Correction

Résonance

Exercice 1 : Pont de Wien

2 | 2 |

- *Impédances complexes ;*
- *Largeur de résonance ;*
- *Tracé des courbes d'amplitude et de phase.*

Électronique en représentation complexe

Exercice 2 : Détermination d'impédances

1 | 2

- *Impédances complexes.*

1 Association série d'impédance équivalente

$$\underline{Z} = \underline{Z_R} + \underline{Z_C} = R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\underline{Z} = \frac{1+\mathrm{j}RC\omega}{\mathrm{j}RC\omega}R\,.}$$

2 Association série, d'impédance équivalente

$$\underline{Z} = \underline{Z_L} + \underline{Z_C} = \mathrm{j}L\omega + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\underline{Z} = \frac{1-LC\omega^2}{\mathrm{j}C\omega}}$$

> *Rappel :* $1/j = -j$.

3 L'association de L et C est en parallèle, il est donc a priori plus simple de calculer son admittance équivalente

$$\underline{Y_{LC}} = \underline{Y_L} + \underline{Y_C} = \frac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega = \frac{1-LC\omega^2}{\mathrm{j}L\omega}$$

L'impédance complexe de l'association parallèle vaut donc

$$\underline{Z_{LC}} = \frac{1}{\underline{Y_{LC}}} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{1-LC\omega^2}$$

> *La factorisation est intéressante car elle permet de passer très facilement de l'admittance à l'impédance.*

Enfin, l'association est montée en série avec une résistance, donnant une impédance complexe équivalente à l'ensemble

$$\underline{Z} = \underline{Z_R} + \underline{Z_{LC}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\underline{Z} = R + \frac{\mathrm{j}L\omega}{1-LC\omega^2}}$$

Une dernière factorisation est possible pour donner

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{1+\mathrm{j}L\omega/R - LC\omega^2}{1-LC\omega^2}R\,.}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

> *Cette dernière factorisation n'est pas forcément utile, car la forme non-factorisée sépare directement la partie réelle de la partie imaginaire : tout dépend de ce que l'on veut faire du résultat.*

4 L'association en parallèle de la bobine et du condensateur C_2 se traite comme à la question précédente et a pour impédance équivalente

$$\underline{Z_{LC_2}} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{1 - LC_2\omega^2}$$

Elle est montée en série avec le condensateur C_1, donnant une impédance équivalente

$$\underline{Z} = \frac{1}{\mathrm{j}C_1\omega} + \frac{\mathrm{j}L\omega}{1 - LC_2\omega^2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\underline{Z} = \frac{1 - L(C_1 + C_2)\omega^2}{\mathrm{j}C_1\omega(1 - LC_2\omega^2)}}$$

5 L'association en parallèle de la résistance et du condensateur a pour admittance équivalente

$$\underline{Y_{\text{parr}}} = \underline{Y_R} + \underline{Y_C} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega = \frac{1 + \mathrm{j}RC\omega}{R} \qquad \text{soit} \qquad \underline{Z_{\text{parr}}} = \frac{1}{\underline{Y_{\text{parr}}}} = \frac{R}{1 + \mathrm{j}RC\omega}$$

Cette association est montée en série avec une résistance et un condensateur, l'ensemble a donc comme impédance équivalente

$$\underline{Z} = \underline{Z_R} + \underline{Z_C} + \underline{Z_{\text{parr}}} = R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \frac{R}{1 + \mathrm{j}RC\omega} = \frac{\mathrm{j}RC\omega(1 + \mathrm{j}RC\omega) + (1 + \mathrm{j}RC\omega) + \mathrm{j}RC\omega}{\mathrm{j}C\omega(1 + \mathrm{j}RC\omega)}$$

soit enfin

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{1 + 3\mathrm{j}RC\omega - R^2C^2\omega^2}{\mathrm{j}C\omega(1 + \mathrm{j}RC\omega)}}$$

Exercice 3 : Équivalence entre dipôles RL

1 | 2

▹ *Impédances complexes.*

1 L'impédance complexe du montage en série vaut

$$\underline{Z'} = \underline{Z_{L'}} + \underline{Z_{R'}} = \mathrm{j}L'\omega + R'$$

De même, l'impédance complexe du montage en parallèle est telle que

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z_L}} + \frac{1}{\underline{Z_R}} = \frac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \frac{1}{R} \qquad \text{soit} \qquad \underline{Z} = \frac{\mathrm{j}RL\omega}{R + \mathrm{j}L\omega}$$

Les deux dipôles sont équivalents s'ils ont les mêmes impédances complexes. Il suffit donc pour trouver R' et L' d'identifier les parties réelle et imaginaire de $\underline{Z}$ et $\underline{Z'}$. Écrivons donc $\underline{Z}$ sous forme algébrique,

$$\underline{Z} = \frac{\mathrm{j}RL\omega(R - \mathrm{j}L\omega)}{(R + \mathrm{j}L\omega)(R - \mathrm{j}L\omega)} = \frac{RL^2\omega^2}{R^2 + L^2\omega^2} + \mathrm{j}\frac{R^2L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\,.$$

Ainsi, il y a équivalence entre les deux dipôles pour

$$\boxed{R' = \frac{RL^2\omega^2}{R^2 + L^2\omega^2} \qquad \text{et} \qquad L' = \frac{R^2L}{R^2 + L^2\omega^2}\,.}$$

> *Remarquez que les deux dipôles ne sont donc pas équivalents tout le temps, mais seulement pour une valeur précise de fréquence ... et si R' et L' sont choisis aléatoirement il n'y a même aucune raison que l'équivalence existe.*

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

2 Si L' est remplacée par un condensateur, l'impédance complexe de l'association série s'écrit

$$\underline{Z'} = R' + \frac{1}{\mathrm{j}C'\omega} = R' - \mathrm{j}\frac{1}{C'\omega}$$

La condition d'équivalence obtenue par identification des impédances devient

$$R' = \frac{RL^2\omega^2}{R^2 + L^2\omega^2} \qquad \text{et} \qquad -\frac{1}{C'\omega} = \frac{R^2 L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\,.$$

Néanmoins, comme toutes les grandeurs sont positives, la deuxième condition portant sur C' ne peut jamais être vérifiée. Il n'est pas possible d'avoir équivalence entre les deux dipôles : **un circuit capacitif est fondamentalement différent d'un circuit inductif.**

Exercice 4 : Identification d'un dipôle inconnu

1 | 2

- *Impédances complexes ;*
- *Détermination d'un déphasage.*

1 La masse de l'oscilloscope ne peut pas être placée à un point différent de celle du GBF, sous peine de générer un **conflit de masse**, qui fausserait toutes les mesures.

2 Par lecture graphique $U_\mathrm{m} = 5\,\mathrm{V}$, $V_\mathrm{m} = 3{,}5\,\mathrm{V}$ et $T = 63\,\mathrm{ms}$ donc $\omega = 100\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

3 La tension v atteint son maximum avant u, elle est donc en avance de phase par rapport à u, donc $\varphi > 0$. On mesure graphiquement un décalage temporel $\Delta t \simeq 0{,}75 \times 10\,\mathrm{ms}$, d'où on déduit

$$\boxed{\varphi = \omega\,\Delta t \simeq 0{,}75\,\mathrm{rad}}$$

> *La courbe est tracée pour $\varphi = \pi/4$, mais ce n'est évidemment pas simple à identifier graphiquement !*

4 Déterminer la partie réelle et imaginaire n'est pas très pratique car la représentation complexe donne plus naturellemment le module et l'argument. D'une part, le module donne

$$|\underline{Z}| = \left|\frac{\underline{V}}{\underline{I}}\right| = R\left|\frac{\underline{V}}{\underline{U}}\right| = R\frac{V_\mathrm{m}}{U_\mathrm{m}} \qquad \text{d'où} \qquad X^2 + Y^2 = R^2\frac{V_\mathrm{m}^2}{U_\mathrm{m}^2}$$

et d'autre part l'argument s'écrit

$$\arg\underline{Z} = \arg\underline{V} - \arg\frac{\underline{U}}{R} = \varphi - 0 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{Y}{X} = \tan\varphi = 1$$

Finalement,

$$X = Y = \frac{1}{\sqrt{2}}R\frac{V_\mathrm{m}}{U_\mathrm{m}} = 50\,\Omega$$

5 Le dipôle inconnu se modélise par l'assocation série d'une résistance de $50\,\Omega$ et d'une bobine d'inductance telle que $L\omega = 50\,\Omega$ soit $L = 0{,}5\,\mathrm{H}$.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Exercice 5 : Ponts de mesure

inspiré oraux banque PT | 2 | 2 |

▹ *Impédances complexes.*

1 Compte tenu de la position de la masse, le potentiel $\underline{V_A}$ s'identifie à la tension aux bornes du dipôle $\underline{Z_1}$. Or les dipôles 1 et 2 sont montés en série, ce qui permet d'utiliser un pont diviseur de tension :

$$\frac{\underline{V_A}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\underline{V_A} = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}\underline{E}\,.}\,.$$

De même,

$$\boxed{\underline{V_B} = \frac{\underline{Z_3}}{\underline{Z_3}+\underline{Z_4}}\underline{E}\,.}$$

2 La tension u est nulle lorsque les nœuds A et B sont au même potentiel, d'où

$$\frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}\underline{E} = \frac{\underline{Z_3}}{\underline{Z_3}+\underline{Z_4}}\underline{E} \qquad \text{soit} \qquad \underline{Z_1}(\underline{Z_3}+\underline{Z_4}) = \underline{Z_3}(\underline{Z_1}+\underline{Z_2}) \qquad \text{donc} \qquad \cancel{\underline{Z_1}\,\underline{Z_3}} + \underline{Z_1}\,\underline{Z_4} = \cancel{\underline{Z_3}\,\underline{Z_1}} + \underline{Z_2}\,\underline{Z_3}$$

ce qui donne comme condition d'équilibre

$$\boxed{\underline{Z_1}\,\underline{Z_4} = \underline{Z_2}\,\underline{Z_3}\,.}$$

3 L'impédance 1 de la bobine étudiée s'écrit simplement

$$\boxed{\underline{Z_1} = r + \mathrm{j}L\omega\,.}$$

Pour l'impédance 4, le plus simple est de passer d'abord par l'admittance

$$\underline{Y_4} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega = \frac{1+\mathrm{j}RC\omega}{R} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\underline{Z_4} = \frac{R}{1+\mathrm{j}RC\omega}}\,.$$

4 D'après la condition d'équilibre,

$$(r+\mathrm{j}L\omega)\times\frac{R}{1+\mathrm{j}RC\omega} = R_2R_3 \qquad \text{soit} \qquad rR + \mathrm{j}RL\omega = R_2R_3 + \mathrm{j}R_2R_3RC\omega\,.$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire, on en déduit

$$\boxed{r = \frac{R_2R_3}{R} \qquad \text{et} \qquad L = R_2R_3C\,.}$$

Exercice 6 : Obtention d'une équation différentielle

2 | 2

▹ *Lien entre représentations temporelle et fréquentielle.*

Raisonnons à partir de la figure 1.

D'après la loi des nœuds,

$$\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2}$$

et en utilisant les admittances,

$$\frac{1}{R}\underline{U_R} = 2\mathrm{j}C\omega\underline{U'} + \mathrm{j}C\omega\underline{U}\,.$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

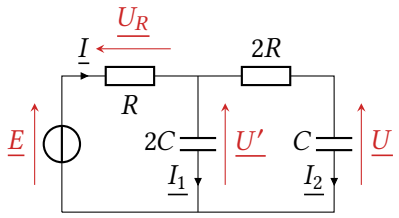

Figure 1 – Schéma des notations.

Pour limiter les fractions on multiplie directement par R,

$$\underline{U_R} = 2\mathrm{j}\omega\tau\underline{U'} + \mathrm{j}\omega\tau\underline{U}$$

D'après la loi des mailles dans la maille de droite,

$$\underline{U'} = \underline{U} + 2R\underline{I_2} = \underline{U} + 2\mathrm{j}RC\omega\underline{U}$$

et dans la maille de gauche

$$\underline{U_R} = \underline{E} - \underline{U'} = \underline{E} - \underline{U} - 2\mathrm{j}RC\omega\underline{U}\,.$$

En regroupant et en identifiant $RC = \tau$,

$$\underline{E} - \underline{U} - 2\mathrm{j}\omega\tau\underline{U} = 2\mathrm{j}\omega\tau(\underline{U} + 2\mathrm{j}\omega\tau\underline{U}) + \mathrm{j}\omega\tau\underline{U}$$

soit

$$\underline{E} = \underline{U} + 5\mathrm{j}\omega\tau\underline{U} + 4\tau^2(\mathrm{j}\omega)^2\underline{U}$$

En identifiant les puissances de $\mathrm{j}\omega$ à l'ordre des dérivées pour retourner dans le domaine des représentations réelles, on aboutit à

$$\boxed{e = u + 5\tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 4\tau^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}}$$

ce qui est bien le résultat escompté.

Résonance

Exercice 7 : Résonance aux bornes de la bobine d'un RLC série

1 | 2

- *Impédance complexe ;*
- *Condition de résonance ;*
- *Tracé des courbes d'amplitude et de phase.*

1 Par un pont diviseur de tension,

$$\underline{U} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{R + \mathrm{j}L\omega - \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}}E = \frac{1}{1 + \dfrac{R}{\mathrm{j}L\omega} + \dfrac{1}{LC\omega^2}}E\,.$$

En raisonnant sur la puissance à laquelle apparaît ω, on identifie d'une part

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

et d'autre part

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{Q = \frac{L}{R}\omega_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,.}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

2 Le module vaut

$$|\underline{U}| = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q\omega}\right)^2}} E \,.$$

En posant $x = \omega_0/\omega$,

$$|\underline{U}| = \frac{1}{\sqrt{f(x)}} E \qquad \text{avec} \qquad f(x) = (1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2 \,.$$

La fonction à étudier est exactement la même que pour la résonance en tension aux bornes du condensateur : tous les calculs sont dans le cours. Il n'y a résonance que si le facteur de qualité est suffisamment grand,

$$Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \,,$$

et dans ce cas la pulsation de résonance est telle que

$$x_{\text{rés}} = \sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\omega_{\text{rés}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}}}$$

Attention ! La fonction f à étudier est la même, mais la définition de x par rapport à la pulsation est différente. Il n'est donc pas possible de généraliser trop brutalement les résultats.

3 • **Limite basse fréquence :** $\omega \ll \omega_0$

$$\underline{U} \sim \frac{\underline{E}}{-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\underline{E} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} U \to 0 \\ \varphi \to +\pi \end{cases}$$

En effet, multiplier $\underline{U}$ par la quantité conjuguée montre que la partie imaginaire est positive, l'argument tend donc vers $+\pi$ et non pas $-\pi$.

• **Limite haute fréquence :** $\omega \gg \omega_0$

$$\underline{U} \sim \frac{E}{1} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} U \to E \\ \varphi \to 0 \end{cases}$$

• **Pulsation propre :** $\omega = \omega_0$

$$\underline{U} = \frac{E}{-\mathrm{j}/Q} = \mathrm{j}QE \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} U = QE \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

• **Tracés :** voir figure 2.

4 Les deux tensions sont en quadrature de phase si leur déphasage vaut $\pi/2$, donc si $\underline{U}$ est imaginaire pur à partie imaginaire positive. C'est le cas en $\omega = \omega_0$ comme le montrent les calculs ci-dessus.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

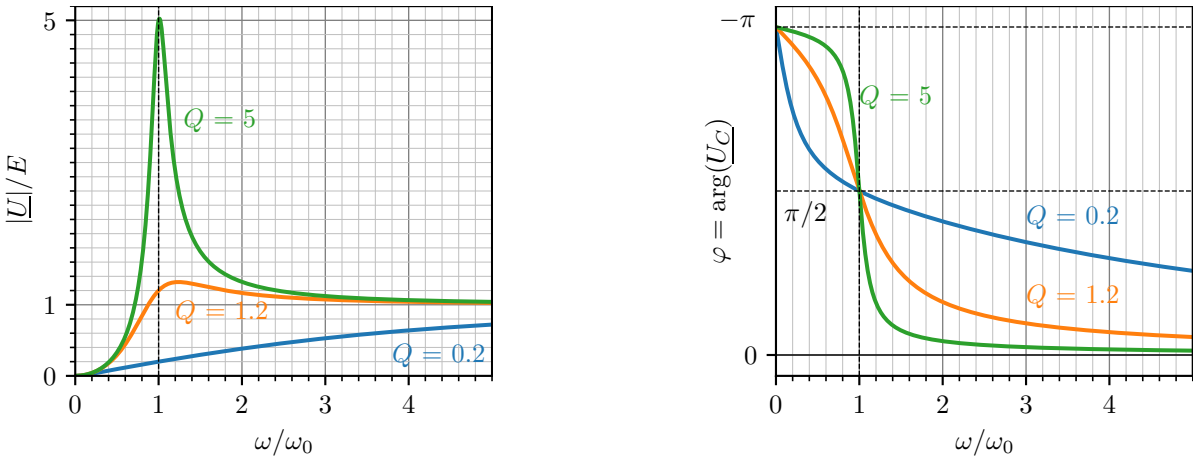

Figure 2 – Courbes d'amplitude et de phase de la tension aux bornes de la bobine.

Exercice 8 : Circuit RLC série forcé en courant

2 | 2 |

- *Impédances complexes ;*
- *Condition de résonance ;*
- *Exploitation des courbes d'amplitude et de phase.*

1 La tension $\underline{U}$ est reliée au courant $\underline{I}$ par l'intermédiaire de l'impédance complexe de l'association RLC série, $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$. Cette impédance s'écrit simplement

$$\underline{Z} = \underline{Z_R} + \underline{Z_L} + \underline{Z_C} = R + \mathrm{j}L\omega - \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}\,.$$

En factorisant,

$$\underline{Z} = R\left[1 + \frac{\mathrm{j}L\omega}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}RC\omega}\right].$$

Par identification selon ω avec la forme donnée par l'énoncé,

$$\frac{\mathrm{j}L\omega}{R} = \frac{\mathrm{j}Q\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mathrm{j}RC\omega} = -\frac{\mathrm{j}Q\omega_0}{\omega} = \frac{Q\omega_0}{\mathrm{j}\omega}\,.$$

On en déduit

$$\frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{R} \quad \text{et} \quad Q\omega_0 = \frac{1}{RC}\,.$$

On en déduit par substitution

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,.}$$

2 On a

$$\frac{U_\mathrm{m}}{I_\mathrm{m}} = |\underline{Z}| = R\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}\,.$$

Dans les deux limites $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$, l'amplitude U_m diverge. Ainsi, elle ne passe (probablement) pas par un maximum entre ces deux limites. En revanche, la parenthèse contient une différence, qui peut s'annuler. La parenthèse étant mise au carré, 0 est évidemment sa valeur minimale, atteinte lorsque

$$\boxed{\omega = \omega_\mathrm{a} = \omega_0\,.}$$

Ce minimum existe toujours : **l'existence de l'anti-résonance ne dépend pas du facteur de qualité**.

Pour $\omega = \omega_\mathrm{a}$, l'impédance complexe du circuit est réelle positive : $\underline{Z} = R$. Le déphasage entre u et i, égal à $\arg \underline{Z}$, est donc nul.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

3 D'après la question précédente,

$$|\underline{U}| = R\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}\, I_\text{m}$$

Cherchons les pulsations limites.

$$|\underline{U}(\omega_{1,2}| = \sqrt{2}\,|\underline{U}(\omega_\text{a}|$$

$$R\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{1,2}}\right)^2}\, I_\text{m} = \sqrt{2}RI_\text{m}$$

$$1 + Q^2\left(\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{1,2}}\right)^2 = 2$$

$$Q\left(\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{1,2}}\right) = \pm 1$$

Pour faciliter l'écriture, on pose $x = \omega_{1,2}/\omega_0$. On cherche donc à résoudre

$$Q\left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm 1$$

ou encore

$$x - \frac{1}{x} = \pm\frac{1}{Q}$$

Les deux valeurs de x solutions de cette équation donnent les deux pulsations limite. Comme toujours, il faut transformer cette équation fractionnaire en équation polynômiale,

$$x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0$$

Cette équation a un discriminant

$$\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 > 0\,.$$

On trouve alors quatre solutions mathématiquement possibles pour les pulsations réduites x

$$x_\pm = \pm\frac{1}{2Q} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

mais seules deux sont physiquement acceptables car $x > 0$. Comme $\sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} > \frac{1}{Q}$ alors ces deux solutions sont

$$x_\pm = \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \pm \frac{1}{2Q} \qquad \text{d'où} \qquad \omega_{1,2} = \omega_0 x_\pm$$

et on en déduit finalement

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q} - \frac{-\omega_0}{2Q} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}\,.}$$

4 Estimer la fréquence propre est beaucoup plus précis à partir de la courbe de phase que de la courbe d'amplitude, puisque d'après la question 2, il suffit de repérer la fréquence pour laquelle $\varphi = 0$. On lit alors

$$\boxed{f_0 = 1{,}8\,\text{kHz}\,.}$$

Pour déterminer le facteur de qualité, on estime la largeur en fréquence de la résonance à partir de la courbe d'amplitude : par définition, $U_\text{m}/I_\text{m} = |\underline{Z}|$. À l'anti-résonance, on lit graphiquement $U_\text{m}/I_\text{m} = 5 \cdot 10^2\ \Omega$, donc f_1 et f_2 sont les fréquences telles que $U_\text{m}/I_\text{m} = \sqrt{2} \times 5 \cdot 10^2\ \Omega = 7 \cdot 10^2\ \Omega$. On lit sur la figure

$$f_1 = 1{,}3\,\text{kHz} \qquad \text{et} \qquad f_2 = 2{,}5\,\text{kHz}$$

On en déduit

$$\boxed{Q = \frac{\omega_\text{a}}{\Delta\omega} = \frac{f_\text{a}}{\Delta f} = 1{,}5}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Exercice 9 : Résonance en courant d'un moteur

2 | 2

- *Impédances complexes ;*
- *Fréquence de résonance.*

1 Voir figure 3

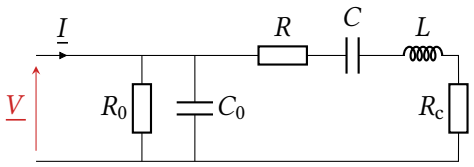

Figure 3 – Schéma complet du modèle électrique de moteur.

2 L'impédance $\underline{Z_s}$ de l'ensemble série vaut

$$\underline{Z_s} = R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \mathrm{j}L\omega + R_c = (R + R_c) + \mathrm{j}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right).$$

On cherche une résonance en courant, sous-entendu à $\underline{V}$ fixé : on s'intéresse donc à l'admittance, dont le module est maximal quand celui de l'impédance est minimal. Comme sa partie réelle ne dépend pas de ω, le minimum est atteint pour la pulsation qui annule la partie imaginaire. Ainsi,

$$L\omega_s - \frac{1}{C\omega_s} = 0 \quad \text{soit} \quad L\omega_s = \frac{1}{C\omega_s} \quad \text{d'où} \quad LC{\omega_s}^2 = 1 \quad \text{donc} \quad \boxed{\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC}}.}$$

3 Par définition de l'admittance, $\underline{I} = \underline{Y}\,\underline{V}$, donc en termes d'amplitude $I_m = YV_m$. Comme la tension d'alimentation est fixée, l'amplitude du courant dans le moteur est maximale lorsque Y est maximal. Par lecture graphique, on constate que **la résonance est atteinte pour $x \simeq 1$**, soit

$$\omega_r \simeq \omega_s = 2{,}2 \cdot 10^5 \,\mathrm{rad \cdot s^{-1}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{f_r = 36\,\mathrm{kHz}.}$$

4 On trouve

$$\underline{Y_0}(\omega_s) = \frac{1}{R_0} + \mathrm{j}C\omega_s \quad \text{soit} \quad Y_0 = \sqrt{\frac{1}{{R_0}^2} + C^2{\omega_s}^2} = 1{,}8 \cdot 10^{-3}\,\Omega^{-1}$$

et comme d'après la question 2 $\underline{Z_s} = R + R_c$ à la résonance, alors

$$Y_s = \frac{1}{R + R_c} = 1 \cdot 10^{-2}\,\Omega^{-1}.$$

On en conclut que l'admittance $\underline{Y_0}$ est bien plus faible que l'admittance $\underline{Y_s}$, ce qui justifie d'avoir

$$\underline{Y} = \underline{Y_0} + \underline{Y_s} \simeq \underline{Y_s}$$

et donc que la fréquence de résonance du moteur soit quasiment égale à la fréquence de résonance de l'impédance motionelle.

5 Suite à cette modification de la charge, $Z_s = R + R_c$ varie de 10 % tout au plus, et il en est donc de même pour Y_s. On a donc toujours $Y_s \gg Y_0$, ce qui permet toujours d'assimiler la fréquence de résonance du moteur à celle de son impédance motionnelle. Comme R_c n'intervient pas dans l'expression de ω_s, on en déduit que **la fréquence de résonance du moteur ne change pratiquement pas** sous l'effet de la variation de charge. C'est un avantage pour le fonctionnement du moteur car **la fréquence de l'alimentation n'a pas besoin d'être adaptée à la charge** mécanique du moteur.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Exercice 10 : Suspension d'un VTT

2 | 2

▹ *Oscillateur mécanique.*

Tout au long de l'exercice, le système étudié est l'ensemble du cadre et du vététiste, en mouvement par rapport au référentiel terrestre que l'on considère galiléen. Ce système est soumis à son poids $\vec{P}$, à la force $\vec{F}_\text{r}$ de rappel du ressort de la suspension et à la force $\vec{F}_\text{a}$ exercée par l'amortisseur.

1 Comme $z = z_\text{e}$ et $z_0 = 0$ sont des constantes, l'amortisseur n'exerce aucune force sur le vététiste, et la longueur du ressort est égale à z. La position d'équilibre est celle où la force exercée par le ressort sur M compense exactement le poids du VTT, soit

$$\vec{P} + \vec{F}_\text{r} = \vec{0} \qquad \text{soit} \qquad -mg\vec{u}_z - k(z_\text{e} - L_0)\vec{u}_z = \vec{0} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{z_\text{e} = L_0 - \frac{mg}{k}\,.}$$

Le ressort est plus court qu'à vide, ce qui est logique à cause du poids du vélo et du vététiste.

2 Appliquons la loi de la quantité de mouvement au cadre du VTT dans le référentiel terrestre. Il est soumis à son poids et aux forces exercées par le ressort et l'amortisseur. Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{P} + \vec{F}_\text{r} + \vec{F}_\text{a} \qquad \text{soit} \qquad m\ddot{z}\vec{u}_z = -mg\vec{u}_z - k\left[(z - z_0) - L_0\right]\vec{u}_z - \alpha(\dot{z} - \dot{z_0})\vec{u}_z\,.$$

En projetant et en remplaçant z par $Z + z_\text{e}$ (donc $\dot{Z} = \dot{z}$ et $\ddot{Z} = \ddot{z}$), on obtient

$$m\ddot{Z} + \alpha\dot{Z} + kZ = -mg - k(z_\text{e} - z_0) + kL_0 - \alpha\dot{z}_0$$

ce qui donne en remplaçant z_e par son expression

$$\boxed{m\ddot{Z} + \alpha\dot{Z} + kZ = F \qquad \text{avec} \qquad F = kz_0 + \alpha\dot{z}_0}$$

F s'interprète comme une force verticale ressentie par le cadre en raison du caractère non plat du chemin. Vous avez tous déjà ressenti cet effet en voiture, par exemple en passant sur un dos d'âne.

3 Le VTT est en mouvement forcé, par un forçage F sinusoïdal. Une fois le régime permanent atteint, ce qui est implicitement supposé, toutes les grandeurs dynamiques sont sinusoïdales de même pulsation que le forçage, et en particulier la vitesse v_z.

On utilise la représentation complexe pour déterminer son amplitude : $\underline{F} = F_\text{m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ et $\underline{v_z} = V_\text{m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}$. Comme $v_z = \dot{z} = \dot{Z}$, $\underline{v} = \mathrm{j}\omega\underline{Z}$. Passons l'équation différentielle obtenue en représentation complexe,

$$m(\mathrm{j}\omega)^2\underline{Z} + \alpha\mathrm{j}\omega\underline{Z} + k\underline{Z} = \underline{F} \qquad \text{d'où} \qquad m\mathrm{j}\omega\underline{v_z} + \alpha\underline{v_z} + k\frac{\underline{v_z}}{\mathrm{j}\omega} = \underline{F}\,,$$

et ainsi

$$\underline{v_z} = \frac{\underline{F}}{m\mathrm{j}\omega + \alpha - \dfrac{\mathrm{j}k}{m}}$$

L'amplitude de la vitesse est au final

$$\boxed{V_\text{m} = |\underline{v_z}| = \frac{F_\text{m}}{\sqrt{\alpha^2 + \left(m\omega - \dfrac{k}{\omega}\right)^2}}}$$

4 $\underline{H}$ représente la façon dont les oscillations du chemin (via $\underline{z_1}$) se répercutent sur le cadre (via $\underline{Z}$) par l'intermédiaire de la suspension, et sont donc ressenties par le vététiste. Comme $\underline{v_z} = \mathrm{j}\omega\underline{Z}$ et $\underline{F} = k\underline{z_0} + \mathrm{j}\omega\alpha\underline{z_0}$, on obtient en remplaçant dans l'expression de $\underline{v_z}$ obtenue à la question précédente

$$\mathrm{j}\omega\underline{Z} = \frac{k\underline{z_0} + \mathrm{j}\omega\alpha\underline{z_0}}{m\mathrm{j}\omega + \alpha - \dfrac{\mathrm{j}k}{m}}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

d'où

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}}{\underline{z_0}} = \frac{k + \mathrm{j}\alpha\omega}{k + \mathrm{j}\alpha\omega - m\omega^2}$$

En utilisant $\alpha = 2\xi\sqrt{mk}$ et en divisant numérateur et dénominateur par k, on aboutit à

$$\boxed{\underline{H}(u) = \frac{1 + 2\mathrm{j}\xi u}{1 - u^2 + 2\mathrm{j}\xi u}}$$

5 Pour ressentir le moins possible les vibrations dues aux cailloux, il faut que $\left|\underline{H}\right|$ soit aussi petit que possible, et éviter absolument la situation de résonance. D'après la figure, cela correspond à $u \gg 1$, soit une pulsation ω élevée, donc à une vitesse élevée. **Pour minimiser les vibrations, il faut donc rouler aussi vite que possible sur les cailloux**. Évidemment, il en va tout autrement de l'adhérence !

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr