Résonance

Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
Difficulté technique et calculatoire ;
Exercice important.

Flasher ou cliquer pour accéder au corrigé

Se préparer

Applications de cours

Ces applications de cours sont des briques élémentaires des raisonnements à mener dans les exercices : les maîtriser est incontournable. Elles sont toutes traitées de manière exhaustive dans le cours.

E4+M5.1 - Considérons un circuit RC série alimenté par une tension sinusoïdale $e(t) = E_\text{m}\cos(\omega t)$. Déterminer U_m et φ l'amplitude et le déphasage par rapport à e de la tension u aux bornes du condensateur.

E4+M5.2 - Pour un circuit RLC série, exprimer l'amplitude complexe $\underline{U_C}$ en fonction de $\underline{E}$ et des composants. L'écrire sous la forme

$$\underline{U_C} = \frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + \text{j}\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}\underline{E}$$

et identifier l'expression de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q.

E4+M5.3 - L'amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur d'un circuit RLC série s'écrit

$$\underline{U_C} = \frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + \text{j}\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}\underline{E}\,.$$

Établir la condition d'existence de la résonance, et déterminer la pulsation de résonance ω_r. Tracer qualitativement mais en justifiant l'allure de $|\underline{U_C}|$ en fonction de ω.

E4+M5.4 - L'amplitude complexe de l'intensité dans un circuit RLC série s'écrit

$$\underline{I} = \frac{1}{1 + \text{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}\frac{\underline{E}}{R}\,.$$

Déterminer la pulsation de résonance ω_r et sa largeur $\Delta\omega$. Tracer qualitativement mais en justifiant l'allure de $|\underline{I}|$ en fonction de ω.

Cahier d'Entraînement

Le *Cahier d'Entraînement* est un projet collaboratif mené par des enseignants de CPGE, proposant aux étudiants des entraînements leur permettant de travailler en autonomie sur des techniques et « réflexes » utiles dans les exercices, en particulier calculatoires. Il est librement téléchargeable en scannant ou cliquant sur le QR-code ci-contre.

⇝ pour ce chapitre : 5.3 à 5.6.

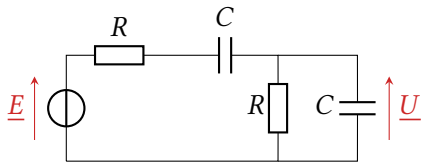
BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Exercice 1 : Pont de Wien

2 | 2 |

- *Impédances complexes ;*
- *Largeur de résonance ;*
- *Tracé des courbes d'amplitude et de phase.*



Considérons le circuit ci-contre, nommé *pont de Wien*, en régime sinusoïdal établi.

1 - Exprimer l'amplitude complexe $\underline{U}$ en fonction de $\underline{E}$ et des composants.

2 - On pose $x = RC\omega$. Identifier la fonction f telle que

$$U = |\underline{U}| = \frac{E}{3\sqrt{f(x)}}\,.$$

3 - Analyser la condition d'existence d'une résonance et la pulsation ω_0 correspondante.

4 - Déterminer la largeur de résonance $\Delta\omega$. En déduire le facteur de qualité Q du circuit.

5 - Représenter l'allure des courbes d'amplitude U et de phase φ en fonction de ω.

✎ ***Correction —*** ***1 -*** *La résistance et le condensateur montés en parallèle ont pour admittance équivalente*

$$\underline{Y_{éq}} = jC\omega + \frac{1}{R}$$

Par un pont diviseur de tension,

$$\frac{\underline{U}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z_{éq}}}{\underline{Z_{éq}} + R + \dfrac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + \left(R + \dfrac{1}{jC\omega}\right)\left(jC\omega + \dfrac{1}{R}\right)}$$

$$\boxed{\underline{U} = \frac{1}{3 + jRC\omega + \dfrac{1}{jRC\omega}}\underline{E}}$$

> ***Question d'analyse 1*** *- Pourquoi le pont diviseur doit-il être écrit avec l'impédance équivalente $\underline{Z_{éq}}$ et pas seulement le condensateur ?*
>
> ***Question d'analyse 2*** *- Quelle opération a été réalisée entre la première et la deuxième ligne du calcul ? En quoi est-elle astucieuse (et mérite donc d'être retenue !) ?*

2 - *En factorisant dans le résultat précédent,*

$$\underline{U} = \frac{1}{1 + \dfrac{j}{3}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}\frac{\underline{E}}{3} \qquad \textit{soit} \qquad |\underline{U}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{9}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2}}\frac{E}{3}$$

ce qui permet d'identifier

$$\boxed{f(x) = 1 + \frac{1}{9}\left(x - \frac{1}{x}\right)^2\,.}$$

> ***Question d'analyse 3*** *- Justifier la présence d'un signe − dans le terme entre parenthèses.*
>
> ***Question d'analyse 4*** *- Justifier la présence du signe + entre les deux termes de la fonction f.*

3 - *L'amplitude $U = |\underline{U}|$ est maximale si f est minimale. S'agissant d'une somme de termes positif, f est minimale lorsque le second membre est nul,*

$$x - \frac{1}{x} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm 1\,.$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Il y a donc toujours résonance, pour une pulsation telle que $RC\omega_0 = 1$, *soit*

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{RC}\,.}$$

> ***Question d'analyse 5*** *- Pourquoi n'y a-t-il plus de* $\pm$ *dans le résultat final ?*

4 - *Cherchons les pulsations de coupure, telles que*

$$\frac{1}{9}\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad x - \frac{1}{x} = \pm 3 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2 \pm 3x - 1 = 0\,.$$

> ***Question d'analyse 6*** *- Pourquoi la recherche des pulsations de coupure se ramène-t-elle à cette équation ?*
>
> ***Question d'analyse 7*** *- Peut-on éliminer le signe* $\pm$ *comme précédemment ?*

Ces équations ayant pour discriminant $9 + 4 = 13 > 0$, *elles admettent chacune deux solutions réelles*

$$x = \frac{\pm 3 \pm \sqrt{13}}{2}\,,$$

mais les seules solutions physiquement pertinentes sont

$$x_\pm = \frac{\sqrt{13} \pm 3}{2}\,.$$

On en déduit la largeur de la résonance,

$$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = (x_+ - x_-)\omega_0$$

d'où on déduit

$$\boxed{\Delta\omega = 3\omega_0 \qquad et \qquad Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{3}\,.}$$

> ***Question d'analyse 8*** *- Pourquoi* $\sqrt{13}$ *n'apparaît-il pas dans le résultat final ?*

5 - *Dans la limite basse fréquence,*

$$\underline{U} \sim jRC\omega\,\underline{E} \qquad donc \qquad \begin{cases} U \to 0 \\ \varphi \to \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

> ***Question d'analyse 9*** *- Définir de façon précise ce qu'est pour ce circuit une « basse » ou une « haute » fréquence.*
>
> ***Question d'analyse 10*** *- Justifier l'équivalent de* $\underline{U}$.

Dans la limite haute fréquence,

$$\underline{U} \sim \frac{\underline{E}}{jRC\omega} \qquad donc \qquad \begin{cases} U \to 0 \\ \varphi \to -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

> ***Question d'analyse 11*** *- Justifier l'équivalent de* $\underline{U}$.
>
> ***Question d'analyse 12*** *- Justifier la valeur de l'argument.*
>
> ***Question d'analyse 13*** *- À toi de tracer les courbes demandées !*

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

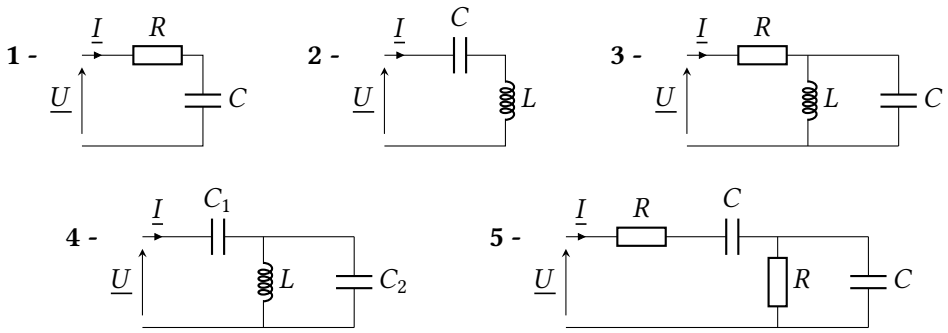
Électronique en représentation complexe

Exercice 2 : Détermination d'impédances

1 | 2

▹ *Impédances complexes.*

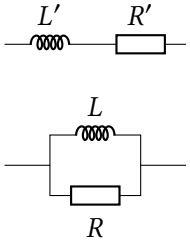
Déterminer l'impédance complexe des dipôles ci-dessous. Écrire les résultats sous forme d'une unique fraction, en faisant apparaître des quantités adimensionnées telles que $RC\omega$, $L\omega/R$ et $LC\omega^2$. Les trois premiers circuits sont simples et doivent être traités sans difficulté. Les deux derniers donnent des résultats un peu plus compliqués.



Exercice 3 : Équivalence entre dipôles RL

1 | 2

▹ *Impédances complexes.*



Les dipôles ci-contre sont étudiés en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω.

1 - Déterminer en fonction de ω les valeurs de R' et L' pour lesquelles les deux dipôles sont équivalents.

2 - Si l'on remplace la bobine L' par un condensateur C', peut-il encore y avoir équivalence ? Commenter.

Exercice 4 : Identification d'un dipôle inconnu

1 | 2

▹ *Impédances complexes ;*
▹ *Détermination d'un déphasage.*

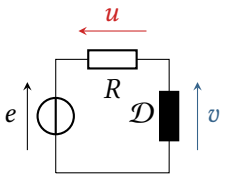
Dans le montage représenté ci-dessous, le générateur délivre une tension e sinusoïdale de pulsation ω, $R = 100\,\Omega$ est une résistance et $\mathcal{D}$ un dipôle inconnu d'impédance complexe notée $\underline{Z} = X + \mathrm{j}Y$. On pose

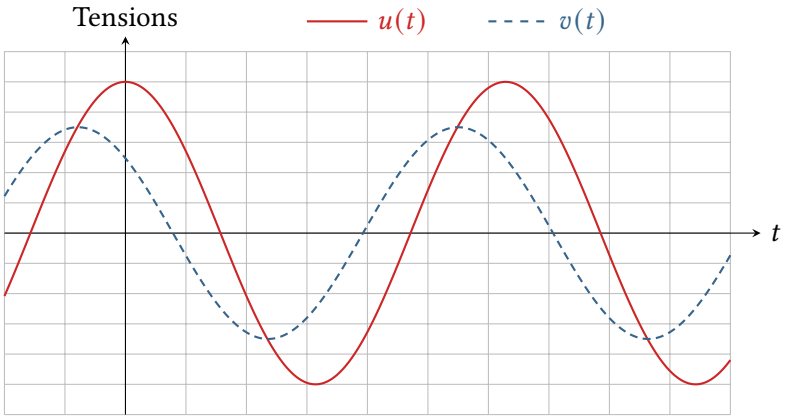
$$u(t) = U_\mathrm{m}\cos(\omega t) \qquad \text{et} \qquad v(t) = V_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi)$$

les tensions aux bornes respectivement de R et $\mathcal{D}$. En utilisant le mode mathématique de l'oscilloscope, on y affiche les tensions u et v reproduites sur la courbe ci-dessous. Les graduations sont respectivement de 10 ms/div en abscisse et 1 V/div en ordonnée.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr





1 - Pourquoi est-il impossible d'afficher simultanément u et v à l'oscilloscope sans avoir recours au mode mathématique ?

2 - Déterminer graphiquement l'amplitude et la pulsation des signaux représentés.

3 - La tension v est-elle en avance ou en retard de phase par rapport à la tension u ? En déduire le signe de φ, et déterminer sa valeur à partir de la courbe.

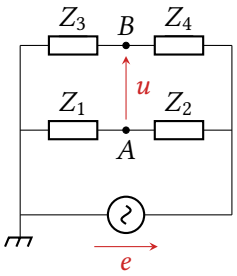
4 - Déterminer les valeurs de X et Y.

5 - Comment peut-on modéliser $\mathcal{D}$? Donner ses caractéristiques.

Exercice 5 : Ponts de mesure

inspiré oraux banque PT | 2 | 2 |

▹ *Impédances complexes.*



Les ponts de mesure constituent une famille de circuits électriques permettant la mesure d'impédances. Il en existe plusieurs déclinaisons selon la nature capacitive, inductive ou résistive du dipôle étudié, mais toutes reposent sur la même structure à quatre branches schématisée ci-contre : l'une des impédances est celle que l'on souhaite déterminer, deux sont des résistances connues et fixées, et la quatrième est une impédance variable.

Le pont est alimenté par une tension e sinusoïdale de pulsation ω. Le réglage consiste à modifier l'impédance variable jusqu'à obtenir $u = 0$: le pont est alors dit équilibré. Connaître l'impédance variable dans cette situation permet d'en déduire l'impédance inconnue.

1 - Exprimer les potentiels $\underline{V_A}$ et $\underline{V_B}$ en fonction de $\underline{E}$ et des impédances.

2 - En déduire la relation que doivent vérifier les quatre impédances pour que $\underline{U}$ s'annule, appelée *condition d'équilibre du pont.*

On s'intéresse en guise d'illustration à un pont de Maxwell, qui permet de mesurer les caractéristiques d'une bobine inconnue. Dans cette structure,

- ▹ l'impédance 1 est la bobine étudiée, modélisée par l'association série d'une bobine idéale d'inductance L et d'une résistance interne r ;
- ▹ l'impédance 4 est constituée d'un condensateur C et d'une résistance R montés en parallèle, dont les valeurs peuvent être modifiées à volonté par l'expérimentateur ;
- ▹ les impédances 2 et 3 sont deux résistances R_2 et R_3.

3 - Exprimer $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_4}$.

4 - Déduire de la condition d'équilibre du pont l'expression de L et r en fonction des autres grandeurs.

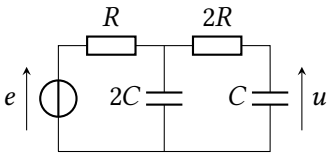
BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Exercice 6 : Obtention d'une équation différentielle

2 | 2

▹ *Lien entre représentations temporelle et fréquentielle.*



En utilisant uniquement les représentations complexes, montrer que la tension u est solution de l'équation différentielle

$$4\tau^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+5\tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+u=e\,,$$

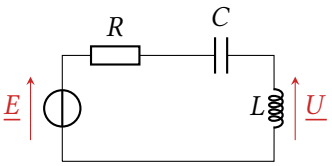
en posant $\tau = RC$. On pourra commencer par relier u à la tension aux bornes du condensateur $2C$, et on n'hésitera pas à regrouper les dipôles sous forme d'impédances équivalentes.

Résonance

Exercice 7 : Résonance aux bornes de la bobine d'un RLC série

1 | 2

▹ *Impédance complexe ;*
▹ *Condition de résonance ;*
▹ *Tracé des courbes d'amplitude et de phase.*



Dans la famille des résonances du RLC, je voudrais la bobine ! Le générateur impose $e(t) = E\cos(\omega t)$

1 - Exprimer l'amplitude complexe $\underline{U}$ et l'écrire sous la forme

$$\underline{U}=\frac{E}{1-\dfrac{{\omega_0}^2}{\omega^2}-\dfrac{\mathrm{j}\omega_0}{Q\omega}}\,,$$

en exprimant ω_0 et Q en fonction de R, L et C.

2 - Établir la condition de résonance sur Q et la pulsation de résonance en fonction de ω_0 et Q.

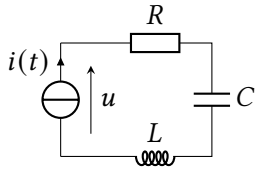
3 - Représenter les graphes $U = |\underline{U}|$ et $\varphi = \arg\underline{U}$ en fonction de ω avec et sans résonance.

4 - Pour quelle pulsation les tensions u et e sont-elles en quadrature de phase ?

Exercice 8 : Circuit RLC série forcé en courant

2 | 2 |

▹ *Impédances complexes ;*
▹ *Condition de résonance ;*
▹ *Exploitation des courbes d'amplitude et de phase.*



Considérons un circuit RLC série alimenté par un générateur idéal de courant imposant $i(t) = I_\mathrm{m}\cos(\omega t)$.

1 - Déterminer l'amplitude complexe $\underline{U}$ et l'écrire sous la forme

$$\underline{U}=R\left[1+\mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]\underline{I}\,.$$

2 - Justifier que ce circuit ne présente pas de résonance en tension, mais une anti-résonance pour laquelle le rapport $U_\mathrm{m}/I_\mathrm{m}$ est minimal. Déterminer la pulsation d'anti-résonance ω_a. Que vaut le déphasage entre i et u à cette pulsation ? L'existence de l'anti-résonance dépend-elle du facteur de qualité du circuit ?

3 - On s'intéresse à la largeur en fréquence de l'anti-résonance. Montrer que les pulsations ω_1 et $\omega_2 > \omega_1$ telles

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

que $\left|\underline{U}(\omega_1)\right| = \left|\underline{U}(\omega_2)\right| = \sqrt{2}\left|\underline{U}(\omega_a)\right|$ sont données par

$$\omega_{1,2} = \Omega \pm \frac{\omega_0}{2Q} \qquad \text{avec} \qquad \Omega = \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}\,.$$

En déduire la largeur $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ de l'anti-résonance.

4 - Des relevés expérimentaux de U_m/I_m et du déphasage de u par rapport à i sont représentés figure 1. En déduire la fréquence propre et le facteur de qualité du circuit.

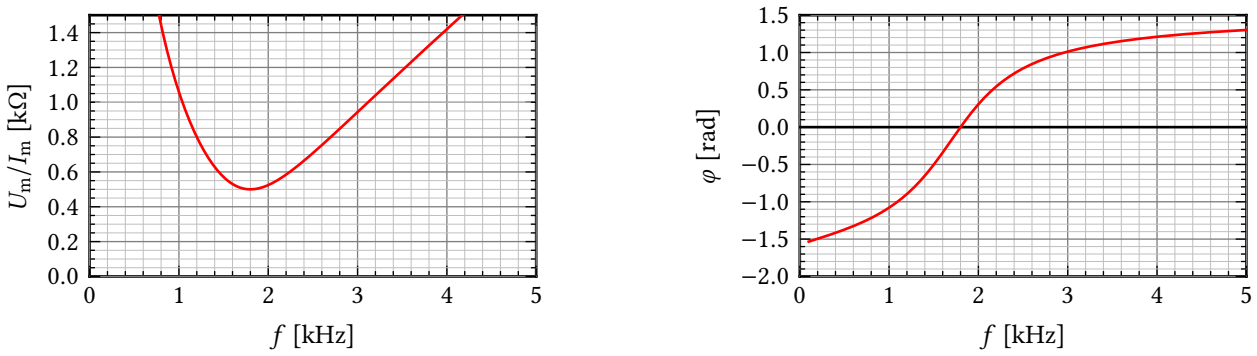
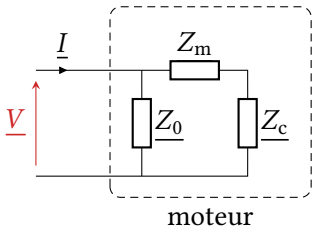


Figure 1 – Mesures d'amplitude et de déphasage.

Exercice 9 : Résonance en courant d'un moteur

2 | 2

- *Impédances complexes ;*
- *Fréquence de résonance.*



Un moteur à ultrasons est alimenté par une tension sinusoïdale d'amplitude complexe $\underline{V}$, on note $\underline{I}$ l'amplitude complexe du courant passant dans le moteur. Pour que le rendement du moteur soit optimal, il doit être alimenté à une fréquence égale à sa fréquence de résonance en courant.

Le moteur est équivalent au schéma ci-contre. $\underline{Z_0}$ représente l'impédance complexe intrinsèque du moteur. Les phénomènes électromécaniques au sein du moteur sont pris en compte, sur ce schéma, par une impédance $\underline{Z_m}$ appelée impédance motionnelle et par une impédance $\underline{Z_c}$ dont la valeur est fonction de la charge mécanique du moteur.

Le dipôle d'impédance $\underline{Z_0}$ est constitué d'une résistance $R_0 = 18\,\text{k}\Omega$ en parallèle d'un condensateur $C_0 = 8\,\text{nF}$. L'impédance motionnelle $\underline{Z_m}$ est celle d'un circuit RLC série avec $R = 50\,\Omega$, $L = 0{,}1\,\text{H}$ et $C = 0{,}2\,\text{nF}$. Enfin, l'impédance de charge $\underline{Z_c}$ correspond à une résistance R_c dans un premier temps prise égale à $50\,\Omega$.

1 - Reproduire le schéma du moteur en remplaçant les éléments $\underline{Z_0}$, $\underline{Z_m}$ et $\underline{Z_c}$ par les résistances, inductances et condensateurs qui leur correspondent.

2 - Déterminer la pulsation de résonance en courant ω_s du circuit série constitué de $\underline{Z_m}$ et $\underline{Z_c}$.

On note $\underline{Y}$ l'admittance complexe équivalente à l'ensemble du moteur. La figure 2 représente l'évolution du module $Y = |\underline{Y}|$ en fonction de la pulsation réduite $x = \omega/\omega_s$.

3 - Justifier que la résonance en courant correspond au maximum de la courbe d'admittance. Déterminer numériquement la fréquence f_r de résonance du moteur.

4 - Comparer numériquement $Y_0 = |\underline{Y_0}|$ et Y_s le module de l'admittance $\underline{Y_s} = 1/(\underline{Z_m}+\underline{Z_c})$ lorsque $\omega = \omega_s$. Commenter l'écart entre ω_s et ω_r.

5 - Une modification de la charge mécanique du moteur provoque une variation de la résistance R_c de l'ordre d'une dizaine d'ohms. Cette variation a-t-elle un effet significatif sur la fréquence de résonance en courant ? En quoi est-ce un avantage pour le fonctionnement du moteur ?

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

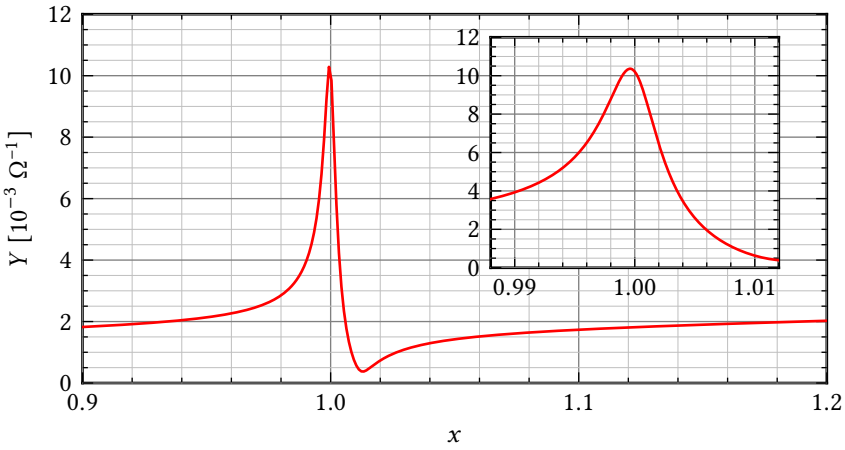
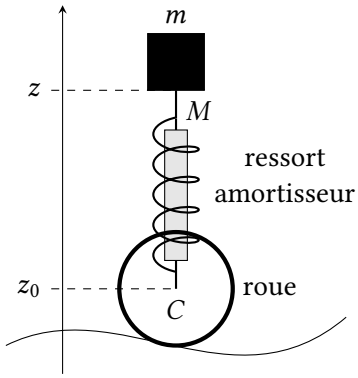


Figure 2 – Module de l'admittance du moteur en fonction de la pulsation réduite. La courbe en insert représente un zoom de la courbe principale au voisinage de $x = 1$.

Exercice 10 : Suspension d'un VTT

2 | 2

▹ *Oscillateur mécanique.*



Le but de cet exercice est d'étudier les caractéristiques d'une suspension de VTT. Le VTT est modélisé par un solide de masse m décrivant le cadre et le vététiste, repéré par la position d'un point M, posé sur une unique suspension. L'effet de la roue arrière n'est pas pris en compte.

La suspension est modélisée par un ressort de raideur k et de longueur à vide L_0 attaché en M dont l'autre extrémité est fixée au centre C de la roue, qui suit exactement le profil du chemin. Les positions de M et C sont repérées par leurs abscisses z et z_0 sur un axe vertical Oz ascendant tel que $z_0 = 0$ corresponde à la position moyenne du chemin. Outre le ressort, la suspension contient un amortisseur fluide de coefficient d'amortissement α. L'effet de l'amortisseur sur le mouvement de M se modélise par une force

$$\vec{F}_a = -\alpha(\dot{z} - \dot{z}_0)\,\vec{u}_z$$

où $v\dot{z}$ et $\dot{z}_0$ sont les vitesses verticales respectives de M et C. La raideur k et le coefficient α peuvent être réglés par l'intermédiaire de la pression en huile et en air dans la suspension.

1 - Lorsque le VTT se déplace sur une route plate et lisse, $z_0 = 0$, et la cote z est constante, de valeur z_e, en régime dit stabilisé. Déterminer z_e en fonction de m, g, k et L_0.

2 - Considérons maintenant le VTT se déplaçant sur un chemin bosselé. On pose $Z(t) = z(t) - z_e$. Montrer que $Z(t)$ vérifie une équation différentielle de la forme

$$m\ddot{Z} + \alpha\dot{Z} + kZ = F(t)\,,$$

où $F(t)$ est une fonction à déterminer, dépendant de z_0, de v_0 et des constantes α et k caractéristiques de la suspension. Préciser le sens physique de F.

3 - On considère le cas où le profil du chemin est tel que $F(t)$ est une fonction sinusoïdale d'amplitude F_m et de pulsation ω. Justifier que la vitesse v d'oscillation verticale du VTT est également sinusoïdale de même pulsation que F. Calculer son amplitude V_m en fonction de F_m.

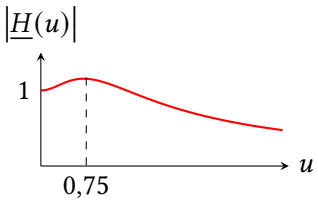
BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

4 - La fonction de transfert de la suspension est définie par $\underline{H} = \underline{Z}/\underline{z_0}$, et on introduit les paramètres adimensionnés

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{mk}} \qquad \text{et} \qquad u = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Que représente physiquement $\underline{H}$? Exprimer $\underline{H}$ en fonction de ξ et u.



Pour un VTT se déplaçant à la vitesse V sur un chemin fait de cailloux de taille ℓ, le spectre d'excitation est maximal autour de $\omega = 2\pi V/\ell$. La figure ci-contre représente l'allure de $|\underline{H}(u)|$ pour $\xi = 1$.

5 - Pour un meilleur confort, vaut-il mieux rouler vite ou lentement ? Commenter.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr