Version complétée

Résonance

Plan du cours

I Régime sinusoïdal forcé **2**
- I.A Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux synchrones . . . 2
- I.B Exemple : the circuit RC is back. . . . 3
- I.C Représentation complexe d'un signal sinusoïdal . . . 4
- I.D Fin de l'exemple . . . 5

II Lois de l'électrocinétique en représentation complexe **6**
- II.A Loi des mailles et loi des nœuds. . . . 6
- II.B Impédance et admittance complexe. . . . 6
- II.C Associations de dipôles . . . 7

III Résonance en tension, résonance en élongation **7**
- III.A Exemple en électronique : tension aux bornes du condensateur d'un RLC série . . . 7
- III.B Exemple en mécanique : élongation d'un oscillateur masse-ressort amorti . . . 8
- III.C Étude qualitative. . . . 8
- III.D Étude quantitative : condition d'existence et pulsation de résonance . . . 9
- III.E Acuité de la résonance. . . . 10

IV Résonance en courant, résonance en vitesse **11**
- IV.A Exemple en électronique : courant dans un RLC série . . . 11
- IV.B Exemple en mécanique : vitesse d'un oscillateur masse-ressort amorti . . . 12
- IV.C Étude qualitative. . . . 12
- IV.D Étude quantitative : pulsation de résonance . . . 13
- IV.E Acuité de la résonance. . . . 14

(R) Résultat à connaître par cœur.
(M) Méthode à retenir, mais pas le résultat.
(D) Démonstration à savoir refaire.
(Q) Aspect qualitatif uniquement.

Les paragraphes sans mention en marge sont là pour faciliter votre compréhension ou pour votre culture mais n'ont pas forcément besoin d'être appris en tant que tel.

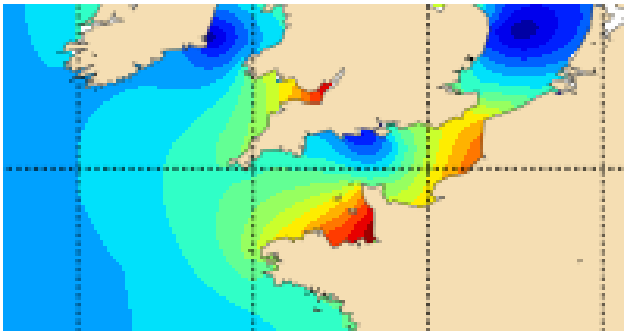
BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Commençons par analyser qualitativement quelques phénomènes de résonance pour en dégager les caractéristiques principales.

Résonance entre deux diapasons

Résonance dans un stade



Amplitude des marées dans la Manche
... même principe que les vagues dans la baignoire !

... mais bien d'autres exemples de la vie quotidienne existent : la balançoire, les caisses de résonance des instruments de musique, piscine à vagues ... et on retrouve aussi les résonances à des endroits où on ne les attend pas, comme par exemple les lasers, les montres à quartz, les émetteurs d'ultrasons, etc.

⇝ ingrédients physiques nécessaires pour observer une résonance :

- un oscillateur + un système excitateur, c'est-à-dire un forçage
- la fréquence du forçage doit être bien choisie pour que ça marche

Espace 1

Q

On dit qu'il y a **résonance** lorsque la réponse d'un oscillateur forcé de manière périodique prend une très grande amplitude pour une valeur particulière de la pulsation de forçage, voisine de la pulsation propre (= pulsation des oscillations libres) de l'oscillateur.

Interprétation qualitative : le forçage apporte périodiquement de l'énergie à l'oscillateur, et à la résonance elle est toujours apportée « au bon moment » pour augmenter l'amplitude des oscillations ... jusqu'à ce que des phénomènes dissipatifs ou des non-linéarités viennent la limiter.

⇝ notre étude va se concentrer sur la réponse des oscillateurs à un forçage sinusoïdal en régime établi.

I - Régime sinusoïdal forcé

I.A - Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux synchrones

Considérons deux signaux sinusoïdaux **synchrones**, c'est-à-dire de même fréquence :

$$u(t) = U_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{et} \qquad u'(t) = U'_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi')\,.$$

R

On appelle **déphasage** de u' par rapport à u la différence

$$\Delta\varphi = \varphi' - \varphi\,.$$

Par convention, on restreint $\Delta\varphi$ à l'intervalle $]-\pi, +\pi]$.

- $\Delta\varphi = 0$: u' et u sont **en phase** ;
- $\Delta\varphi = \pi$: u' et u sont **en opposition de phase** ;
- $\Delta\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$: u' et u sont **en quadrature de phase** ;
- $\Delta\varphi > 0$, u' est en **avance de phase** sur u ;
- $\Delta\varphi < 0$, u' est en **retard de phase** sur u.

Graphiquement, le signal en avance de phase est celui qui atteint son maximum en premier.

R

Le déphasage est relié au décalage temporel entre les signaux,

$$|\Delta\varphi| = \omega\,\Delta t = \frac{2\pi}{T}\Delta t$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

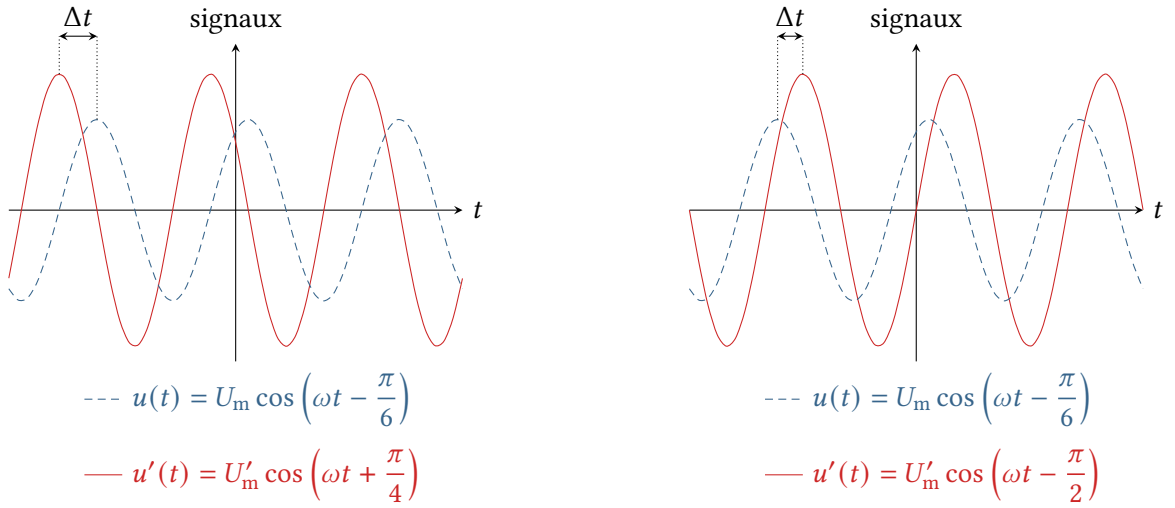


Figure 1 – Signaux déphasés.

> ***Remarque :*** *le résultat est écrit sous cette forme car il est en pratique plus simple de calculer $|\Delta\varphi|$ via le décalage temporel puis d'ajouter le signe à la main.*

Démonstration : Notons t_{max} et t'_{max} deux instants les plus proches où les signaux atteignent leur maximum. Alors,

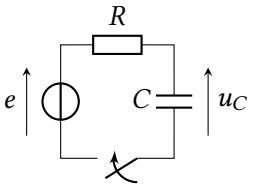
$$\begin{cases} \omega t_{max} + \varphi = 2k\pi \\ \omega t'_{max} + \varphi' = 2k\pi \end{cases} \quad \text{soit} \quad \varphi' - \varphi = -\omega(t'_{max} - t_{max})$$

ce qui donne le résultat.

Espace 2

I.B - Exemple : the circuit RC is back

- **Étude numérique et phénoménologie**



Considérons le circuit représenté ci-contre. La source idéale de tension impose un forçage sinusoïdal,

$$e(t) = E_m \cos(\omega t)\,,$$

L'équation différentielle du circuit pour $t > 0$ s'écrit

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau}u_C = \frac{e(t)}{\tau} = \frac{E_m}{\tau}\cos(\omega t)$$

À l'instant initial $t = 0$, l'interrupteur est fermé. Pour que les phénomènes soient mieux visibles, on suppose que $u_C(0) = 5\,\text{V} \neq 0$. En utilisant la méthode d'Euler explicite (code en ligne sur le site de la classe, pour le voir et jouer avec), on étudie numériquement la réponse $u_C(t)$ en faisant varier les différents paramètres du forçage e. Quelques courbes sont représentées figure 2.

Observations :
- après un régime transitoire de durée de l'ordre de τ, le circuit atteint un régime établi sinusoïdal ;
- dans ce régime u_C oscille à la même fréquence que e ;
- mais l'amplitude et le déphasage de u_C par rapport à e dépendent de la fréquence de forçage.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

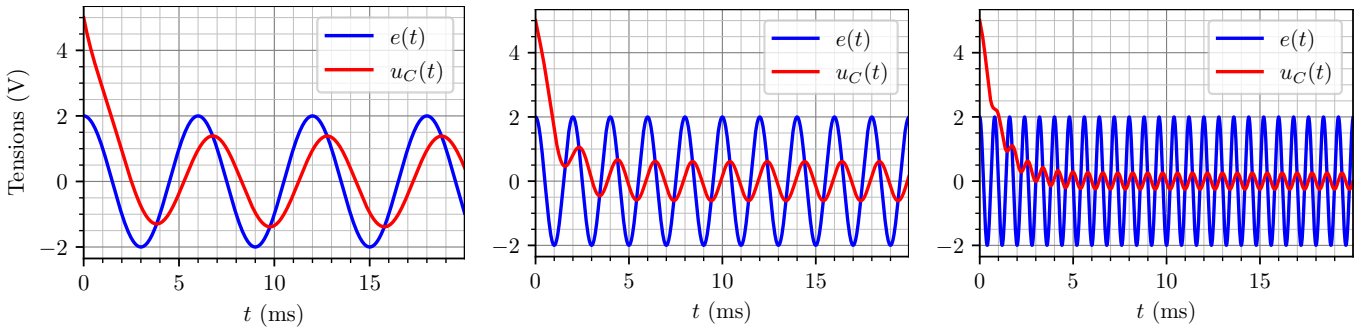


Figure 2 – Réponse d'un circuit RC à un forçage sinusoïdal. Pour les trois courbes, $\tau = RC = 1$ ms, et on fait varier de gauche à droite la période du forçage : 6 ms, 2 ms, 0,8 ms.

- **À la recherche d'une expression de u_C**

Application 1 : Une vaine tentative

On s'intéresse au circuit RC en régime sinusoïdal établi, c'est-à-dire à la solution particulière de l'équation différentielle. Poser le calcul permettant en principe de la déterminer.

↝ une méthode de recherche de solution particulière plus efficace serait la bienvenue !

I.C - Représentation complexe d'un signal sinusoïdal

- **Définition**

R

La **représentation complexe** d'une grandeur sinusoïdale $u(t) = U_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi)$ est définie par

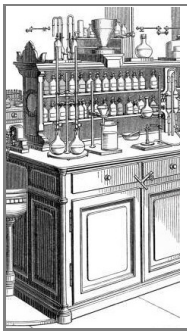
$$\underline{u}(t) = U_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)} = \underline{U}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

où j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$ ($\mathrm{j}^2 = -1$)
et $\underline{U} = U_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ est appelée **amplitude complexe** de la tension u.

La grandeur réelle se déduit de sa représentation complexe :

$$u(t) = \mathrm{Re}\,\underline{u}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} U_\mathrm{m} = |\underline{U}| \\ \varphi = \arg \underline{U} \end{cases}$$

Attention ! Ne pas confondre la barre *en dessous* qui indique en physique une grandeur complexe avec la notation de la conjugaison complexe utilisée en maths (barre *au dessus*). En physique la conjugaison complexe se note généralement d'une étoile, p.ex. $\underline{U}^\star$.



Un peu d'histoire : La représentation complexe d'un signal trouve son origine dans la formule d'Euler (1748), qui relie exponentielles et fonctions trigonométriques. Fourier, en 1822, montre que toute fonction périodique peut se décomposer en somme de sinus et cosinus, puis l'usage des exponentielles complexes s'impose progressivement au XIX^e siècle car elles simplifient les calculs. Des mathématiciens comme Cauchy et Dirichlet contribuent à leur diffusion, notamment dans la résolution d'équations différentielles. À la fin du XIX^e siècle, avec le développement de l'électricité et des télécommunications, Heaviside et d'autres ingénieurs popularisent cette approche, devenue standard en physique et traitement du signal au XX^e siècle.

- **Propriétés de la représentation complexe**

R

Le passage à la représentation complexe (et à l'amplitude complexe) est une opération **linéaire**.

↝ l'amplitude complexe d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des amplitudes complexes ... à condition de considérer des signaux synchrones, ce qui est sous-entendu.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

➽ **Pour approfondir :** Démontrons-le, en posant $u_1(t) = U_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ et $u_2(t) = U_2\cos(\omega t + \varphi_2)$, et considérons une combinaison linéaire

$$s(t) = \lambda_1 u_1(t) + \lambda_2 u_2(t) \qquad \text{avec} \qquad \lambda_1, \lambda_2 = \text{cte}\,.$$

La combinaison linéaire des amplitudes complexes de u_1 et u_2 s'écrit

$$\lambda_1\underline{u}_1 + \lambda_2\underline{u}_2 = \lambda_1 U_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \lambda_2 U_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \underbrace{(\lambda_1 U_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1} + \lambda_2 U_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2})}_{\text{ampl complexe de la somme}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

qui permet bien d'identifier l'amplitude complexe de la combinaison linéaire par une écriture de la forme $\underline{S}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$. ■

Le passage à la représentation complexe est commutatif avec la dérivation et l'intégration.

Dériver une représentation ou une amplitude complexe
revient à la multiplier par $\mathrm{j}\omega$, l'intégrer à la diviser par $\mathrm{j}\omega$. (R)

⇝ la représentation complexe d'une dérivée est la dérivée de la représentation complexe.

➽ **Pour approfondir :** Démontrons-le. Pour $u(t) = U_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi)$ alors

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\omega U_\mathrm{m}\sin(\omega t + \varphi) = \omega U_\mathrm{m}\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

En passant en représentation complexe,

$$\underline{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}} = \omega U_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})} = \omega U_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)} = \mathrm{j}\omega\,U_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)} = \mathrm{j}\omega\,\underline{u}$$

Tout se passe donc comme si on avait directement dérivé $\underline{u}$: la représentation complexe d'une dérivée est la dérivée de la représentation complexe, les deux opérations sont bien commutatives. Par ailleurs, la dernière ligne de calcul montre que l'amplitude complexe de la dérivée est bien celle du signal multipliée par $\mathrm{j}\omega$. ■

En corollaire des deux résultats précédents, celui qui nous sera le plus utile :

Une équation différentielle linéaire vérifiée par un signal l'est aussi par sa représentation complexe,
et elle prend la forme d'une équation complexe algébrique. (R)

I.D - Fin de l'exemple

Application 2 : Réglons-lui son compte ! (M)

En utilisant la représentation complexe, déterminer la solution particulière en régime sinusoïdal établi de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C = \frac{e(t)}{\tau} \qquad \text{avec} \qquad e(t) = E_\mathrm{m}\cos(\omega t)\,.$$

Rappels sur le calcul des arguments : (R)

- Le calcul des arguments suit les mêmes règles que celui avec les logarithmes, en particulier les produits deviennent des sommes.
- L'argument d'un complexe $\underline{z} = x + \mathrm{j}y$ n'est donné par

$$\arg\underline{z} = \arctan\frac{y}{x} \qquad \text{que si } x > 0\,!$$

Si $x < 0$, on fait apparaître une multiplication par -1 pour se ramener au cas d'une partie réelle positive,

$$\arg\underline{z} = \arg\Big(-(-x - \mathrm{j}y)\Big) = \arg(-1) + \arg(\underbrace{-x}_{>0} - \mathrm{j}y) \qquad \text{soit} \qquad \arg\underline{z} = \pi + \arctan\frac{y}{x}\,.$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

II - Lois de l'électrocinétique en représentation complexe

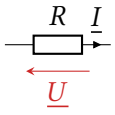
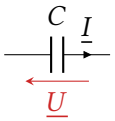
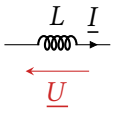
Compte tenu des propriétés de linéarité et de dérivation de la représentation complexe, il est possible d'étudier les circuits électriques directement en représentation complexe, sans passer par une équation différentielle.

II.A - Loi des mailles et loi des nœuds

R

Par linéarité, les lois des mailles et des nœuds peuvent directement s'écrire en termes des représentations complexes.

II.B - Impédance et admittance complexe

	Résistance	Condensateur	Bobine
Symbole			
Loi de comportement	$u = Ri$	$i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$	$u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
Écriture complexe	$\underline{U} = R\underline{I}$	$\underline{I} = \mathrm{j}C\omega\underline{U}$	$\underline{U} = \mathrm{j}L\omega\,\underline{I}$
Impédance complexe $\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I}$	$\underline{Z_R} = R$	$\underline{Z_C} = \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}$	$\underline{Z_L} = \mathrm{j}L\omega$
Équivalent basse fréquence $\omega \to 0$	résistance	interrupteur ouvert	fil
Équivalent haute fréquence $\omega \to \infty$	résistance	fil	interrupteur ouvert

R

Attention ! Les expressions de $\underline{Z}$ supposent implicitement les dipôles orientés en convention récepteur.

R

En représentation complexe, les lois de comportement des dipôles linéaires s'écrivent toutes

$$\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I} \quad \text{ou} \quad \underline{I} = \underline{Y}\,\underline{U} \quad \text{avec} \quad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}\,.$$

$\underline{Z}$ est appelé **impédance complexe** du dipôle, $\underline{Y}$ son **admittance complexe**.
$\underline{Z}$ et $\underline{Y}$ dépendent de la pulsation.

Q

En représentation complexe, toutes les lois de comportement s'écrivent comme la loi d'Ohm, mais avec les impédances complexes.

⇝ en représentation complexe, tous les circuits se ramènent à des circuits résistifs !

> ***Remarque :*** *raisonner sur les impédances complexes est très efficace pour l'analyse dimensionnelle.*
>
> *Exemple :*
>
> $[\underline{Z}] = \Omega$ *donc* $[L] = [\underline{Z_L}]/[\omega] = \Omega \cdot \mathrm{s}$.

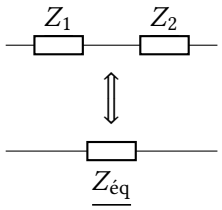
Espace 3

BY-NC-SA

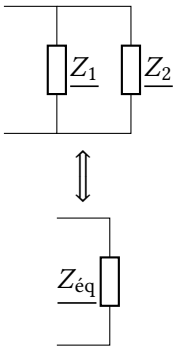
© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

II.C - Associations de dipôles

- **Impédances équivalentes**



$$\underline{Z}_{éq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

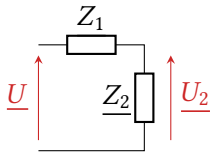


$$\frac{1}{\underline{Z}_{éq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$$

$$\underline{Y}_{éq} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$$

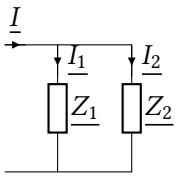
R

- **Ponts diviseurs**



diviseur de tension :

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$



diviseur de courant :

$$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}} = \frac{\dfrac{1}{\underline{Z}_2}}{\dfrac{1}{\underline{Z}_1} + \dfrac{1}{\underline{Z}_2}} = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}$$

R

- **Mise en pratique**

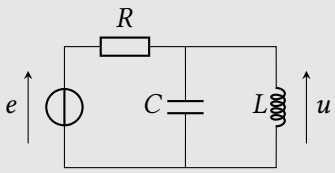
Application 3 : Circuit RL série

M

Considérons un circuit RL série alimenté par un générateur de fém $e(t) = E_m \cos(\omega t)$. Déterminer l'expression de la tension $u_L(t)$ aux bornes de la bobine en régime sinusoïdal établi, sans passer par une équation différentielle. Faire apparaître le temps caractéristique τ du circuit (à retrouver, pas à donner par cœur !).

Application 4 : Circuit RLC parallèle

M



Exprimer l'amplitude complexe $\underline{U}$ en fonction de $\underline{E}$ et des composants, sans passer par une équation différentielle. L'écrire sous la forme

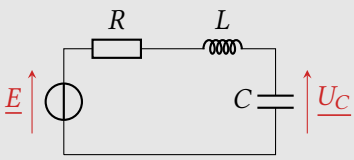
$$\underline{U} = \frac{1}{1 + \ldots}\underline{E}.$$

III - Résonance en tension, résonance en élongation

III.A - Exemple en électronique : tension aux bornes du condensateur d'un RLC série

Application 5 : Tension aux bornes du condensateur d'un circuit RLC série

M



Exprimer l'amplitude complexe $\underline{U_C}$ en fonction de $\underline{E}$ et des composants. Rappeler l'expression de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q d'un circuit RLC série, et montrer que

$$\underline{U_C} = \frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}\underline{E}.$$

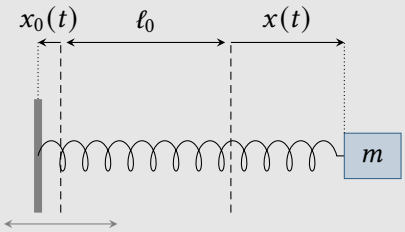
BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

III.B - Exemple en mécanique : élongation d'un oscillateur masse-ressort amorti

M

Application 6 : Élongation d'un système masse-ressort en forçage harmonique



Considérons le système masse-ressort ci-contre. Outre la masse m dont on étudie le mouvement, le ressort est attachée à une paroi à laquelle on impose un mouvement sinusoïdal

$$x_0(t) = X_0 \cos(\omega t) \qquad (x_0 < 0 \text{ sur la figure})$$

La masse est de plus soumise à une force de frottement linéaire de coefficient λ.

1 - Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ et l'écrire sous forme canonique.

2 - En déduire l'expression de l'amplitude complexe $\underline{X}$ de la position de la masse en fonction de celle $\underline{X_0}$ du forçage. On travaillera à partir de la forme canonique.

III.C - Étude qualitative

Pour parler dans un contexte précis, on considère pour la suite le circuit RLC ... sachant que des raisonnements identiques peuvent être menés sur l'oscillateur masse-ressort. On prend

$$e(t) = E_\text{m} \cos(\omega t) \qquad \text{donc} \qquad \underline{E} = E_\text{m} \in \mathbb{R}$$

$\rightsquigarrow$ la phase initiale de $u_C(t)$, c'est-à-dire l'argument de $\underline{U_C}$, est directement son déphasage par rapport à $e(t)$.

M

Limite basse fréquence : $\omega \longrightarrow 0$ ou plus exactement $\omega \ll \omega_0$.

$$\underline{U_C} \sim \frac{1}{1}\underline{E} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} U_\text{m} = |\underline{U_C}| = E \\ \varphi = \arg \underline{U_C} = 0 \end{cases}$$

Espace 4

Limite haute fréquence : $\omega \longrightarrow +\infty$ ou plus exactement $\omega \gg \omega_0$.

$$\underline{U_C} \sim -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\underline{E} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} U_\text{m} = |\underline{U_C}| \longrightarrow 0 \\ \varphi = \arg \underline{U_C} = -\pi \end{cases}$$

Espace 5

> ***Remarque :*** *pourquoi $\varphi \longrightarrow -\pi$ et non pas $+\pi$? Cela dépend du signe de la partie imaginaire : en multipliant par la quantité conjuguée, il est simple de constater que* $\text{Im}\,\underline{U_C} < 0$, *donc* $\arg \underline{U_C} < 0$.

À la pulsation propre : $\omega = \omega_0$

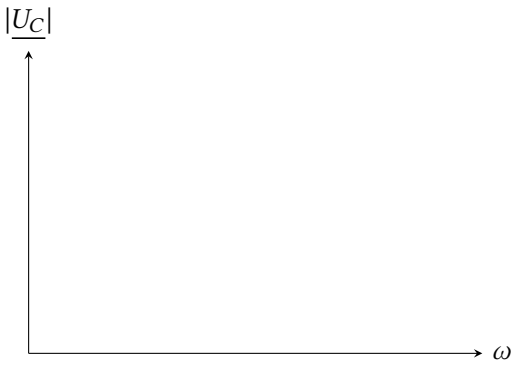
$$\underline{U_C} = -\text{j}Q\underline{E} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} U_\text{m} = |\underline{U_C}| = QE \\ \varphi = \arg \underline{U_C} = -\pi/2 \end{cases}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Espace 6

Allure qualitative de $|\underline{U_C}|$ en fonction de ω :



Intuitions grâce au tracé :
▹ La courbe peut éventuellement mais pas forcément passer par un maximum, il n'y a donc pas toujours résonance.
▹ La valeur de Q joue un rôle important : $Q > 1$ donne une résonance à coup sûr, mais on ne sait pas si c'est le seuil (la résonance n'est pas forcément à $\omega_r = \omega_0$)

Q

Espace 7

III.D - Étude quantitative : condition d'existence et pulsation de résonance

On cherche d'une part si la fonction $|\underline{U_C}(\omega)|$ admet un maximum, et d'autre part la pulsation pour laquelle ce maximum est atteint.

⇝ il va falloir passer par une étude de fonction.

Application 7 : Étude de la résonance en tension

D

1 - Exprimer $|\underline{U_C}|$ et identifier la fonction f permettant de l'écrire sous la forme

$$|\underline{U_C}| = \frac{1}{\sqrt{f(\omega/\omega_0)}} E_m \,.$$

2 - Étudier la fonction f sur $\mathbb{R}_+$, et en déduire qu'il n'y a résonance en tension que si le facteur de qualité est supérieur à une valeur seuil à identifier. Déterminer la pulsation de résonance.

BY-NC-SA

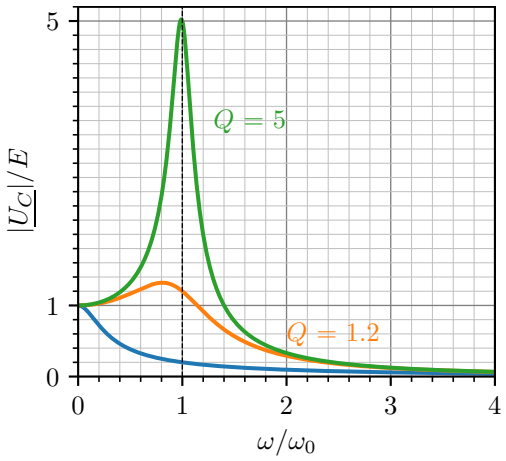
© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

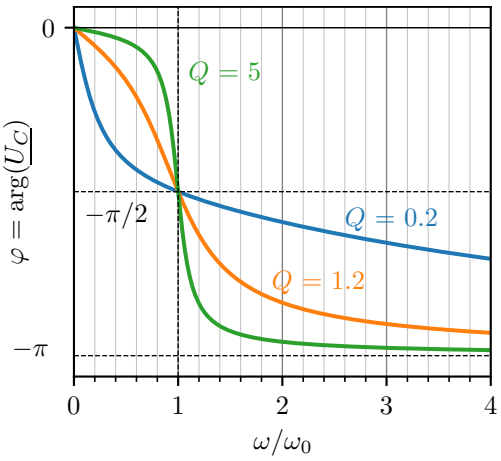
Conclusion et généralisation :

R

La résonance en tension d'un circuit RLC, ou en élongation d'un oscillateur masse-ressort, n'est pas systématique : elle n'a lieu que si $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

La pulsation de résonance est $\omega_{\text{rés}} = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{2Q^2}}$, qui tend vers la pulsation propre ω_0 pour $Q \gg 1$.
Dans cette limite, $|\underline{U_C}(\omega_0)| \simeq QE$.





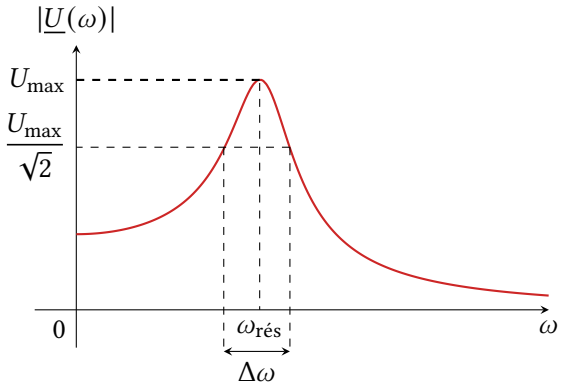
À la résonance, l'amplitude de la tension (l'élongation) est maximale, mais il a un déphasage « quelconque » par rapport au forçage.

Attention ! La valeur seuil du facteur de qualité sur l'existence d'une résonance, $Q \gtrless 1/\sqrt{2}$, n'est pas la même que la valeur seuil sur la nature des régimes transitoires, $Q \gtrless 1/2$.

> ***Remarque :*** *La limite $Q \gg 1$ est en pratique rapidement atteinte : l'écart entre ω_0 et $\omega_{rés}$ est inférieur à 1 % dès que $Q > 5$.*

III.E - Acuité de la résonance

R



L'**acuité** de la résonance est quantifiée par la **largeur de résonance** ou **bande passante**, définie comme l'intervalle de pulsations $\Delta\omega$ telles que

$$|\underline{U}(\omega)| > \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$$

- si $\Delta\omega$ est petit, elle dite **aigue** ou **étroite** ;
- si $\Delta\omega$ est grand elle est dite **large** ou **diffuse**.

Calculer la largeur de résonance nécessite de calculer les deux **pulsations de coupure**, ce qui dans le cas général est ici de peu d'intérêt. On montre que

$$\omega_{c\pm} = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2} \pm \frac{1}{Q}\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$$

M

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Étude dans la limite $Q \gg 1$: Procédons à des développements limités au premier ordre en $1/Q$

$$\omega_\pm \simeq \omega_0 \sqrt{1 \pm \frac{1}{Q}} = \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2Q}\right)$$

d'où on déduit

$$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = \frac{\omega_0}{Q}$$

Espace 8

Dans la limite $Q \gg 1$, la largeur de résonance vaut

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

La résonance est d'autant plus aigue que le facteur de qualité est élevé.

R

Remarque : *mesurer la largeur de résonance constitue une méthode expérimentale de choix pour estimer le facteur de qualité d'un oscillateur ... mais pour utiliser la résonance en tension/élongation, il faut d'abord s'assurer que le facteur de qualité est suffisament élevé.*

$\rightsquigarrow$ *on peut estimer un ODG en comptant les oscillations en régime libre*

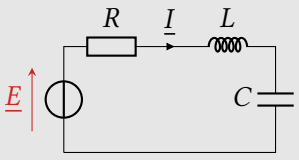
Espace 9

IV - Résonance en courant, résonance en vitesse

IV.A - Exemple en électronique : courant dans un RLC série

Application 8 : Intensité dans un RLC série

M



En raisonnant sur la tension aux bornes de la résistance, exprimer l'amplitude complexe $\underline{I}$ en fonction de $\underline{E}$ et des composants. Rappeler l'expression de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q d'un circuit RLC série, et montrer que

$$\underline{I} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \frac{\underline{E}}{R}.$$

Remarque : *une autre méthode consiste à utiliser l'admittance complexe du condensateur,*

$$\underline{I} = jC\omega\,\underline{U_C},$$

et à manipuler l'expression comme dans l'application 9 pour aboutir à

$$\underline{I} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} Q\omega_0\, C\, \underline{E},$$

ce qui est bien le même résultat puisque l'on vérifie sans peine que $Q\omega_0 C = 1/R$.

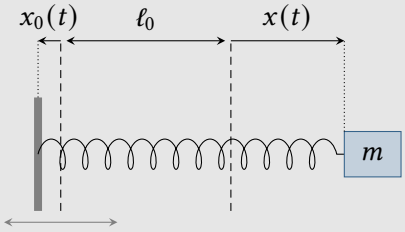
BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

IV.B - Exemple en mécanique : vitesse d'un oscillateur masse-ressort amorti

M

Application 9 : Vitesse d'un système masse-ressort en forçage harmonique



Considérons le même système masse-ressort que précédemment, attaché à une paroi oscillante :

$$x_0(t) = X_0 \cos(\omega t) \qquad (x_0 < 0 \text{ sur la figure})$$

L'application 6 a permis d'exprimer l'amplitude complexe

$$\underline{X} = \frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{Q\omega_0}} \underline{X_0} \,.$$

Montrer que la vitesse de la masse en mouvement a pour amplitude complexe

$$\underline{V} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} Q\omega_0 \underline{X_0} \,.$$

IV.C - Étude qualitative

Raisonnons de nouveau sur l'exemple du circuit RLC.

M

Limite basse fréquence : $\omega \ll \omega_0$

$$\underline{I} \sim \frac{1}{-\mathrm{j}Q\omega_0/\omega} \frac{E}{R} = \frac{\mathrm{j}\omega}{Q\omega_0} \frac{E}{R} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} I_\mathrm{m} = |\underline{I}| \to 0 \\ \varphi = \arg \underline{I} \to \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Espace 10

> ***Remarque :*** *le condensateur du circuit se comporte en interrupteur ouvert dans la limite des basses fréquences, il est donc logique que le courant dans le circuit soit nul.*

Limite haute fréquence : $\omega \gg \omega_0$

$$\underline{I} \sim \frac{1}{\mathrm{j}Q\omega/\omega_0} \frac{E}{R} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} I_\mathrm{m} = |\underline{I}| \to 0 \\ \varphi = \arg \underline{I} \to -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Espace 11

> ***Remarque :*** *c'est cette fois la bobine qui agit en interrupteur ouvert !*

BY-NC-SA

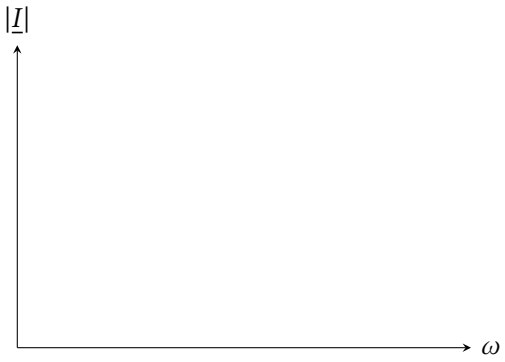
© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

À la pulsation propre : $\omega = \omega_0$

$$\underline{I} = \frac{1}{1}\frac{E}{R} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} I_m = |\underline{I}| = \dfrac{E}{R} \\ \varphi = \arg \underline{I} = 0 \end{cases}$$

Espace 12

Allure qualitative de $|\underline{I}|$ en fonction de ω :



Intuitions grâce au tracé :

La courbe passe toujours par un maximum, quelle que soit la valeur de Q : il y a donc toujours résonance, la phénoménologie n'est pas la même que dans le cas précédent.

Espace 13

IV.D - Étude quantitative : pulsation de résonance

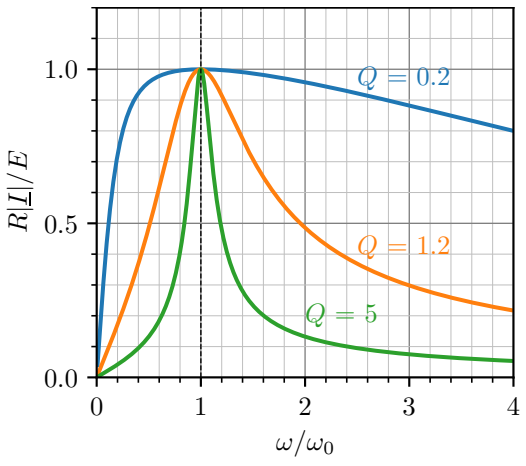
Application 10 : Étude de la résonance en courant

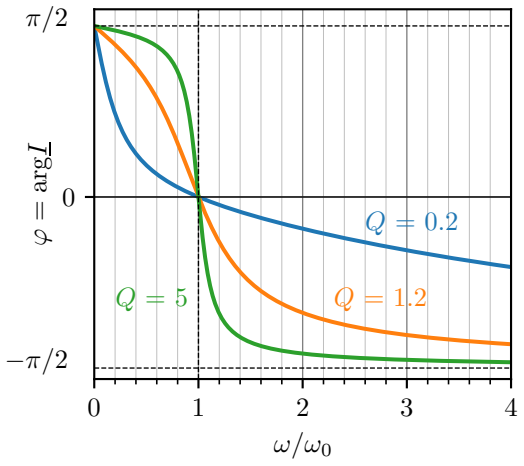
Exprimer $|\underline{I}|$, et justifier sans calcul élaboré qu'il y a toujours passage par un maximum pour une pulsation de résonance à déterminer.

Conclusion et généralisation :

La résonance en courant d'un circuit RLC, ou en vitesse d'un oscillateur masse-ressort, a lieu quel que soit le facteur de qualité à la pulsation propre du système :

$$\omega_{\text{rés}} = \omega_0.$$





À la résonance, l'amplitude du courant (de la vitesse) est maximal, et il est en phase avec le forçage.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

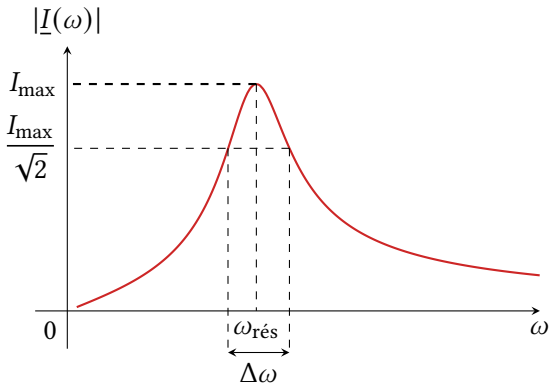
IV.E - Acuité de la résonance

D

Application 11 : Largeur de la résonance en courant

Calculer les pulsations de coupure $\omega_\pm$ de la résonance en courant, et en déduire la largeur de résonance.

R



Quel que soit le facteur de qualité,
la largeur de résonance en courant vaut

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

La résonance est d'autant plus aigue
que le facteur de qualité est élevé.

> ***Remarque :*** *Contrairement à la résonance en tension, il s'agit ici d'un résultat exact, valable pour toute valeur de Q, et non plus d'une approximation. La mesure expérimentale de Q est donc plus directe en exploitant la résonance en courant/vitesse.*

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Correction des applications de cours

Application 1 : Circuit RC en représentation réelle

On cherche une solution particulière sinusoïdale, de même pulsation que le forçage, mais d'amplitude différente et déphasée,

$$u_C(t) = U_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi)$$

et on injecte dans l'équation différentielle :

$$-\omega U_\mathrm{m}\sin(\omega t+\varphi) + \frac{U_\mathrm{m}}{\tau}\cos(\omega t+\varphi) = \frac{E_\mathrm{m}}{\tau}\cos(\omega t)$$

et il faudrait en déduire U_m et φ ... et on n'est même pas sur un système d'ordre 2 ...

Application 2 : Circuit RC en complexes

L'équation différentielle passée en complexe s'écrit

$$\mathrm{j}\omega\underline{U_C} + \frac{1}{\tau}\underline{U_C} = \frac{1}{\tau}\underline{E},$$

d'où on déduit

$$\underline{U_C} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega\tau}\underline{E}.$$

Par définition de la représentation complexe,

$$U_{C,\mathrm{m}} = |\underline{U_C}| = \frac{E_\mathrm{m}}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \qquad \text{et} \qquad \varphi = \arg\underline{U_C} = -\arg(1+\mathrm{j}\omega\tau) + \arg\underline{E} = -\arctan(\omega\tau)$$

Application 3 : Circuit RL série

Par un pont diviseur de tension,

$$\underline{U_L} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{R+\mathrm{j}L\omega}\underline{E} = \frac{\mathrm{j}\omega\tau}{1+\mathrm{j}\omega\tau}\underline{E} \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

On a alors $u_L(t) = U_\mathrm{m}\cos(\omega t+\varphi)$ avec

$$U_\mathrm{m} = |\underline{U_L}| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \qquad \text{et} \qquad \varphi = \arg\underline{U_L} = \arg(\mathrm{j}\omega\tau) - \arg(1+\mathrm{j}\omega\tau) + \arg\underline{E} = \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega\tau).$$

Application 4 : Circuit RLC parallèle

L'association parallèle de L et C équivaut à une admittance

$$\underline{Y}_\text{éq} = \mathrm{j}C\omega + \frac{1}{\mathrm{j}L\omega}$$

puis par un pont diviseur de tension

$$\frac{\underline{U}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}_\text{éq}}{R+\underline{Z}_\text{éq}} = \frac{1}{1+R\underline{Y}_\text{éq}}$$

ce qui donne finalement

$$\boxed{\underline{U} = \frac{1}{1+\mathrm{j}RC\omega + \dfrac{R}{\mathrm{j}L\omega}}\underline{E}.}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Application 6 : Élongation d'un système masse-ressort avec forçage harmonique

1 **Système :** masse en mouvement

Référentiel : terrestre, supposé galiléen

Repérage : origine prise par rapport à longueur à vide du ressort.

Bilan des forces :
- mouvement horizontal donc le poids est compensé par la réaction d'un support non représenté ;
- force de rappel du ressort :
$$\vec{F_r} = -k(\ell_0 + x - x_0 - \ell_0)\vec{e}_x = -k(x - x_0)\vec{e}_x .$$
- force de frottement linéaire : $\vec{f} = -\lambda\dot{x}\vec{e}_x$.

PFD :
$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F_r} + \vec{f} \qquad \text{soit} \qquad m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \lambda\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = kx_0$$
et sous forme canonique
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2x = {\omega_0}^2x_0 .$$

2 Passage en complexes :
$$-\omega^2\underline{X} + \mathrm{j}\omega\frac{\omega_0}{Q}\underline{X} + {\omega_0}^2\underline{X} = {\omega_0}^2\underline{X_0} \qquad \text{d'où} \qquad \underline{X} = \frac{{\omega_0}^2}{({\omega_0}^2 - \omega^2) + \mathrm{j}\dfrac{\omega\omega_0}{Q}}\underline{X_0} = \frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2} + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}\underline{X_0}$$

On retrouve exactement la même forme de fonction de transfert que pour le circuit RLC série.

Application 7 : Étude de la résonance en tension

1 Calcul du module :
$$|\underline{U_C}| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2}\right)^2 + \dfrac{\omega^2}{Q^2{\omega_0}^2}}}E_m = \frac{E_m}{\sqrt{f(\omega/\omega_0)}} \qquad \text{avec} \qquad f(x) = (1 - x^2)^2 + (x/Q)^2 .$$

2 Calculons la dérivée : $(u^2)' = 2uu'$, soit
$$f'(x) = 2 \times (1 - x^2) \times (-2x) + 2 \times \frac{x}{Q} \times \frac{1}{Q} = x\left(x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2}\right)$$

Étude de signe sur $\mathbb{R}_+$:
$$f'(x) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2} \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 \geq 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

1er cas : Si $Q < 1/\sqrt{2}$, l'inégalité est vraie pour tout $x > 0$ donc f est monotone croissante, et $|\underline{U_C}|$ monotone décroissante : il n'y a pas de résonance.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$
ω	0		$+\infty$
U	E	↘	0

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

2e cas : Si $Q > 1/\sqrt{2}$, alors $f'(x)$ s'annule en

$$x_{\text{rés}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

et f passe par un minimum, donc $|U_C|$ passe par un maximum : il y a résonance.

x	0		$\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘		↗	$+\infty$
ω	0		$\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$		$+\infty$
U	E	↗	$U_{\max}$	↘	0

Application 9 : Vitesse d'un système masse-ressort en forçage harmonique

$$\begin{aligned}\underline{V} = \mathrm{j}\omega\underline{X} &= \frac{\mathrm{j}\omega}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \mathrm{j}\frac{\omega}{Q\omega_0}}\underline{X_0} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{j}\omega} - \frac{\omega}{\mathrm{j}\omega_0^2} + \frac{1}{Q\omega_0}}\underline{X_0} \\ &= \frac{1}{\frac{Q\omega_0}{\mathrm{j}\omega} - \frac{Q\omega}{\mathrm{j}\omega_0} + 1}\, Q\omega_0\,\underline{X_0}\end{aligned}$$

$$\boxed{\underline{V} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}\, Q\omega_0\,\underline{X_0}}$$

Application 10 : Étude de la résonance en courant

On a directement

$$|\underline{I}| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}\frac{E}{R}\,.$$

S'agissant d'une somme de carrés, $|\underline{I}|$ est maximal lorsque le dénominateur est minimal, ce qui est le cas lorsque le terme entre parenthèses s'annule, donc pour

$$\boxed{\omega_{\text{rés}} = \omega_0\,.}$$

Application 11 : Largeur de la résonance en courant

Posons $x = \omega/\omega_0$. Les pulsations de coupure sont telles que

$$Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1 \qquad \text{soit} \qquad \left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm\frac{1}{Q}$$

ce qui nous donne deux équations polynômiales

$$x^2 \pm \frac{1}{Q}x - 1 = 0$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

de discriminant

$$\frac{1}{Q^2} + 4 > 0$$

d'où on déduit les quatre valeurs de x solution de l'équation,

$$x = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{1}{Q} \pm \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}\right)$$

Seules les solutions positives ont un sens physiquement parlant, les deux pulsations de coupure sont donc

$$\omega_\pm = \frac{\omega_0}{2}\left(\pm\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}\right) .$$

On en déduit la largeur de la résonance

$$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = \frac{\omega_0}{Q} .$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr