Version complétée

Filtrage

Plan du cours

I Compléments mathématiques sur les signaux périodiques **2**
- I.A Développement de Fourier d'un signal périodique . . . 2
- I.B Valeur moyenne . . . 4
- I.C Valeur efficace . . . 6

II Caractérisation d'un filtre linéaire **7**
- II.A Notion de filtre linéaire . . . 7
- II.B Fonction de transfert harmonique . . . 8
- II.C Diagramme de Bode . . . 9
- II.D Bande passante . . . 10

III Exemples fondamentaux **11**
- III.A Méthodes d'étude d'un filtre . . . 11
- III.B Filtre passe-bas du premier ordre . . . 11
- III.C Filtre passe-haut du premier ordre . . . 12
- III.D Filtre passe-bande . . . 13
- III.E Filtre passe-bas du deuxième ordre . . . 15

IV Transformation d'un signal par un filtre **16**
- IV.A Point de vue fréquentiel . . . 16
- IV.B Point de vue temporel : comportement moyenneur, dérivateur, intégrateur . . . 17

V Association de filtres **20**
- V.A Influence de la charge sur le fonctionnement d'un filtre . . . 20
- V.B Impédances d'entrée et de sortie . . . 21

(R) Résultat à connaître par cœur.
(M) Méthode à retenir, mais pas le résultat.
(D) Démonstration à savoir refaire.
(Q) Aspect qualitatif uniquement.

Les paragraphes sans mention en marge sont là pour faciliter votre compréhension ou pour votre culture mais n'ont pas forcément besoin d'être appris en tant que tel.

Ce dernier cours d'électronique constitue une introduction au domaine très vaste du **traitement du signal**, que l'on peut définir l'ensemble des méthodes (physiques, mathématiques et numériques) permettant d'analyser, transformer et interpréter des signaux (audio, images, données). Il vise à extraire de l'information utile, réduire le bruit parasite, améliorer la qualité ou encore faciliter la transmission.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

I - Compléments mathématiques sur les signaux périodiques

Un signal physique ayant une durée finie, il peut toujours être vu comme une période d'un signal périodique, en le répliquant à l'identique au delà de l'intervalle temporel sur lequel il est réellement défini. Les considérations développées dans ce paragraphe sont donc de portée très générale.

I.A - Développement de Fourier d'un signal périodique

• Définition

Tout signal y périodique de pulsation ω et de forme quelconque
peut se décomposer en une somme de signaux sinusoïdaux de pulsations multiples de ω.

$$y(t) = Y_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} Y_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \qquad \text{avec } Y_n \geq 0 \text{ et } \varphi_n \in]-\pi, \pi]$$

$$y(t) = Y_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin(n\omega t) \qquad \text{avec } A_n \text{ et } B_n \text{ quelconques}$$

Cette écriture est appelée **développement en série de Fourier** ou **décomposition de Fourier** de $y(t)$.

- Les termes du développement de Fourier sont appelés **harmoniques** du signal, repérées par leur **rang** n : Y_n, $\omega_n = n\omega$ et φ_n sont l'amplitude, la pulsation et la phase initiale de l'harmonique de rang n.
- Le terme constant Y_0, correspondant à l'harmonique de rang 0 et de pulsation nulle, est appelé **composante continue** du signal.
- L'harmonique de rang 1, de même pulsation que le signal lui-même, est appelée **fondamental**.
- Le **spectre** (d'amplitude) du signal $y(t)$ est la représentation des amplitudes Y_n des différentes harmoniques en fonction de leur pulsation $\omega_n = n\omega$ ou le plus souvent de leur fréquence $f_n = \omega_n/2\pi$.

> ***Remarque :*** *le terme constant Y_0 peut être inclus dans la somme comme un cosinus de pulsation nulle, correspondant au terme $n = 0$.*

➽ **Pour approfondir :** Les sommes infinies doivent s'interpréter comme d'habitude, c'est-à-dire comme des limites de sommes finies dont la borne du haut tend vers l'infini, avec comme d'habitude une difficulté mathématique quant à l'existence de la limite. On peut montrer que la convergence est assurée pour toute fonction f périodique de période T telle que la fonction $|f|^2$ soit intégrable sur $[0, T]$. Les fonctions « usuelles » représentant des signaux physiques admettent toutes un développement en série de Fourier, mais ce n'est pas le cas, par exemple, de la fonction inverse.

En notant $T = 2\pi/\omega$ la période du signal, les coefficients de Fourier sont donnés par

$$Y_0 = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,\mathrm{d}t$$

et pour tout $n > 0$,

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\,\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad B_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\,\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t\,.$$

On peut ensuite remonter à U_n et φ_n par de la trigonométrie classique :

$$Y_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \qquad \text{et} \qquad \tan\varphi_n = -\frac{B_n}{A_n}\,.$$

Le retour à φ_n par la fonction arctan demande d'analyser les signes de A_n et B_n. ■

• Illustration

Le développement en série de Fourier d'un signal créneau de valeurs 0 et E s'écrit

$$y(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi}\sum_{n\ \text{impairs}} \frac{1}{n}\sin(n\omega t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1}\sin\Big((2p+1)\omega t\Big)\,.$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Synthèse du signal avec Python : on travaille avec des tableaux `numpy`, mais des listes pourraient tout aussi bien convenir. Le signal obtenu pour différents nombres d'harmoniques est représenté figure 1.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.close('all')

# Paramètres du signal
T = 1    # unité arbitraire
w = 2 * np.pi / T # pulsation
t = np.linspace(-T, T, 1000)  # temps

E = 1  # amplitude du signal

N = 3  # nombre de termes de la série de Fourier
y = E/2 * np.ones_like(t)  # initialisation du signal reconstitué

for p in range(N):
    y += (2 * E / (np.pi * (2*p + 1))) * np.sin((2*p + 1) * w * t)

plt.figure()
plt.plot(t,y)
plt.xlabel('t (période unité)')
plt.ylabel('y(t)')
```

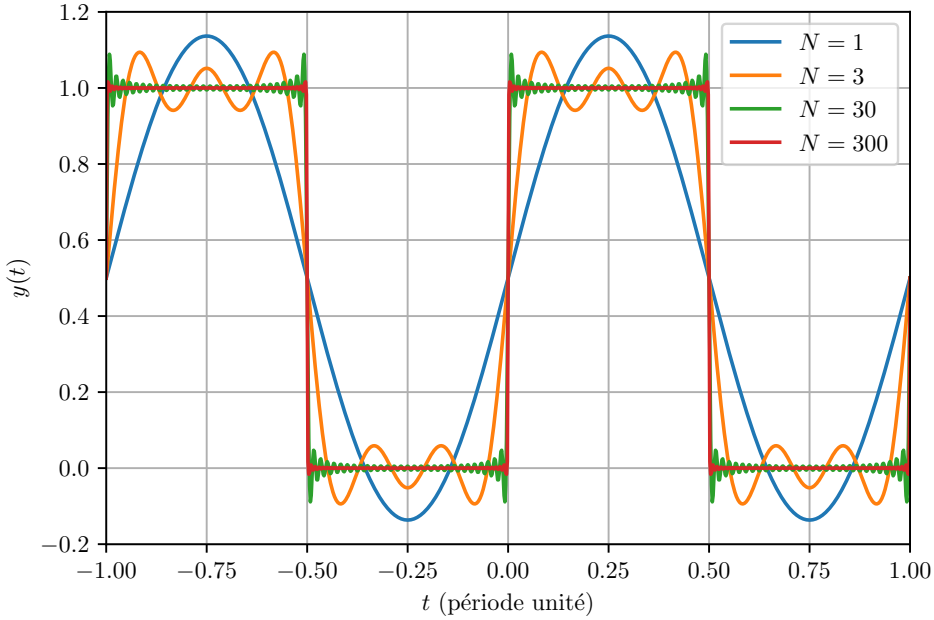


Figure 1 – Synthèse de Fourier d'un signal créneau.

- **Contenu physique des différentes harmoniques**

Observation :

▹ Synthèse spectrale ne prenant en compte que les premières harmoniques :

rend l'allure globale du signal, les perturbations se limitent aux discontinuités

Espace 1

▹ Synthèse spectrale excluant les premières harmoniques :

l'allure globale du signal est perdue, seules demeurent visibles les discontinuités

Espace 2

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

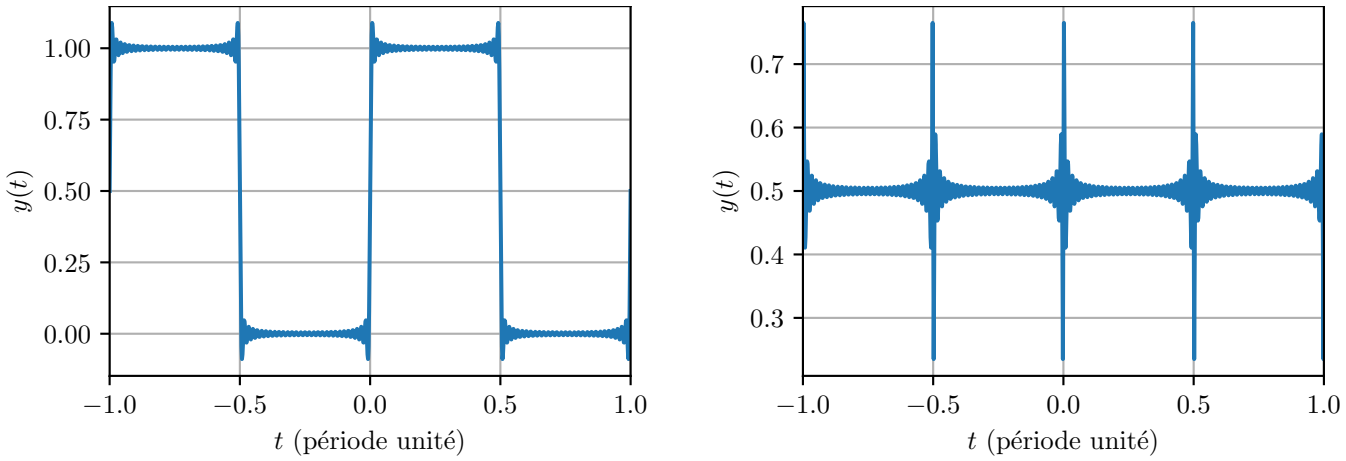


Figure 2 – Synthèse de Fourier d'un signal créneau. Gauche : seules les 30 premières harmoniques sont prises en compte. Droite : les 30 premières harmoniques sont éliminées de la synthèse spectrale.

Généralisation :

Q

Les premières harmoniques d'un signal codent son allure générale.
Les harmoniques d'ordre élevé codent ses variations rapides : discontinuités, bruit.

I.B - Valeur moyenne

- **Définition**

R

On appelle **valeur moyenne** d'un signal y de période T

$$\langle y \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Elle ne dépend pas de l'instant initial t_0 utilisé pour le calcul.

Le moyennage est une opération linéaire : pour deux signaux $y_1(t)$ et $y_2(t)$ et deux constantes λ_1 et λ_2,

$$\langle \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \rangle = \lambda_1 \langle y_1 \rangle + \lambda_2 \langle y_2 \rangle$$

$\rightsquigarrow$ t_0 peut donc être choisi de façon à simplifier le calcul de l'intégrale.

Démonstration qualitative : Considérons le signal $y(t)$ représenté figure 3, dont on cherche à estimer la valeur moyenne. Pour l'approcher, on peut commencer par échantillonner N valeurs équiréparties au sein d'une période, séparées d'une durée Δt, et calculer leur moyenne,

$$\langle y \rangle \simeq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y(t_n) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} y(t_n) \Delta t\,,$$

puisque $\Delta t = T/N$, soit $N = T/\Delta t$. Graphiquement, $y(t_n)\Delta t$ s'interprète comme l'aire d'un rectangle de largeur Δt et de hauteur $y(t_n)$, comme schématisé figure 3. La moyenne s'obtient dans la limite $N \to \infty$, où la somme des aires des rectangles tend vers l'aire sous la courbe représentant le signal, et où la somme tend vers l'intégrale.

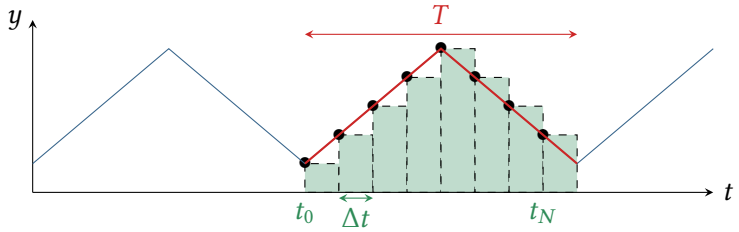


Figure 3 – Moyenne d'un signal périodique.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

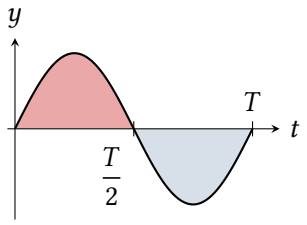
- **Signal sinusoïdal**

Un signal sinusoïdal est de moyenne nulle.

$$\langle \cos(\omega t + \varphi) \rangle = \langle \sin(\omega t + \varphi) \rangle = 0$$

R

Démonstration :



Qualitativement : la courbe d'une fonction sinus ou cosinus est symétrique, et passe autant de temps au dessus qu'au dessous de l'axe des abscisses.

Par le calcul : un sinus n'est qu'un cosinus déphasé de $-\pi/2$, il suffit donc de montrer le résultat pour le cosinus.

D

Posons $y(t) = Y_m \cos(\omega t + \varphi)$. Alors

$$\begin{aligned}
\langle y(t) \rangle &= \frac{Y_m}{T} \int_0^T \cos(\omega t + \varphi)\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{Y_m}{T} \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) \right]_0^T \\
&= \frac{Y_m}{2\pi} \Big(\sin(2\pi + \varphi) - \sin(2\pi) \Big) \qquad \text{car } \omega = \frac{2\pi}{T}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\langle y(t) \rangle = 0}$$

- **Signal quelconque**

La moyenne d'un signal périodique quelconque est égale à sa composante continue.

R

Démonstration : Par linéarité de la moyenne,

D

$$\begin{aligned}
\langle y(t) \rangle &= \langle Y_0 \rangle + \sum_{n=1}^{+\infty} \langle Y_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \rangle \\
&= Y_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Y_n}{T} \left[\frac{1}{n\omega} \sin(n\omega t + \varphi_n) \right]_0^T \\
&= Y_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Y_n}{2n\pi} \Big(\sin(2n\pi + \varphi_n) - \sin(\varphi_n) \Big) \qquad \text{car } \omega = \frac{2\pi}{T}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\langle y(t) \rangle = Y_0 \,.}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Espace 4

I.C - Valeur efficace

- **Définition**

R

On appelle **valeur efficace** d'un signal y de période T

$$Y_{\text{eff}} = \sqrt{\langle y^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} y(t)^2 \,\mathrm{d}t}$$

Attention ! La valeur efficace n'est évidemment pas linéaire !

Q

Intérêt :

- la valeur moyenne d'un signal sinusoïdal étant toujours nulle, elle ne nous dit pas s'il est « grand » ou pas, au contraire de la valeur efficace ;
- les grandeurs énergétiques sont systématiquement reliées au carré des signaux, la valeur efficace d'un signal est une grandeur qui y est adaptée.

> ***Remarque :*** *L'usage en électronique de puissance est de quantifier les signaux non pas par leur amplitude, mais directement par leur valeur efficace. Ainsi, la tension secteur fournie par EDF a une valeur efficace de 230 V et une fréquence de 50 Hz.*

- **Signal sinusoïdal**

R

La valeur efficace Y_{eff} d'un signal sinusoïdal $y(t)$ est reliée à son amplitude Y_{m} par

$$Y_{\text{eff}} = \frac{Y_{\text{m}}}{\sqrt{2}}$$

D

Démonstration : Posons $y(t) = Y_{\text{m}}\cos(\omega t + \varphi)$, donc $y(t)^2 = \frac{Y_{\text{m}}^2}{2}\Big(1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)\Big)$. Ainsi,

$$Y_{\text{eff}}^2 = \big\langle y(t)^2 \big\rangle = \frac{Y_{\text{m}}^2}{2} + \frac{1}{2}\langle \cos(2\omega t + 2\varphi)\rangle = \frac{Y_{\text{m}}^2}{2} + 0$$

Espace 5

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

- **Signal quelconque**

Théorème de Parseval-Plancherel :

Le carré de la valeur efficace d'un signal périodique quelconque
est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques :

$$\text{si} \quad y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} Y_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \qquad \text{alors} \qquad \langle y(t)^2 \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle y_n(t)^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} {Y_n}^2 .$$

Démonstration : en utilisant le développement en série de Fourier,

$$y(t)^2 = \sum_{p=0}^{\infty} y_p(t) \times \sum_{q=0}^{+\infty} y_q(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(y_p(t)^2 + \sum_{\substack{q=0 \\ q \neq p}}^{+\infty} y_p(t) y_q(t) \right)$$

donc par passage à la moyenne

$$\langle y(t)^2 \rangle = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\langle y_p(t)^2 \rangle + \sum_{\substack{q=0 \\ q \neq p}}^{+\infty} \langle y_p(t) y_q(t) \rangle \right)$$

En linéarisant le produit de cosinus intervenant dans la deuxième somme,

$$y_p(t) y_q(t) = Y_p Y_q \cos(p\omega t + \varphi_p) \cos(q\omega t + \varphi_q) = \frac{Y_p Y_q}{2} \Big(\cos((p+q)\omega t + \varphi_p + \varphi_q) + \cos((p-q)\omega t + \varphi_p - \varphi_q) \Big)$$

Or nous avons montré précédemment que $\forall n \neq 0, \langle \cos(n\omega t + \varphi) \rangle = 0$: tous les termes de la deuxième somme sont donc nuls, puisqu'elle est restreinte aux indices p et q différents. On a donc bien

$$\langle y(t)^2 \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle y_n(t)^2 \rangle .$$

II - Caractérisation d'un filtre linéaire

II.A - Notion de filtre linéaire

On appelle **filtre** un système permettant de transmettre dans un signal de sortie s
de l'information issue d'un signal d'entrée e sélectionnée par un critère fréquentiel.

Exemples :

- *Un récepteur radio reçoit toutes les ondes à la fois, mais doit être capable de sélectionner uniquement une bande de fréquence précise correspondant à la station écoutée.*
- *Une chaîne Hi-Fi doit envoyer les fréquences graves, intermédiaires ou aiguës vers les hauts-parleurs dédiés, et donc être capable de les séparer.*
- *Les signaux issus d'un capteur peuvent être perturbés par un bruit aléatoire qu'il faut éliminer.*

Un filtre est un **quadripôle**, c'est-à-dire qu'il possède quatre bornes : deux sont dédiées au signal d'entrée, deux autres au signal de sortie.

Un filtre est dit **linéaire** s'il vérifie le **principe de superposition** :

si à deux entrées $e_1(t)$ et $e_2(t)$ il associe respectivement les sorties $s_1(t)$ et $s_2(t)$
alors la sortie associée à l'entrée $e(t) = \lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t)$ est $s(t) = \lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t)$.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Critère d'identification : un filtre pour lequel $e(t)$ et $s(t)$ sont reliés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants est un filtre linéaire.

⇝ c'est le cas pour tous les filtres que nous rencontrerons cette année.

De plus, nous nous limiterons aux filtres passifs analogiques :

- filtre **passif** : aucun générateur ni composant alimenté à l'intérieur du filtre, par opposition à un filtre **actif** ;
- filtre **analogique** : agit directement sur les tensions électriques, sans numérisation.

> ***Remarque :*** *Le filtrage moderne est de plus en plus souvent numérique : après acquisition, le signal est traité numériquement par un code informatique.*

II.B - Fonction de transfert harmonique

Nous expliquerons par la suite que le signal de sortie d'un filtre linéaire peut se calculer pour une entrée quelconque à condition de connaître le comportement du filtre pour n'importe quelle entrée sinusoïdale.

⇝ on se place donc dans le cas d'une entrée sinusoïdale, ce qui permet de réinvestir toute la puissance des représentations complexes.

R

On appelle **fonction de transfert harmonique** d'un filtre linéaire
le rapport des amplitudes complexes des signaux d'entrée et de sortie en fonction de la pulsation.

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}.$$

- **Interprétation**

Notons les signaux

$$e(t) = E_\text{m}\cos(\omega t + \varphi_e) \qquad \text{et} \qquad s(t) = S_\text{m}\cos(\omega t + \varphi_s)$$

Amplitudes complexes : $\underline{E} = E_\text{m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_e}$ et $\underline{S} = S_\text{m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_s}$

Espace 6

▹ *Module* $|\underline{H}|$ *:*

$|\underline{H}| = \dfrac{|\underline{S}|}{|\underline{E}|} = \dfrac{S_\text{m}}{E_\text{m}}$ ⇝ rapport des amplitudes.

Espace 7

▹ *Argument* $\arg \underline{H}$ *:*

$\arg \underline{H} = \arg \underline{S} - \arg \underline{E} = \varphi_s - \varphi_e$ ⇝ déphasage de la sortie par rapport à l'entrée.

Espace 8

R

Le module de la fonction de transfert est le rapport entre les amplitudes des signaux de sortie et d'entrée ;
son argument est le déphasage du signal de sortie par rapport au signal d'entrée.

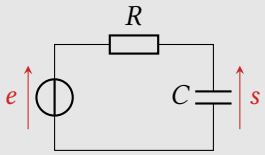
$$|\underline{H}| = \frac{S_\text{m}}{E_\text{m}} \qquad \text{et} \qquad \arg \underline{H} = \varphi_s - \varphi_e = \Delta\varphi_{s/e}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

- **Lien à l'équation différentielle**

Application 1 : Circuit RC



Considérons le filtre réalisé par le circuit RC série, en interprétant la tension aux bornes du condensateur comme étant le signal de sortie du filtre et la tension du générateur comme étant l'entrée.

1 - Établir l'équation différentielle du circuit reliant e et s.

2 - En travaillant en représentation complexe, établir la fonction de transfert $\underline{H}$.

3 - Retrouver l'équation différentielle à partir de la fonction de transfert.

Généralisation : comme l'équation différentielle et la fonction de transfert décrivent le même système physique, elles ne sont pas indépendantes l'une de l'autre.

L'équation différentielle du circuit et sa fonction de transfert
se déduisent l'une de l'autre par la correspondance

$$\times \mathrm{j}\omega \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

R

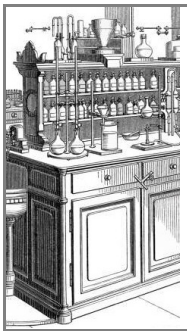
> ***Remarque :*** *L'équation différentielle ne fait intervenir que des dérivées, jamais des primitives. Il est donc nécessaire d'écrire la fonction de transfert comme un polynôme en $j\omega$ avant d'identifier, sans qu'il ne reste de division.*

> ***Remarque :*** *il existe aussi une correspondance avec la fonction de transfert dans le domaine de Laplace,*
>
> $$\times j\omega \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \quad \longleftrightarrow \quad \times p$$

L'ordre de la dérivée la plus élevée dans l'équation différentielle,
ou de façon équivalente la puissance de $j\omega$ la plus élevée dans la fonction de transfert,
est appelé **ordre** du filtre (ou plus largement du système).

R

II.C - Diagramme de Bode



Un peu d'histoire : *Hendrik Wade Bode (1905-1982) est un ingénieur et mathématicien américain ayant travaillé aux Bell Laboratories. Il a joué un rôle central dans le développement de la théorie fréquentielle des systèmes linéaires. Après avoir décroché un doctorat à 24 ans, ce qui est particulièrement précoce pour l'époque, c'est vers la fin des années 1930 qu'il a proposé les diagrammes qui portent son nom, outils graphiques essentiels pour l'analyse de la stabilité et de la robustesse des systèmes à rétroaction, dont l'utilisation s'est diffusée à partir des années 1940. Bode a aussi formulé le théorème intégral de Bode, établissant des limites fondamentales du filtrage et de l'amplification. Ses travaux ont structuré l'automatique moderne et les télécommunications.*

Le diagramme de Bode d'un filtre est une (double) représentation graphique
de sa fonction de transfert en fonction de la pulsation :

diagramme en gain : G_{dB} en fonction de ω diagramme en phase : $\arg \underline{H}$ en fonction de ω.

L'axe des pulsations est gradué en échelle logarithmique.

R

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

- **Gain en décibel**

R

On appelle **gain en décibel** la grandeur définie par

$$G_{\text{dB}}(\omega) = 20\log|\underline{H}(\omega)| \iff |\underline{H}(\omega)| = 10^{G_{\text{dB}}(\omega)/20}.$$

> ***Remarque :*** *Le gain en décibel est parfois appelé simplement « gain » ... mais le « gain » sans autre précision peut aussi désigner $|\underline{H}|$, selon le contexte.*

R

Signe du gain :

$G_{\text{dB}} < 0 \iff |\underline{H}| < 1$ donc le signal de sortie est atténué par rapport au signal d'entrée, de même $G_{\text{dB}} > 0$ signifie que le signal de sortie est amplifié par rapport au signal d'entrée.

Espace 9

Q

Ordres de grandeur :

G_{dB}	$\lvert\underline{H}\rvert$
−1 dB	0,9
−3 dB	$0{,}7 \simeq 1/\sqrt{2}$
−10 dB	$\simeq 0{,}3$
−20 dB	1/10
−40 dB	1/100

$\rightsquigarrow$ des faibles variations de gain en décibel peuvent se traduire par de très fortes modifications d'amplitude du signal !

- **Échelle logarithmique**

Les axes ne sont pas gradués de 1 en 1, mais de puissance de dix en puissance de dix. Lorsque deux nombres diffèrent d'un facteur 10, c'est-à-dire qu'ils sont distants d'une unité en échelle logarithmique, ils sont dits séparés d'une **décade**.

Q

$\rightsquigarrow$ *intérêt :* une échelle logarithmique permet de représenter simultanément des valeurs très faibles et très élevées, qui diffèrent de plusieurs ordres de grandeur.

II.D - Bande passante

R

On appelle **bande passante** d'un filtre la gamme de fréquences pour laquelle les signaux sont transmis.

Elle est définie conventionnellement par le critère

$$\omega \in \text{BP} \iff |\underline{H}(\omega)| > \frac{H_{\text{réf}}}{\sqrt{2}} \iff G_{\text{dB}}(\omega) > G_{\text{réf}} - 3\,\text{dB}\,.$$

Le gain de référence $G_{\text{réf}} = 20\log(H_{\text{réf}})$ dépend du filtre envisagé.

La/les limite(s) de la bande passante définissent la/les **pulsation(s) de coupure** du filtre.

> ***Remarque :*** *Compte tenu de la définition des pulsations de coupure, on parle parfois de « bande passante à −3 dB ».*

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

III - Exemples fondamentaux

III.A - Méthodes d'étude d'un filtre

- **Déterminer la nature du filtre par équivalence de dipôles**

Rappel : dipôles équivalents.
- ▹ Basse fréquence : condensateur $\Longleftrightarrow$ interrupteur ouvert ; bobine $\Longleftrightarrow$ fil ;
- ▹ Haute fréquence : condensateur $\Longleftrightarrow$ fil ; bobine $\Longleftrightarrow$ interrupteur ouvert.

Méthode :
1. Dessiner (au moins dans sa tête) deux schémas équivalents du filtre, en haute et basse fréquence ;
2. Déterminer $\underline{S}$ en fonction de $\underline{E}$ sur ces schémas ;
3. Si $\underline{S} = \underline{E}$ alors le signal est transmis pour la gamme de fréquence correspondante, si $\underline{S} = 0$ alors il est coupé.

- **Établir la fonction de transfert sous forme canonique**

Méthode :
1. Exprimer $\underline{H}$ en fonction des composants avec un pont diviseur ;
2. Multiplier le numérateur et le dénominateur par la quantité permettant de faire apparaître les 1 « aux bons endroits » ;
3. Identifier les paramètres de la forme canonique.

- **Tracer un diagramme de Bode**

Le tracé commence toujours par celui d'un diagramme asymptotique (= affine par morceaux) auquel on superpose l'allure du diagramme réel. Pour les diagrammes théoriques, il est fréquent d'utiliser une **pulsation réduite** en abscisse.

1. Étudier séparément les limites basse et haute fréquence ;
2. Pour chaque limite, **commencer** par calculer la fonction de transfert équivalente en ne conservant que les termes dominants du numérateur et du dénominateur ;
3. **Dans un second temps**, calculer le module et l'argument pour obtenir les équations des asymptotes ;
4. Pour un deuxième ordre, l'allure du diagramme réel est précisée en calculant explicitement la valeur exacte en $\omega = \omega_0$ (existence éventuelle d'une résonance).

Attention ! Exprimer le module et l'argument en toute généralité pour prendre des équivalents dans un second temps alourdit énormément les calculs : à ne pas faire ...

III.B - Filtre passe-bas du premier ordre

Application 2 : Filtre RC passe-bas

M

Le circuit RC étudié dans l'application 1 est un filtre passe-bas du premier ordre.

1 - En raisonnant par équivalence de dipôle, montrer que les signaux basse fréquence sont transmis par le filtre, au contraire des signaux haute fréquence.

2 - Identifier les paramètres H_0 et ω_c permettant d'écrire la fonction de transfert sous forme canonique

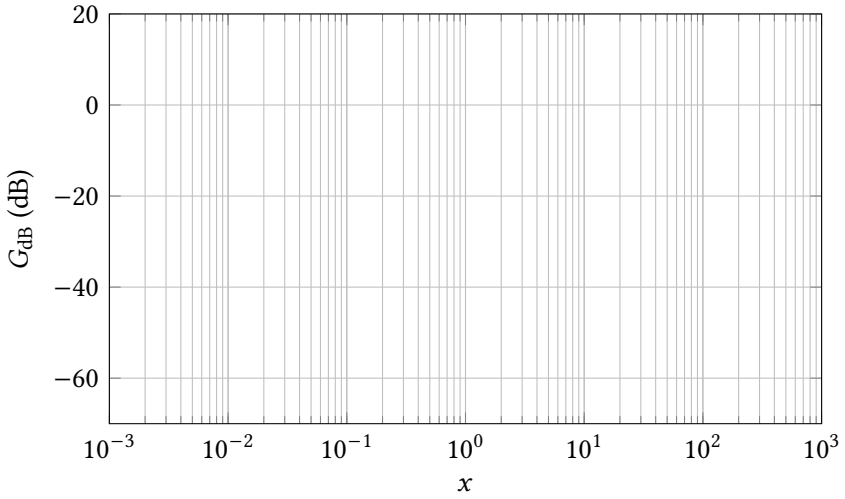
$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_c}}.$$

3 - Construire le diagramme de Bode en gain du filtre en fonction de $x = \omega/\omega_c$.

4 - Déterminer la bande passante du filtre et justifier la dénomination de « passe-bas ».

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr



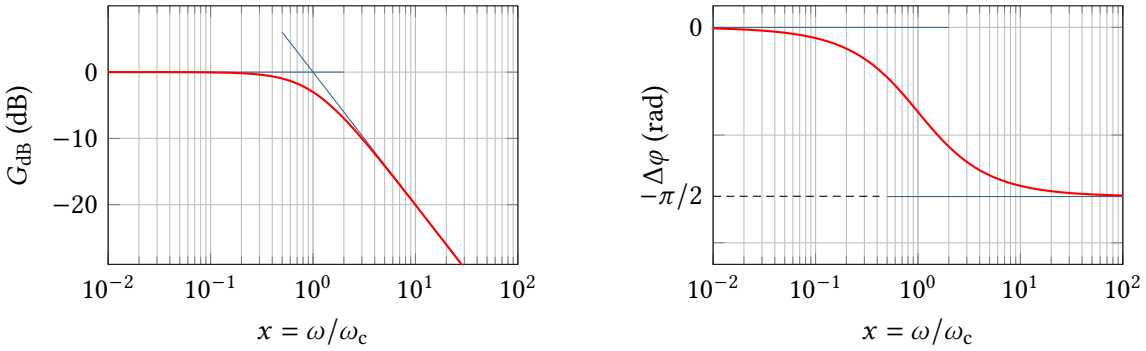
Généralisation :

R

La fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre a pour forme canonique

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{où} \begin{cases} \omega_c \text{ est la } \textbf{pulsation de coupure}. \\ H_0 \text{ est le } \textbf{gain statique}. \end{cases}$$

Diagramme de Bode pour $H_0 = 1$:



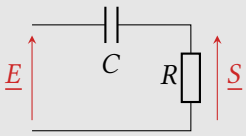
L'asymptote oblique en haute fréquence du diagramme en gain a une pente de −20 dB par décade.

Sa bande passante est l'intervalle $[0, \omega_c]$.

III.C - Filtre passe-haut du premier ordre

M

Application 3 : Filtre RC passe-haut



1 - Montrer qualitativement que le montage ci-contre permet de réaliser un filtre passe-haut.

2 - Établir sa fonction de transfert et l'écrire sous forme canonique,

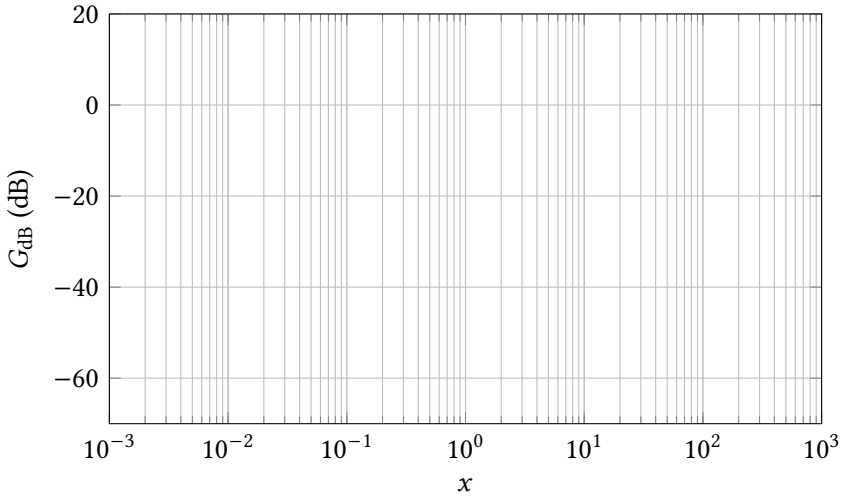
$$\underline{H}(\omega) = \frac{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_c} H_0}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_c}}.$$

3 - Construire le diagramme de Bode en gain du filtre en fonction de la pulsation réduite.

4 - Déterminer la bande passante du filtre.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr



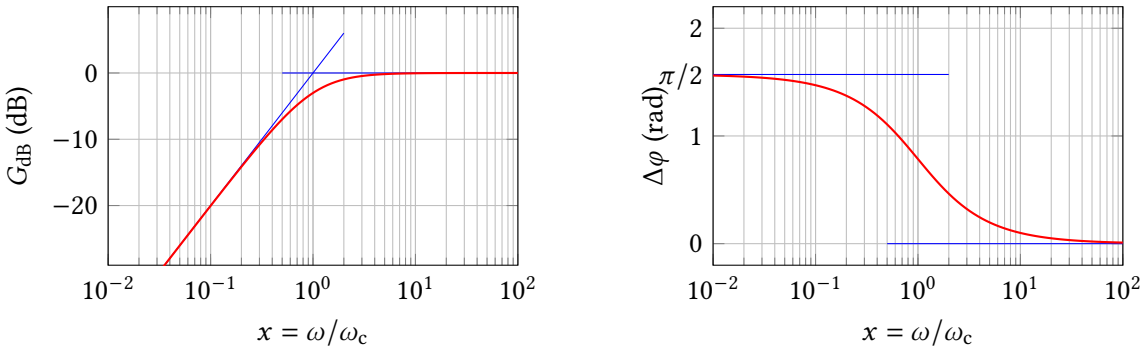
Généralisation :

La fonction de transfert d'un filtre passe-haut du premier ordre a pour forme canonique

$$\underline{H} = \frac{\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c} H_0}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{H_0}{1 - \mathrm{j}\frac{\omega_c}{\omega}}$$

où ω_c est la **pulsation de coupure**.

Diagramme de Bode pour $H_0 = 1$:

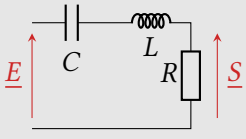


L'asymptote oblique en basse fréquence du diagramme en gain a une pente de 20 dB par décade.

Sa bande passante est l'intervalle $[\omega_c, +\infty[$.

III.D - Filtre passe-bande

Application 4 : Filtre RLC passe-bande



1 - Montrer qualitativement que le montage ci-contre permet de réaliser un filtre passe-bande.

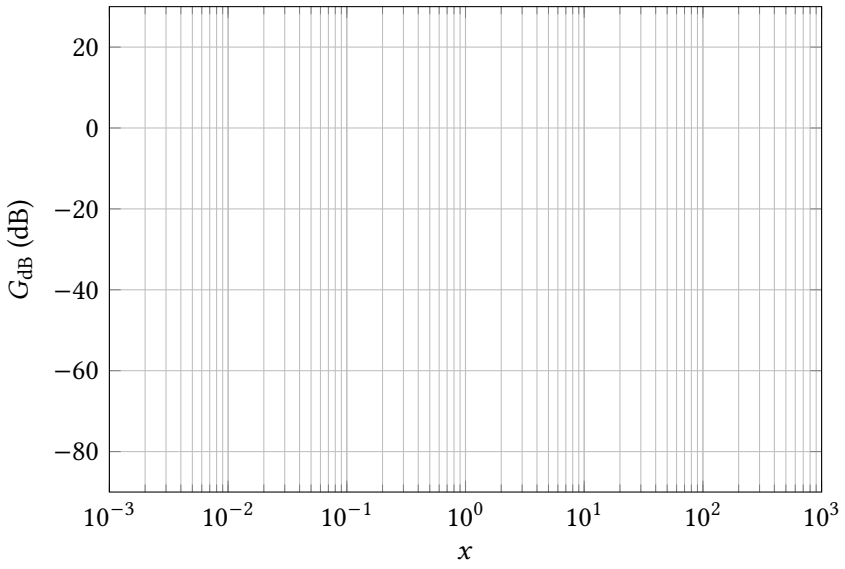
2 - Établir sa fonction de transfert et l'écrire sous forme canonique $\underline{H}(x) = \dfrac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$.

3 - Construire le diagramme de Bode en gain pour $Q = 0{,}1$ et $Q = 10$.

4 - Déterminer la bande passante du filtre. Comment choisir le facteur de qualité ?

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr



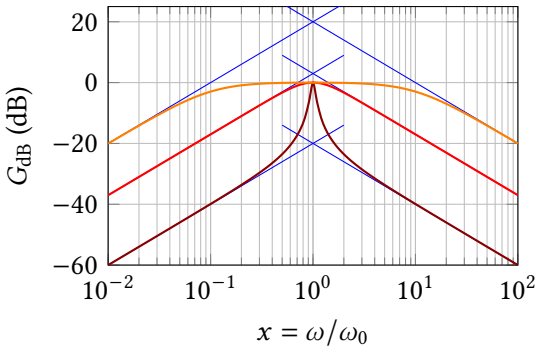
Généralisation :

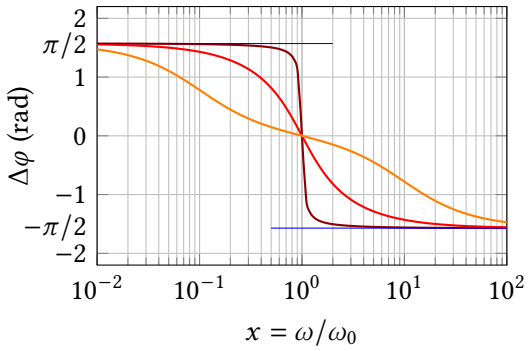
La fonction de transfert d'un filtre passe-bande du deuxième ordre a pour forme canonique

$$\underline{H}(x) = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \frac{\frac{\mathrm{j}x}{Q}H_0}{1 - x^2 + \frac{\mathrm{j}x}{Q}} \qquad \text{où } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

ω_0 est appelée **pulsation centrale**, **propre** ou **de résonance**.

Diagramme de Bode pour $H_0 = 1$:





Les deux asymptotes obliques en haute et basse fréquence ont pour pente ±20 dB par décade.

Plus le facteur de qualité est grand, plus la résonance est aigue, plus le filtre est sélectif : la bande passante du filtre a pour largeur

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}.$$

BY-NC-SA

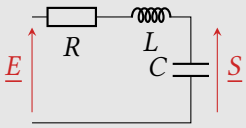
© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

III.E - Filtre passe-bas du deuxième ordre

Motivation : le filtre passe-bas du premier ordre permet d'atténuer les signaux de haute fréquence, mais l'atténuation n'est pas forcément très marquée, et donc pas toujours suffisante pour toutes les applications.

Plus un filtre est d'ordre élevé, plus les signaux coupés le sont fortement. Q

Application 5 : Filtre RLC passe-bas M



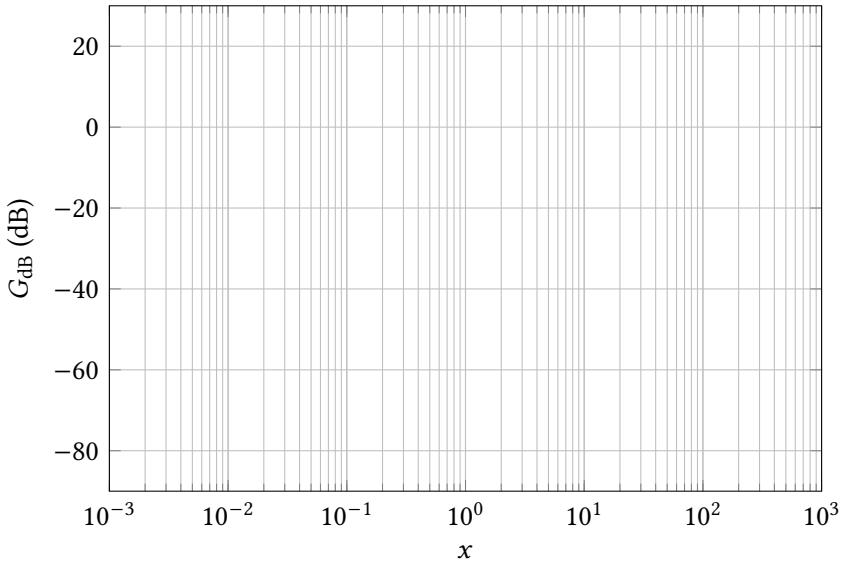
1 - Montrer qualitativement que le montage ci-contre permet de réaliser un filtre passe-bas.

On admet que sa fonction de transfert s'écrit sous forme canonique

$$\underline{H}(x) = \frac{1}{1 - x^2 + \dfrac{\mathrm{j}x}{Q}} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} \end{cases}$$

2 - Construire le diagramme de Bode en gain pour $Q = 0{,}1$, $Q = 1/\sqrt{2}$, $Q = 10$.

3 - Quelle est la valeur optimale du facteur de qualité pour le meilleur fonctionnement du filtre ?



BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

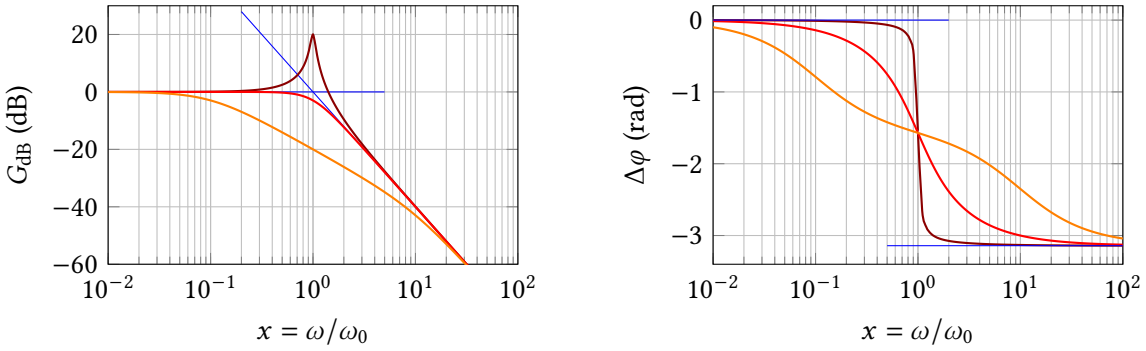
Généralisation :

Q

La fonction de transfert d'un filtre passe-bas du deuxième ordre a pour forme canonique

$$\underline{H}(x) = \frac{H_0}{1 - x^2 + \frac{\mathrm{j}x}{Q}} \qquad \text{où} \begin{cases} x = \dfrac{\omega}{\omega_0} \text{ avec } \omega_0 \text{ la } \textbf{pulsation propre}. \\ H_0 \text{ est le } \textbf{gain statique}. \end{cases}$$

Diagramme de Bode pour $H_0 = 1$:



L'asymptote oblique en haute fréquence du diagramme en gain a une pente de −40 dB par décade : les signaux haute fréquence sont dix fois plus atténués qu'avec un filtre du premier ordre.

La résonance altère le comportement passe-bas du filtre et doit être évitée.
Pour un comportement optimal, le facteur de qualité du filtre doit être choisi égal à $1/\sqrt{2}$.

Attention ! La pulsation de coupure dépend du facteur de qualité, et n'est généralement pas égale à ω_0 ... sauf si $Q = 1/\sqrt{2}$.

IV - Transformation d'un signal par un filtre

IV.A - Point de vue fréquentiel

- **Signal d'entrée sinusoïdal**

Le signal de sortie du filtre est sinusoïdal, de même pulsation que l'entrée (cf. recherche de solution particulière de l'équation différentielle dans le cours sur la résonance) : on a donc

$$e(t) = E_{\text{m}} \cos(\omega_e t + \varphi_e) \qquad \longmapsto \qquad s(t) = S_{\text{m}} \cos(\omega_e t + \varphi_s)$$

$\rightsquigarrow$ utilisation de la fonction de transfert harmonique.

$$\underline{S} = \underline{H}(\omega = \omega_e)\,\underline{E} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} S_{\text{m}} = \left|\underline{H}(\omega = \omega_e)\right| E_{\text{m}} \\ \varphi_s = \varphi_e + \arg \underline{H}(\omega = \omega_e) = \varphi_e + \Delta\varphi(\omega = \omega_e) \end{cases}$$

Espace 10

R

Le signal de sortie d'un filtre linéaire pour un signal d'entrée $e(t) = E_{\text{m}} \cos(\omega_e t + \varphi_e)$ s'écrit

$$s(t) = \left|\underline{H}(\omega = \omega_e)\right| E_{\text{m}} \cos\left(\omega_e t + \varphi_e + \arg \underline{H}(\omega = \omega_e)\right)$$

Le cas échéant, $|\underline{H}|$ et $\arg \underline{H}$ peuvent se déduire du diagramme de Bode :

$$\left|\underline{H}(\omega)\right| = 10^{G_{\text{dB}}(\omega)/20}.$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

- **Signal d'entrée quelconque**

Supposons maintenant le signal d'entrée $e(t)$ quelconque, et écrivons-le sous forme d'un développement en série de Fourier :

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} E_n \cos(n\omega t + \varphi_n) .$$

Le filtre étant linéaire, d'après le principe de superposition, le signal de sortie s est la somme des sorties associées à chaque harmonique du signal d'entrée :

$$\boxed{s(t) = \left|\underline{H}(0)\right| E_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\underline{H}(n\omega)\right| E_n \cos\left(n\omega t + \varphi_n + \arg \underline{H}(n\omega)\right) .}$$

Q

Attention ! Le module et l'argument de $\underline{H}$ sont à calculer pour chaque harmonique, avec sa propre pulsation. Il ne suffit pas de considérer une seule valeur à la pulsation du signal.

> ***Remarque :*** *Le résultat ci-dessus montre que le spectre des signaux d'entrée et de sortie d'un système linéaire contiennent exactement les mêmes harmoniques. Ce résultat peut être utilisé expérimentalement pour prouver la nature linéaire d'un système « inconnu ».*

- **Mise en pratique**

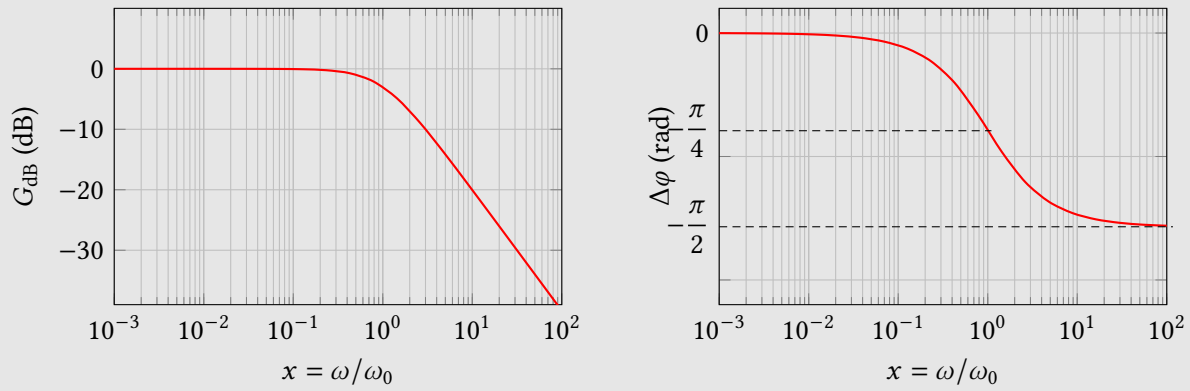
Application 6 : Construction du signal de sortie d'un filtre

M

Considérons le filtre dont le diagramme de Bode est donné ci-dessous. On envoie en entrée du filtre le signal

$$e(t) = E_0 \cos\left(\frac{\omega_0}{100} t - \frac{\pi}{6}\right) + E_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) + E_0 \cos\left(50\omega_0 t\right) .$$

Exprimer le signal de sortie.



IV.B - Point de vue temporel : comportement moyenneur, dérivateur, intégrateur

- **Filtre moyenneur**

Un filtre agit en **moyenneur** si le signal de sortie
est proportionnel à la valeur moyenne du signal d'entrée,

$$s(t) = H_0 \langle e \rangle = \text{cte} .$$

R

Réalisation pratique :

le filtre doit couper (= fortement atténuer) toutes les harmoniques, sauf la composante continue ⇝ utilisation d'un filtre passe-bas qui coupe toutes les harmoniques

Espace 11

BY-NC-SA © Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr
R

Un filtre passe-bas agit en moyenneur sur les signaux de fréquence f très supérieure à sa fréquence de coupure.

- **Filtre dérivateur**

R

Un filtre agit en **dérivateur** si le signal de sortie est proportionnel à la dérivée du signal d'entrée,

$$s(t) = \tau \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}.$$

Le paramètre τ est appelé **constante de temps** du dérivateur.

Traduction graphique dans un diagramme de Bode :

Fonction de transfert d'un filtre dérivateur idéal : $\underline{S} = \mathrm{j}\omega\tau\,\underline{E}$, soit $\underline{H} = \mathrm{j}\omega\tau$.
On en déduit donc $G_{\mathrm{dB}} = 20\log(\omega\tau)$ et $\Delta\varphi = \pi/2$

Espace 12

R

Si un filtre présente une pente de +20 dB/décade dans son diagramme de Bode en gain et un déphasage constant de $+\pi/2$ pour un certain domaine de fréquences, alors il agit en dérivateur sur ce domaine.

↝ un dérivateur parfait à toute fréquence n'existe pas, car cela supposerait un gain infini, c'est-à-dire une amplification infinie, en haute fréquence.

Réalisation pratique :

Où a-t-on déjà rencontré pareille fonction de transfert ? Passe-haut du premier ordre dans la limite des basses fréquences :

$$\underline{H} = \frac{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_c} H_0}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_c}} \sim \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c} H_0$$

ce qui est bien de la forme voulue avec $\tau = H_0/\omega_c$.

Espace 13

R

Un filtre passe-haut du premier ordre agit en dérivateur sur les signaux de fréquence f très inférieure à sa fréquence de coupure.

En plus d'être dérivé, le signal est fortement atténué.

Attention ! Un passe-haut d'ordre 2 n'agit pas en dérivateur, même en basse fréquence.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

- **Filtre intégrateur**

Un filtre agit en **intégrateur** si le signal de sortie est proportionnel à l'intégrale du signal d'entrée,

$$s(t) = \frac{1}{\tau}\int_0^t e(t)\mathrm{d}t \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\tau}e$$

Le paramètre τ est appelé **constante de temps** de l'intégrateur.

Traduction graphique dans un diagramme de Bode :

Fonction de transfert d'un filtre intégrateur idéal : $\underline{S} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega\tau}\,\underline{E}$, soit $\underline{H} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega\tau}$.
On en déduit donc $G_{\mathrm{dB}} = -20\log(\omega\tau)$ et $\Delta\varphi = -\pi/2$

Espace 14

Si un filtre présente une pente de −20 dB/décade dans son diagramme de Bode en gain
et un déphasage constant de $-\pi/2$
pour un certain domaine de fréquences, alors il agit en intégrateur sur ce domaine.

↝ un intégrateur parfait à toute fréquence n'existe pas, car cela supposerait un gain infini, c'est-à-dire une amplification infinie, en basse fréquence.

Réalisation pratique :

Où a-t-on déjà rencontré pareille fonction de transfert ? Passe-bas du premier ordre dans la limite des hautes fréquences :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1+\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}} \sim \frac{H_0}{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}}$$

ce qui est bien de la forme voulue avec $\tau = 1/H_0\omega_\mathrm{c}$.

Espace 15

Un filtre passe-bas du premier ordre agit en intégrateur sur les signaux de fréquence f
très supérieure à sa fréquence de coupure.

En plus d'être intégré, le signal est fortement atténué.

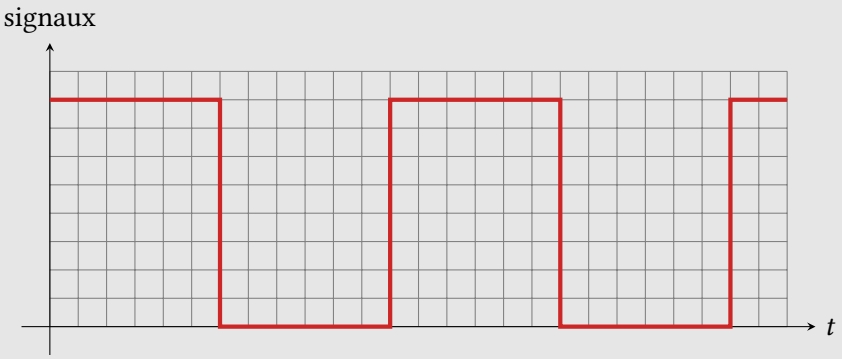
Attention ! Un passe-bas d'ordre 2 n'agit pas en dérivateur, même en basse fréquence.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Application 7 : Traitement d'un signal créneau

On envoie en entrée d'un filtre passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure 20 Hz le signal créneau représenté ci-dessous, de fréquence 1 kHz. Représenter qualitativement l'allure du signal de sortie.



V - Association de filtres

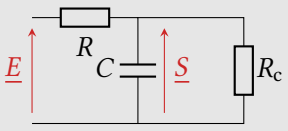
V.A - Influence de la charge sur le fonctionnement d'un filtre

On appelle **charge** d'un filtre la portion de circuit à laquelle est imposée la tension de sortie.
Elle est décrite par son impédance de charge $\underline{Z_c}$.

- **Cas d'une charge résistive**

M

Application 8 : Filtre sur une charge résistive



Considérons un filtre RC passe-bas du premier ordre branché sur une charge purement résistive R_c.

1 - Pourquoi l'expression de la fonction de transfert établie précédemment $\underline{H} = 1/(1 + jRC\omega)$ n'est-elle plus valable ?

2 - Établir l'expression de la fonction de transfert $\underline{H'}$ tenant compte de la présence de la charge. La charge résistive modifie-t-elle la nature du filtre ? sa pulsation de coupure ? son gain statique ?

3 - Comment est-il souhaitable de choisir la charge pour qu'elle n'affecte pas le comportement du filtre ?

Généralisation :

Q

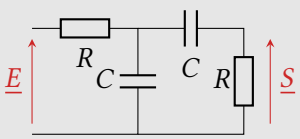
Les expressions des fonctions de transfert sont généralement établies en sortie ouverte, et ne sont plus valables lorsque le filtre est connecté à une charge.

Pour que la charge n'affecte pas le fonctionnement du filtre, le module de son impédance doit être le plus élevé possible.

- **Lorsque la charge est un second filtre**

M

Application 9 : Passe-bas + passe-haut = passe-bande ?



On souhaite réaliser un filtre passe-bande par association d'un filtre RC passe-bas et d'un filtre RC passe-haut. Établir la fonction de transfert de l'ensemble. Est-elle égale au produit des fonctions de transfert en sortie ouverte des deux filtres associés ?

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

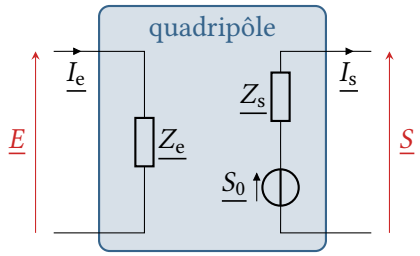
Généralisation :

La fonction de transfert d'un filtre composé d'une association de deux filtres n'est en général pas égale au produit des fonctions de transfert en sortie ouverte de chacun des filtres. (R)

> ***Remarque :*** *en revanche, le résultat est vrai si l'on considère la fonction de transfert du premier filtre* chargé par le deuxième *... mais le calcul n'est quasiment jamais posé de la sorte, puisqu'il est alors beaucoup plus efficace de déterminer directement la fonction de transfert de l'ensemble.*

V.B - Impédances d'entrée et de sortie

- **Définition**



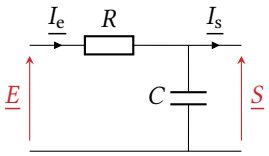
De façon très générale, un quadripôle linéaire peut se modéliser par le schéma équivalent ci-contre. (R)

- ▹ $\underline{Z_e}$ est appelée **impédance d'entrée** ;
- ▹ $\underline{Z_s}$ est appelée **impédance de sortie** ;
- ▹ la tension de sortie ouverte $\underline{S_0}$ est reliée à la tension d'entrée par la fonction de transfert en sortie ouverte : $\underline{S_0} = \underline{H}\,\underline{E}$.

⇝ lorsque $\underline{I_s} \neq 0$, alors $\underline{S} = \underline{S_0} - \underline{Z_s}\,\underline{I_s} \neq \underline{H}\,\underline{E}$.

> ***Remarque :*** *Même si cela ne se voit pas sur le schéma, l'impédance d'entrée du quadripôle peut dépendre de la charge connectée en sortie. Il s'agit d'une description équivalente (« tout se passe comme si »), pas d'un vrai câblage d'un vrai montage.*

Pour approfondir : pour mieux comprendre ces notions, illustrons-les sur l'exemple du filtre RC en calculant son impédance d'entrée et de sortie.



▹ **Impédance d'entrée en sortie ouverte.** Supposons $\underline{I_s} = 0$, c'est-à-dire que les dipôles R et C sont tous les deux traversés par le courant d'entrée $\underline{I_e}$. Par la loi des mailles et la définition de l'impédance complexe,

$$\underline{E} = \left(R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)\underline{I_e} \qquad \text{d'où} \qquad \underline{Z_e} = R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega},$$

puisque $\underline{Z_e} = \underline{E}/\underline{I_e}$ d'après le schéma équivalent ci-dessus.

▹ **Impédance de sortie.** Supposons maintenant $\underline{I_s} \neq 0$. D'après la loi des nœuds,

$$\underline{I_s} = \frac{\underline{E} - \underline{S}}{R} - \mathrm{j}C\omega\,\underline{S} = \frac{\underline{E} - (1 + \mathrm{j}RC\omega)\,\underline{S}}{R}.$$

Or par définition $\underline{E}$ et $\underline{S_0}$ sont reliés par la fonction de transfert en sortie ouverte du filtre,

$$\underline{H} = \frac{\underline{S_0}}{\underline{E}} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}RC\omega} \qquad \text{soit} \qquad \underline{E} = (1 + \mathrm{j}RC\omega)\underline{S_0}$$

En substituant dans l'expression du courant de sortie,

$$\underline{I_s} = \frac{1 + \mathrm{j}RC\omega}{R}\left(\underline{S_0} - \underline{S}\right)$$

et en identifiant avec le schéma de définition où la loi des mailles impose $\underline{S} = \underline{S_0} - \underline{Z_s}\,\underline{I_s}$, on en déduit

$$\underline{Z_s} = \frac{R}{1 + \mathrm{j}RC\omega}.$$

On constate que l'impédance de sortie n'est pas égale à l'impédance d'entrée ... ce qui ne devrait pas nous surprendre, puisque rien ne l'oblige. ■

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

- **Fonction de transfert d'une association de quadripôles**

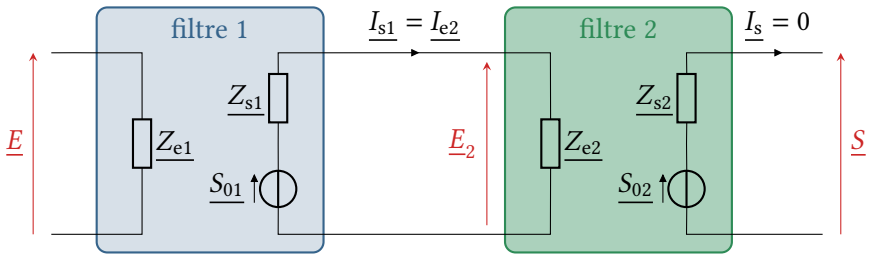


Figure 4 – Association en cascade de deux quadripôles.

Fonction de transfert en sortie ouverte de l'association des deux quadripôles :

Le filtre 2 est en sortie ouverte, donc

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{S}_{02}}{\underline{E}} = \frac{\underline{H}_2\,\underline{E}_2}{\underline{E}}\,.$$

Or par un pont diviseur de tension

$$\underline{E}_2 = \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{s1} + \underline{Z}_{e2}}\underline{S}_{01} = \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{s1} + \underline{Z}_{e2}}\underline{H}_1\,\underline{E}$$

d'où on déduit

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{s1} + \underline{Z}_{e2}}\,\underline{H}_1\,\underline{H}_2 = \frac{1}{1 + \dfrac{\underline{Z}_{s1}}{\underline{Z}_{e2}}}\underline{H}_1\,\underline{H}_2\,.$$

On peut approximer $\underline{H} = \underline{H}_1 \times \underline{H}_2$ si $|\underline{Z}_{s1}| \ll |\underline{Z}_{e2}|$.

Espace 16

R

Pour faciliter leur mise en cascade, on cherche à réaliser des quadripôles de grande impédance d'entrée (à la limite infinie) et de faible impédance de sortie (à la limite nulle).

Lorsque deux blocs qui s'enchaînent vérifient $|\underline{Z}_{s1}| \ll |\underline{Z}_{e2}|$, la fonction de transfert de l'association est égale au produit des fonctions de transfert des deux blocs.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Correction des applications de cours

Application 8 : Filtre sur une charge résistive

1 R et C ne forment plus un pont diviseur.

2 Méthode classique :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + R\underline{Y_{RC}}} = \frac{1}{1 + \dfrac{R}{R_c} + \mathrm{j}RC\omega} = \frac{\dfrac{R_c}{R + R_c}}{1 + \mathrm{j}\dfrac{R_c R}{R + R_c}C\omega}$$

Le filtre reste un passe-bas du premier ordre, mais le gain statique et la pulsation de coupure sont modifiées.

3 Il faut avoir $R/R_c \ll 1$.

Application 9 : Filtres RC en cascade

On trouve $\underline{H} = \dfrac{\mathrm{j}RC\omega}{1 - RC\omega^2 + 3\mathrm{j}RC\omega}$: le facteur de qualité vaut 1/3 alors qu'il vaudrait 1/2 si on pouvait multiplier les fonctions de transfert en sortie ouverte.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr