exprimer la force électrique subie par la particule α sous la forme $\vec{F} = K/r^2 \vec{e}_r$ et exprimer l'énergie potentielle d'interaction.
- 2 - Montrer que l'énergie mécanique E_m de la particule α est une constante du mouvement et donner sa valeur à partir des conditions initiales.
- 3 - Montrer que le moment cinétique \vec{L}_O de la particule α en O est un vecteur constant et donner la valeur de cette constante à l'aide des conditions initiales. La particule étant repérée par ses coordonnées polaires dans le plan (Oxy) , montrer que \vec{L}_O s'exprime de manière simple en fonction de r et $\dot{\theta}$.
- 4 - Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_p^*(r)$$

en explicitant la fonction $E_p^*(r)$. Comment l'appelle-t-on ?

- 5 - On note S la position de la particule α pour laquelle elle passe au plus près du noyau d'or, et on note $r_{\text{min}} = OS$ la distance minimale d'approche. Simplifier l'expression de E_m lorsque $r = r_{\text{min}}$. En déduire

$$r_{\text{min}} = \frac{K}{mv_0^2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{mbv_0^2}{K} \right)^2} \right]$$

6 - On peut montrer que l'angle de déviation D de la particule est donnée par

$$\tan \frac{D}{2} = \frac{K}{m b v_0^2}.$$

Calculer b puis r_{\min} pour $D_1 = 60^\circ$ et $D_2 = 180^\circ$ (particule renvoyée vers l'arrière). En déduire l'ordre de grandeur de la taille du noyau d'or.

Exercice 5 : Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

[◆◆◆]

L'expérience de Rutherford a prouvé qu'un atome avait une structure lacunaire, composée essentiellement de vide. Ernest Rutherford propose donc un modèle planétaire de l'atome d'hydrogène, où l'électron (masse m , charge $-e$) est en orbite circulaire de rayon r autour d'un proton P (charge $+e$) qu'on supposera fixe dans le référentiel d'étude.

Données : constante de Planck $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$; vitesse de la lumière dans le vide $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$; charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; masse de l'électron $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; $1,0 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

1 - Exprimer la force exercée par le proton sur l'électron. En déduire l'énergie potentielle à laquelle est soumis l'électron.

2 - Déterminer la relation entre la vitesse v de l'électron et le rayon r de l'orbite, puis exprimer l'énergie mécanique de l'électron en fonction du rayon r de l'orbite.

3 - Relier l'énergie potentielle de l'électron à son énergie mécanique.

Pour rendre compte du spectre de raies discret de l'atome d'hydrogène et de sa stabilité, Niels Bohr postule que l'électron ne peut occuper que certaines orbites stables de rayons r_n tel que le moment cinétique de l'électron par rapport au point P vérifie une condition de quantification

$$L_P(n) = n\hbar$$

où n est un entier naturel non nul appelé nombre quantique principal et $\hbar = h/2\pi$ la constante de Planck réduite.

4 - Exprimer le moment cinétique de l'électron L_P en fonction de r_n seulement.

5 - En déduire en fonction de n les rayons r_n des orbites permises pour l'électron.

6 - Montrer alors que l'énergie mécanique de l'électron peut s'écrire sous la forme

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}.$$

Calculer numériquement E_0 .

7 - La condition de quantification peut se retrouver de manière élégante en termes d'ondes de matière. Rappelons que la longueur d'onde de de Bröglie associée à une particule se déplaçant à la vitesse v vaut $\lambda = h/mv$. Montrer que la condition de quantification peut s'écrire sous la forme

$$2\pi r_n = n\lambda.$$

Comment interpréter cette condition en termes ondulatoires?

Annale de concours

Exercice 6 : Gravity

[oral CCP, ◆◆◆]



Dans le film Gravity, des astronautes effectuent une mission de maintenance sur le télescope spatial Hubble lorsque leur navette est détruite. Leur seul espoir semble être de rejoindre la Station spatiale internationale, l'ISS. Le but de cet exercice est de définir dans quelles conditions ce voyage spatial est possible.

On suppose que le télescope Hubble et l'ISS sont en orbite circulaire basse autour de la terre, respectivement à 600 km et 400 km au-dessus de la Terre, dans le même plan. Le rayon de la terre est $R_T = 6400 \text{ km}$; \mathcal{G} est la constante universelle de gravitation.

1 - Exprimer la force de gravitation exercée par la Terre, de masse M_0 , sur l'astronaute et son équipement, de masse m . Donner l'expression de l'énergie potentielle de gravitation.

2 - En exprimant le principe fondamental de la dynamique pour un système en rotation uniforme, établir la troisième loi de Kepler. Exprimer l'énergie de l'astronaute sur son orbite, en fonction de \mathcal{G} , m , M_0 et r , rayon de l'orbite.

3 - Déterminer numériquement la période T_S de l'ISS, sachant que la période du télescope vaut $T_H = 97 \text{ min}$. En déduire numériquement la vitesse du télescope v_H , puis celle de la station spatiale v_S sur leur orbite respective.

Pour rejoindre la station spatiale, l'astronaute envisage une orbite de transfert elliptique, dont l'apogée de distance r_H par rapport au centre de la Terre est sur l'orbite du télescope, et le périégée de distance r_S par rapport au centre de la terre est sur l'orbite de l'ISS.

4 - Représenter la trajectoire suivie par l'astronaute.

5 - Exprimer l'énergie de l'astronaute sur cette trajectoire en fonction de \mathcal{G} , M_0 , m , r_H et r_S .

6 - Exprimer la vitesse de l'astronaute à l'apogée, en fonction de r_H , T_H et r_S . Par analogie, en déduire l'expression de la vitesse au périégée en fonction de r_S , T_S et r_H . Calculer les valeurs numériques. Techniquement comment l'astronaute peut-il gérer sa vitesse ?

7 - Quelle est la durée de ce voyage ?

Résolution de problème

Pour aborder un exercice de type résolution de problème, il peut notamment être utile de faire un schéma modèle, d'identifier et nommer les grandeurs pertinentes, d'utiliser l'analyse dimensionnelle, de proposer des hypothèses simplificatrices, de décomposer le problème en des sous-problèmes simples, etc. Le candidat peut également être amené à proposer des valeurs numériques raisonnables pour les grandeurs manquantes ... et toutes les valeurs données ne sont pas forcément utiles. Le tout est évidemment à adapter à la situation proposée !

Exercice 7 : Descente d'un satellite

[oral CCP, ♦♦♦]

Un satellite est en orbite circulaire autour de la Terre à 800 km d'altitude. Sur cet orbite, on constate que son altitude diminue de 1 m durant une période. On décrit les frottements avec l'atmosphère par une force de frottement fluide quadratique $\vec{f} = -\alpha m v \vec{v}$, où \vec{v} désigne la vitesse du satellite et m sa masse. Le coefficient α est supposé indépendant de l'altitude du satellite : $\alpha = 1,5 \cdot 10^{-15} \text{ m}^{-1}$.

Au bout de combien de temps l'altitude aura-t-elle baissé de 10 km ?

Données : masse de la Terre : $M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; rayon terrestre : $R_T = 6371 \text{ km}$.

Mouvements dans un champ de force central et conservatif

Exercices

Exercice 1 : Constante des aires

- ▷ Système : point matériel M de masse m ;
- ▷ Référentiel : peu importe car on se place dans un cas général, il faut seulement qu'il soit galiléen et que le centre de force soit un point fixe dans ce référentiel ;
- ▷ Bilan des forces : M n'est soumis qu'à une force centrale $\vec{F} = F_r(r)\vec{e}_r$ dans un repérage polaire de centre le centre de force.
- ▷ Loi de la quantité de mouvement :

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

ce qui donne en termes de composantes

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

Considérons la projection sur \vec{u}_θ en la multipliant par \dot{r} comme indiqué par l'énoncé,

$$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0$$

On identifie cette expression à la forme

$$u'v + uv' = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u = r^2 \\ v = \dot{\theta} \end{cases}$$

Ainsi, en procédant à l'intégration, on trouve

$$uv = \text{cte} \quad \text{soit} \quad \boxed{C = r^2\dot{\theta} = \text{cte.}}$$

Exercice 2 : Comète de Halley

- 1 Voir figure 1.

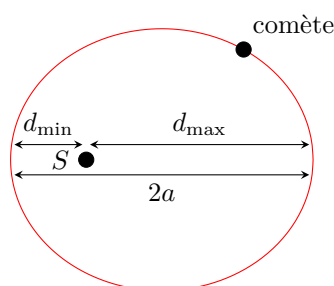


Figure 1 – Schéma de la trajectoire de la comète de Halley. Le Soleil S est un des foyers de l'ellipse. On représente en outre les distances minimale d_{\min} et maximale d_{\max} de la comète au Soleil, ainsi que le grand axe $2a$ de l'ellipse.

- 2 La troisième loi de Kepler permet de déterminer le demi-grand axe a , puisque

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{m_S \mathcal{G}} \quad \text{d'où} \quad a = \left(\frac{T^2 m_S \mathcal{G}}{4\pi^2} \right)^{1/3}.$$

Or d'après la figure

$$d_{\max} + d_{\min} = 2a$$

d'où on déduit

$$d_{\max} = 2 \left(\frac{T^2 m_S \mathcal{G}}{4\pi^2} \right)^{1/3} - d_{\min} = 5,3 \cdot 10^{12} \text{ m} = 1,1 \cdot 10^2 \text{ u.a.}$$

3 D'après le schéma,

$$d_{\max} = r(0) = \frac{p}{1-e} \quad \text{et} \quad d_{\min} = r(\pi) = \frac{p}{1+e}$$

d'où on déduit

$$\frac{d_{\min}}{d_{\max}} = \frac{1-e}{1+e} \quad \text{soit} \quad e = \frac{1 - \frac{d_{\min}}{d_{\max}}}{1 + \frac{d_{\min}}{d_{\max}}} \quad \text{donc} \quad \boxed{e = \frac{d_{\max} - d_{\min}}{d_{\max} + d_{\min}} = 0,97}$$

et de même

$$\boxed{p = d_{\min}(1+e) = 1,1 \text{ u.a.}}$$

Exercice 3 : Modèle classique de trou noir

1 Voir cours.

$$\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{et} \quad E_p = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{r}$$

2 Voir cours : c'est une conséquence de la conservation du moment cinétique.

3 Voir cours : on remplace $\dot{\theta}$ par C/r^2 dans l'expression de l'énergie mécanique, ce qui permet d'identifier l'énergie potentielle effective

$$E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G} m_0 m}{r}.$$

Attention : c'est une « fausse » énergie potentielle, qui contient un terme issu de l'énergie cinétique. On peut s'en rendre compte en notant la présence de la constante des aires C , qui dépend des conditions initiales.

4 Voir cours et figure 2. Le point M peut échapper à l'attraction de l'astre si sa trajectoire est non-bornée pour $r \rightarrow \infty$, c'est-à-dire pour $E_m \geq 0$.

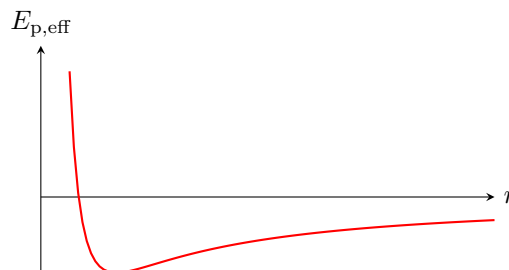


Figure 2 – Profil d'énergie potentielle effective au voisinage d'un astre sphérique.

5 Voir cours. On exprime la valeur de l'énergie mécanique à la limite d'un état de diffusion ($E_m = 0$) à la surface de l'astre (distance R , vitesse v_{lib}). On peut le retrouver plus qualitativement en exprimant la conservation de l'énergie mécanique entre la surface de l'astre et une distance infinie en indiquant qu'à la limite la particule s'est infiniment éloignée de l'astre ($r \rightarrow \infty$) mais n'a plus qu'une vitesse nulle ($v = 0$). Ainsi,

$$\frac{1}{2} m v_{\text{lib}}^2 - \frac{\mathcal{G} m_0 m}{R} = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2\mathcal{G} m_0}{R}}}$$

Attention à bien utiliser l'énergie cinétique et l'énergie potentielle « complètes », et surtout pas l'énergie potentielle effective. La vitesse v_{lib} a une composante orthoradiale, et la constante des aires ne doit pas rester dans le résultat.

6 Par définition du rayon de Schwarzschild, si l'astre a pour rayon R_S alors sa vitesse de libération est égale à c . On en conclut que l'astre est un trou noir si

$$\boxed{R < R_S = \frac{2\mathcal{G} m_0}{c^2}}$$

7 Numériquement,

$$R_{S,S} = 3,0 \text{ km} \quad \text{et} \quad R_{S,T} = 9,0 \text{ mm}$$

ce qui donne en termes de densité

$$\rho_S = 7,7 \cdot 10^{19} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad \text{et} \quad \rho_S = 8,5 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

C'est phénoménal : imaginez toute la masse de la Terre concentrée dans une balle de babyfoot ou de ping-pong !

8 Une première contradiction consiste à généraliser des résultats de mécanique classique à des vitesses égales à la vitesse de la lumière, qui se rapportent donc au **domaine de la relativité**. La seconde contradiction est la généralisation de résultats de gravitation, qui s'appliquent donc aux particules massives, à la lumière, alors qu'on sait que **les photons sont sans masse**.

Exercice 4 : Expérience de Rutherford

1 Plaçons-nous en coordonnées cylindriques d'axe Oz . La particule α étant chargée positivement, elle subit une force de Coulomb répulsive exercée par le noyau placé en O s'écrivant

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\alpha q_{\text{noy}}}{r^2} \vec{e}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r^2} \vec{e}_r$$

ce qui s'écrit bien sous la forme

$$\vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{avec} \quad K = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0}.$$

Si cette force est conservative, alors comme elle est dirigée suivant \vec{e}_r et qu'elle ne dépend que de r elle s'écrit sous la forme

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dr} \vec{e}_r$$

ce qui permet d'identifier

$$\frac{dE_p}{dr} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r^2}$$

et en intégrant avec une constante d'intégration choisie nulle ($E_p(r \rightarrow \infty) = 0$),

$$E_p(r) = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{K}{r}.$$

2 Le poids de la particule α est négligeable devant la force de Coulomb exercée par le noyau. On peut donc considérer qu'elle n'est soumise qu'à cette force, qui dérive d'une énergie potentielle. On en déduit que le mouvement de la particule α est conservatif, donc **E_m est une constante du mouvement**. À l'instant initial, la particule est à l'infini où $E_p = 0$ et elle est animée d'une vitesse initiale de norme v_0 , d'où

$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2.$$

3 Appliquons la loi du moment cinétique à la particule α . Comme la force de Coulomb est dirigée selon \vec{e}_r alors sa droite d'action passe par O et donc son moment en O est nul. Ainsi, d'après la loi du moment cinétique,

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0}$$

donc le moment cinétique évalué en O de la particule α est une constante du mouvement. Calculons-le à partir des conditions initiales. En utilisant les notations de la figure de l'énoncé,

$$\overrightarrow{OM}(0) = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM_\infty} = OH \vec{e}_x + b \vec{e}_y.$$

Ainsi, à l'instant initial,

$$\vec{L}_O(0) = m(OH \vec{e}_x + b \vec{e}_y) \wedge (-v_0 \vec{e}_x) = -m b v_0 (\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x) \quad \text{d'où} \quad \vec{L}_O = m b v_0 \vec{e}_z.$$

Enfin, exprimons \vec{L}_O en coordonnées polaires,

$$\vec{L}_O = m(r\vec{e}_r) \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = m r^2 \dot{\theta}(\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta) \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{L}_O = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z.}$$

4 À un instant quelconque, l'énergie mécanique de la particule α s'écrit sous la forme

$$E_m = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{K}{r}$$

Pour l'écrire comme une fonction de r seulement, il faut remplacer la dépendance en $\dot{\theta}$ par une dépendance en r , ce qui est rendu possible grâce au moment cinétique,

$$\boxed{\vec{L}_O = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = m b v_0 \vec{e}_z,}$$

ce qui permet d'isoler

$$\dot{\theta} = \frac{b v_0}{r^2}$$

et d'écrire ainsi

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m r^2 \frac{b^2 v_0^2}{r^4} + \frac{K}{r},$$

ce qui se met sous la forme demandée

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_p^*(r) \quad \text{avec} \quad E_p^*(r) = \frac{m b^2 v_0^2}{2r^2} + \frac{K}{r}.}$$

Cette fonction $E_p^*(r)$ est l'**énergie potentielle effective** de la particule α .

5 Lorsque la particule passe en S , sa distance à O est par définition minimale et donc $\dot{r} = 0$. L'énergie mécanique est donc tout simplement égale à $E_p^*(r_{\min})$,

$$\boxed{E_m = \frac{m b^2 v_0^2}{2r_{\min}^2} + \frac{K}{r_{\min}}.}$$

Par conservation de l'énergie mécanique, on en déduit

$$\frac{1}{2}m v_0^2 = \frac{m b^2 v_0^2}{2r_{\min}^2} + \frac{K}{r_{\min}}$$

Pour isoler r_{\min} , le plus naturel consiste à multiplier l'équation par r_{\min}^2 ,

$$\frac{1}{2}m v_0^2 r_{\min}^2 = \frac{1}{2}m b^2 v_0^2 + K r_{\min}$$

ce qui conduit à une équation du second degré

$$r_{\min}^2 - \frac{2K}{m v_0^2} r_{\min} - b^2 = 0.$$

Cette équation a pour discriminant

$$\Delta = \left(\frac{2K}{m v_0^2} \right)^2 + 4b^2 > 0$$

et pour solutions

$$r_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\frac{2K}{m v_0^2} \pm \sqrt{\left(\frac{2K}{m v_0^2} \right)^2 + 4b^2} \right).$$

Comme un rayon de coordonnées polaires est par définition positif, seule la solution avec un signe $+$ a un sens physique, d'où on déduit

$$\begin{aligned} r_{\min} &= \frac{1}{2} \left(\frac{2K}{m v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{2K}{m v_0^2} \right)^2 + 4b^2} \right) \\ &= \frac{K}{m v_0^2} \left[1 + \sqrt{1 + 4b^2 \left(\frac{m v_0^2}{2K} \right)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{r_{\min} = \frac{K}{m v_0^2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{b m v_0^2}{K} \right)^2} \right]}$$

6 En inversant la relation donnée, on trouve

$$b = \frac{K}{mv_0^2 \tan(D/2)} = \frac{Ze^2}{2\pi \varepsilon_0 m v_0^2 \tan(D/2)}$$

d'où $b_1 = 2,4 \cdot 10^{-14}$ m et $b_2 = 0$, ce qui donne alors $r_{\min 1} = 2,4 \cdot 10^{-14}$ m et $r_{\min 2} = 2,7 \cdot 10^{-14}$ m. On en déduit qu'un **noyau d'or a une taille de l'ordre de 10^{-14} m** (c'est un assez gros noyau), ce qui est bien plus petit que la taille de l'atome (10^{-10} m) connue par Rutherford.

Exercice 5 : Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

1 Le proton exerce une force de Coulomb attractive sur l'électron. Dans un repérage polaire dans le plan du mouvement,

$$\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

Comme cette force est conservative, alors l'énergie potentielle dont elle dérive est telle que

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dr} \vec{u}_r$$

ce qui conduit à

$$\frac{dE_p}{dr} = \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \quad \text{d'où} \quad E_p(r) = -\frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 r}$$

en prenant comme référence $E_p(r \rightarrow \infty) = 0$.

2 L'électron en mouvement par rapport à un référentiel lié au proton. Son poids est négligeable devant la force électrique exercée par le proton, ce qui a été justifié dans le chapitre sur les particules chargées. D'après la loi de la quantité de mouvement appliquée à l'électron en mouvement circulaire,

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

ce qui donne en projection sur \vec{u}_r

$$-mr\dot{\theta}^2 = -\frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 r^2}.$$

Or $\dot{\theta}^2 = v^2/r^2$, d'où

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 r^2},$$

et ainsi

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 m r}}.$$

L'énergie mécanique s'écrit alors

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 r} = \frac{e^2}{8\pi \varepsilon_0 r} - \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 r} \quad \text{soit} \quad E_m = -\frac{e^2}{8\pi \varepsilon_0 r}$$

3 D'après la question précédente,

$$E_p = 2E_m.$$

| Comme $E_m < 0$ il n'y a pas de contradiction !

4 Comme l'orbite de l'électron est circulaire, son vecteur vitesse est orthoradial alors que son vecteur position est radial. Les deux vecteurs sont donc perpendiculaires. La norme du moment cinétique de l'électron évalué en P vaut donc

$$L_P = r_n \times m v_n \times \sin \frac{\pi}{2} \quad \text{soit} \quad L_P = \sqrt{\frac{m e^2 r_n}{4\pi \varepsilon_0}}.$$

5 L'hypothèse de quantification de Bohr indique que

$$\sqrt{\frac{m e^2 r_n}{4\pi \varepsilon_0}} = n\hbar \quad \text{soit} \quad \frac{m e^2 r_n}{4\pi \varepsilon_0} = n^2 \hbar^2$$

et ainsi

$$r_n = \frac{4\pi \varepsilon_0 \hbar^2}{m e^2} n^2.$$

6 Connaissant r_n , on en déduit les valeurs permises pour l'énergie mécanique,

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi \varepsilon_0} \times \frac{m e^2}{4\pi \varepsilon_0 \hbar^2 n^2} \quad \text{soit} \quad E_n = -\frac{E_0}{n^2} \quad \text{avec} \quad E_0 = \frac{m e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} = 13,6 \text{ eV}$$

7 Repartons de la condition de quantification du moment cinétique,

$$L_P = m r_n v_n = n\hbar.$$

En utilisant la relation de de Bröglie, $v_n = h/m\lambda_n$,

$$m r_n \frac{h}{m\lambda_n} = n\hbar$$

d'où le résultat annoncé,

$$2\pi r_n = n\lambda_n.$$

La longueur $2\pi r_n$ correspond au périmètre de l'orbite circulaire, qui doit ici correspondre à un nombre entier de longueurs d'ondes de de Bröglie : c'est une condition de type **résonance d'onde stationnaires**.

Annale de concours

Exercice 6 : Gravity

[oral CCP]

1 Dans un repère polaire de centre O le centre de la Terre,

$$\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{et} \quad E_p = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{r}.$$

2 Pour un système en rotation uniforme, $r = \text{cte}$ donc $\dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$ et $v = r\dot{\theta} = 0$ donc $\ddot{\theta} = 0$. Le PFD dans la base polaire s'écrit donc

$$-m \frac{v^2}{r} \vec{e}_r = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{soit} \quad v^2 = \frac{\mathcal{G}M_0}{r}.$$

Or le mouvement est par hypothèse circulaire de rayon r et uniforme de période T , donc $v = 2\pi r/T$ et

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M_0}{r}$$

ce qui conduit à la troisième loi de Kepler pour l'orbite circulaire,

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{M_0 \mathcal{G}}$$

L'énergie mécanique de l'astronaute vaut alors

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{\mathcal{G}M_0 m}{r} = \frac{1}{2} m \frac{\mathcal{G}M_0}{r} - \frac{\mathcal{G}M_0 m}{r} \quad \text{donc} \quad E_m = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{2r}.$$

3 D'après la troisième loi de Kepler,

$$\frac{T_S^2}{r_S^3} = \frac{T_H^2}{r_H^3} \quad \text{donc} \quad T_S = T_H \left(\frac{r_S}{r_H} \right)^{3/2} = 93 \text{ min.}$$

On a par ailleurs

$$v_H = \frac{2\pi r_H}{T_H} = 7,6 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad v_S = \frac{2\pi r_S}{T_S} = 7,7 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

(la différence n'apparaît que sur le troisième chiffre significatif ... mais l'énoncé n'en donne que deux pour T_H).

4 Voir figure 3. Le centre de la Terre est forcément l'un des foyers de l'ellipse, d'après la première loi de Kepler.

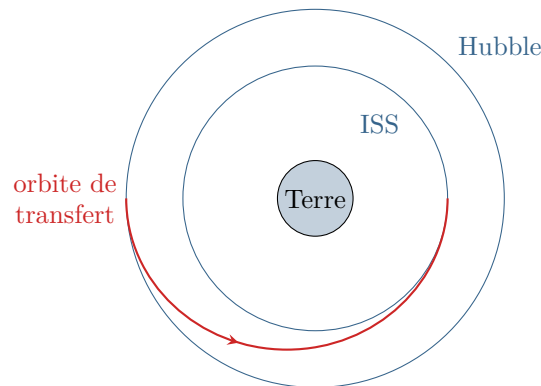


Figure 3 – Orbite de transfert. Les deux orbites de Hubble et de l'ISS sont représentées en bleu, l'orbite de transfert en rouge. Évidemment, la figure n'est pas à l'échelle ... Version couleur sur le site de la classe.

5 L'énergie mécanique en orbite elliptique prend la même forme qu'en orbite circulaire en remplaçant le rayon par le demi-grand axe a (résultat admis dans le cours). Ici, $2a = r_S + r_H$, d'où on déduit

$$E_m = -\frac{\mathcal{G}M_0m}{r_S + r_H}$$

6 À l'apogée, l'astronaute est à distance r_H du centre de la Terre, donc

$$E_m = \frac{1}{2}mv_{\text{apo}}^2 - \frac{\mathcal{G}M_0m}{r_H} = -\frac{\mathcal{G}M_0m}{r_S + r_H}$$

ce qui donne

$$v_{\text{apo}}^2 = \frac{2\mathcal{G}M_0r_S}{r_H(r_S + r_H)}$$

et en utilisant la troisième loi de Kepler pour faire apparaître la période à la place de $M_0\mathcal{G}$

$$v_{\text{apo}}^2 = \frac{2r_S \times 4\pi^2 r_H^3}{r_H(r_S + r_H) \times T_H^2} \quad \text{d'où} \quad v_{\text{apo}} = \frac{2\pi r_H}{T_H} \sqrt{\frac{2r_S}{r_S + r_H}} = 7,5 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Par analogie (et en vérifiant que le raisonnement se transpose sans problème!),

$$v_{\text{pér}} = \frac{2\pi r_S}{T_S} \sqrt{\frac{2r_H}{r_S + r_H}} = 7,7 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Pour le contrôle de la vitesse, je ne sais pas trop comment l'astronaute peut faire. Les satellites utilisent des moteurs, mais je ne suis pas sûr que l'astronaute en ait !

7 Même sur l'orbite de transfert, l'astronaute n'est soumis qu'à la force exercée par la Terre, et son mouvement vérifie la troisième loi de Kepler. Ainsi, la période T_{transf} à laquelle il parcourt l'orbite de transfert est liée au demi-grand axe $a = r_S + r_H$ par

$$\frac{T_{\text{transf}}^2}{\left(\frac{r_S + r_H}{2}\right)^3} = \frac{4\pi^2}{M_0\mathcal{G}} = \frac{T_H^2}{r_H^3}.$$

Par ailleurs l'astronaute ne parcourt que la moitié de l'orbite : le voyage prend une durée $\Delta t = T_{\text{transf}}/2$, d'où

$$\frac{8 \times 4 \Delta t^2}{(r_S + r_H)^3} = \frac{T_H^2}{r_H^3} \quad \text{soit} \quad \Delta t = \frac{T_H}{\sqrt{32}} \left(1 + \frac{r_S}{r_H}\right)^{3/2} = 47 \text{ min}.$$

Notez que cette durée est celle pour passer de l'orbite de Hubble à celle de l'ISS ... mais pas pour atteindre l'ISS. Sauf coup de chance, l'opération est d'ailleurs mal engagée pour les astronautes : comme la vitesse ne dépend pas de la masse mais que de la distance au centre de la Terre, tous les corps sur la même orbite vont à la même vitesse. À moins d'arriver sur l'orbite juste au bon moment (et c'est comme par hasard ce qui arrive dans le film), les astronautes n'ont aucune chance de rattraper ou d'être rattrapés par l'ISS.

Résolution de problème

Exercice 7 : Descente d'un satellite

[oral CCP]

Compte tenu de la très faible variation d'altitude au cours d'une période, on peut faire l'approximation que tous les résultats établis pour une orbite circulaire demeurent valables en prenant simplement un rayon r dépendant (lentement) du temps. De façon précise, on suppose $\dot{r} \ll r\dot{\theta}$.

Sur une orbite circulaire de rayon R , la vitesse du satellite vaut

$$\vec{v} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_{\text{T}}}{R}} \vec{e}_{\theta}$$

donc la force de frottement s'écrit

$$\vec{f} = -\frac{\alpha \mathcal{G}mM_{\text{T}}}{R} \vec{e}_{\theta}$$

La variation d'énergie mécanique du satellite au cours d'une période est égale au travail de la force de frottement,

$$W = \int_{\text{cercle}} \vec{f} \cdot d\vec{M} = \int_{\text{cercle}} \vec{f} \cdot (Rd\theta \vec{e}_{\theta})$$

ce qui donne

$$W = -\alpha \mathcal{G}mM_{\text{T}} \int_{\text{cercle}} d\theta = -2\pi\alpha \mathcal{G}mM_{\text{T}}.$$

Ainsi, au cours d'une période,

$$\Delta E_{\text{m}} = -2\pi\alpha \mathcal{G}mM_{\text{T}}.$$

Par ailleurs, l'énergie mécanique du satellite en orbite circulaire vaut

$$E_{\text{m}} = -\frac{\mathcal{G}M_{\text{T}}m}{2R}$$

et donc

$$\Delta E_{\text{m}} = \frac{\mathcal{G}M_{\text{T}}m}{2R} - \frac{\mathcal{G}M_{\text{T}}m}{2(R - \Delta R)} \simeq -\frac{\mathcal{G}M_{\text{T}}m}{2} \frac{\Delta R}{R^2}$$

en approximant $R(R - \Delta R) \simeq R^2$. Ainsi, au cours d'une période,

$$-2\pi\alpha \mathcal{G}mM_{\text{T}} = -\frac{\mathcal{G}M_{\text{T}}m}{2} \frac{\Delta R}{R^2} \quad \text{soit} \quad \Delta R = 4\pi R^2 \alpha.$$

Ainsi, pour que l'altitude du satellite diminue de $\Delta h = 10$ km, il faut $\Delta h/\Delta R$ périodes.

Enfin, connaissant le rayon et la vitesse il n'est pas difficile d'estimer la période,

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{\mathcal{G}M_{\text{T}}}},$$

et de conclure sur la durée nécessaire pour que l'altitude diminue de Δh ,

$$\Delta t = \frac{\Delta h T}{\Delta R} = \frac{2\pi R \Delta h}{4\pi R^2 \alpha} \sqrt{\frac{R}{\mathcal{G}M_{\text{T}}}}$$

d'où finalement

$$\Delta t = \frac{\Delta h}{2\alpha \sqrt{R\mathcal{G}M_{\text{T}}}} = 62 \cdot 10^6 \text{ s} \simeq 2 \text{ ans.}$$