Lois de Newton

Chute libre avec et sans frottements

Exercice 2 : « Ça par exemple ! Quel bond ! » 1 | 2

▹ *Chute libre ;*
▹ *Équation de trajectoire.*

1 ▹ *Système :* le capitaine Haddock, modélisé par un point matériel M de masse m confondu avec son centre d'inertie.

▹ *Référentiel :* référentiel lunaire $\mathcal{R}$, supposé galiléen.

▹ *Schéma et repérage :* le repère est choisi tel que la vitesse initial du capitaine Haddock soit dans le plan Oxz, et qu'il se trouve à l'origine à l'instant initial.

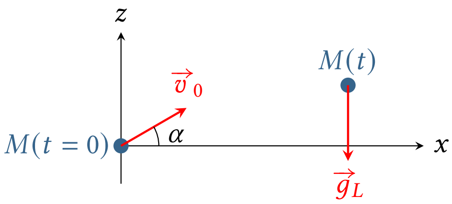

Figure 1 – Saut du capitaine Haddock sur la Lune.

▹ *Bilan des forces :* uniquement son poids $\vec{P} = m\vec{g}_L = -mg_L\vec{u}_z$.

▹ *Application du PFD :*

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{P} = m\vec{g}_L \qquad \text{soit} \qquad \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{g}_L$$

ce qui donne en projetant

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g_L \end{cases}$$

2 Il faut résoudre ces équations différentielles en les intégrant deux fois pour trouver les lois horaires et enfin en déduire l'équation de la trajectoire. Le calcul est identique à celui du cours.

Détermination de la vitesse :

▹ *Forme générale :*

$$\begin{cases} \dot{x} = A \\ \dot{z} = -g_L t + B \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad A, B \text{ deux constantes.}$$

▹ *Condition initiale :* la vitesse initiale s'écrit $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 = v_0 \cos\alpha\, \vec{u}_x + v_0 \sin\alpha\, \vec{u}_z$.

▹ *Détermination de la constante :*

$$\begin{cases} \dot{x}(0) \underset{\text{expr}}{\overset{}{=}} A \underset{\text{CI}}{=} v_0 \cos\alpha \\ \dot{z}(0) \underset{\text{expr}}{=} B \underset{\text{CI}}{=} v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

▹ *Conclusion :*

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos\alpha \\ \dot{z} = -g_L t + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

Détermination de la position :

▹ *Forme générale :*

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos\alpha)t + A' \\ z = -\dfrac{1}{2} g_L t^2 + (v_0 \sin\alpha)t + B' \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad A', B' \text{ deux constantes.}$$

▹ *Condition initiale :* le capitaine Haddock se trouve en O à l'instant $t = 0$.

▹ *Détermination de la constante :*

$$\begin{cases} x(0) \underset{\text{expr}}{\overset{\uparrow}{=}} A' \underset{\text{CI}}{\overset{\uparrow}{=}} 0 \\ z(0) \underset{\text{expr}}{\overset{\uparrow}{=}} B' \underset{\text{CI}}{\overset{\uparrow}{=}} 0 \end{cases}$$

▹ *Conclusion :*

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos\alpha)t \\ z = -\dfrac{1}{2} g_L t^2 + (v_0 \sin\alpha)t \end{cases}$$

Détermination de la trajectoire : d'après la loi horaire en x,

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}\,.$$

En insérant ce résultat dans l'équation sur z, on trouve l'équation de la trajectoire

$$z = -\frac{1}{2} g_L \frac{x^2}{{v_0}^2 \cos^2\alpha} + v_0 \sin\alpha \,\frac{x}{v_0 \cos\alpha} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{z = -\frac{g_L}{2{v_0}^2 \cos^2\alpha} x^2 + (\tan\alpha) x}$$

3 La distance L parcourue par la capitaine Haddock en sautant est telle que $z(L) = 0$, c'est-à-dire

$$0 = L\left(-\frac{g_L}{2{v_0}^2 \cos^2\alpha} L + \tan\alpha\right)$$

Mathématiquement, $L = 0$ est solution, mais c'est bien sûr le point de départ du saut. La solution physiquement pertinente est donc telle que

$$-\frac{g_L}{2{v_0}^2 \cos^2\alpha} L + \tan\alpha = 0 \qquad \text{soit} \qquad L = \frac{2{v_0}^2 \cos^2\alpha \tan\alpha}{g_L} = \frac{2{v_0}^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g_L}$$

et finalement

$$\boxed{L = \frac{{v_0}^2 \sin 2\alpha}{g_L}}$$

4 La distance L' que le capitaine Haddock parcourrait sur Terre avec le même saut serait

$$L' = \frac{{v_0}^2 \sin 2\alpha}{g_T}$$

Ainsi,

$$\boxed{L = \frac{g_T}{g_L} L' = 6L' = 9\,\text{m}\,.}$$

Exercice 3 : Viscosimètre à chute de bille

1 | 2 |

▹ *Force de frottement fluide linéaire.*

1 Par homogénéité de la loi de force,

$$[f] = [6\pi] \times [\eta] \times [R] \times [v] \qquad \text{soit} \qquad [\eta] = \frac{[f]}{[6\pi] \times [R] \times [v]}$$

D'après le PFD,

$$[f] = [m][a] = \mathrm{kg} \times \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$$

donc

$$[\eta] = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}}{1 \times \mathrm{m} \times \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{[\eta] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-1}}$$

2 La bille étant de rayon R, son poids vaut $\vec{P} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_\mathrm{a} \vec{g}$, et comme elle est complètement immergée la poussée d'Archimède s'exerçant sur la bille est $\vec{\Pi} = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_\mathrm{h} \vec{g}$. Ainsi, la force résultante de la poussée d'Archimède et du poids s'écrit

$$\boxed{\vec{F} = \vec{P} + \vec{\Pi} = \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_\mathrm{a} - \rho_\mathrm{h}) \vec{g}}$$

ce qui donne un poids apparent de la forme indiquée par l'énoncé.

3 • **Système :** bille ;

• **Référentiel galiléen :** terrestre ;

• **Repérage :** la bille descend et le mouvement est unidimensionnel, on prend donc un axe (Oz) vertical vers le bas, d'où

$$\overrightarrow{OM} = z\,\vec{e}_z \qquad \vec{v} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z = v\,\vec{e}_z \qquad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_z = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z\,.$$

• **Bilan des forces :**

▹ poids et poussée d'Archimède de résultante

$$\vec{F} = \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_\mathrm{a} - \rho_\mathrm{h}) \vec{g} = \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_\mathrm{a} - \rho_\mathrm{h}) g\,\vec{e}_z\,,$$

▹ force de Stokes

$$\vec{f} = -6\pi\eta R v\,\vec{e}_z\,.$$

• **PFD :**

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} + \vec{f} = \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_\mathrm{a} - \rho_\mathrm{h}) \vec{g} - 6\pi\,\eta\,R\,\vec{v}$$

et en exprimant la masse et en projetant

$$\boxed{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_\mathrm{a} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_\mathrm{a} - \rho_\mathrm{h}) g - 6\pi\,\eta\,R\,v}$$

4 Par définition, lorsque la vitesse limite v_lim est atteinte, la vitesse de bille demeure constante, donc

$$0 = \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_\mathrm{a} - \rho_\mathrm{h}) g - 6\pi\,\eta\,R\,v_\mathrm{lim} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_\mathrm{lim} = \frac{2\,R^2\,(\rho_\mathrm{a} - \rho_\mathrm{h})\,g}{9\eta}}$$

Le temps caractéristique pour l'atteindre s'obtient en écrivant l'équation différentielle sous forme canonique,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{9\eta}{2R^2\rho_\mathrm{a}} v = \frac{\rho_\mathrm{a} - \rho_\mathrm{h}}{\rho_\mathrm{a}} g$$

On identifie alors

$$\boxed{\tau = \frac{2R^2\rho_\mathrm{a}}{9\eta}}$$

La distance pour que cette vitesse limite soit atteinte est de l'ordre de $\delta = v_\mathrm{lim}\tau$, tout en étant inférieure : ce serait la distance parcourue pendant τ à la vitesse v_lim, mais la bille démarre plus lentement, et parcourt donc forcément moins de distance pendant la durée τ. Ainsi,

$$\boxed{\delta = \frac{4\,R^4\,\rho_\mathrm{a}\,(\rho_\mathrm{a}-\rho_\mathrm{h})\,g}{81\eta^2}}$$

> *En toute rigueur, pour atteindre* vraiment *la vitesse limite il faudrait un temps de chute de 5τ ou 7τ, mais nous verrons dans la suite de l'exercice que ce n'est pas crucial et que cet ordre de grandeur assez approximatif nous permet de conclure.*

5 Supposons la vitesse limite atteinte. Elle vaut alors

$$v_\mathrm{lim} = \frac{L}{\Delta t} = 1{,}40 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

Ainsi,

$$\boxed{\eta = \frac{2\,R^2\,(\rho_\mathrm{a}-\rho_\mathrm{h})\,g}{9\,v_\mathrm{lim}} = 1{,}07\,\mathrm{kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}}}$$

6 Pour confirmer que la vitesse mesurée est bien la vitesse limite, il faut que la profondeur $h = 5$ cm du premier repère soit supérieure à la distance δ définie précédemment. À partir de la valeur de viscosité mesurée, on estime

$$\delta = 2{,}8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m} \ll h\,.$$

Compte tenu de la valeur de δ, la bille atteint en fait sa vitesse limite presque dès le début de la chute : la durée du régime transitoire est très courte. Pour s'en assurer expérimentalement, on peut par exemple diviser en deux ou trois l'intervalle de longueur L et s'assurer que la bille met le même temps à parcourir chaque tronçon : c'est le signe qu'elle n'accélère plus.

Statique

Exercice 4 : Pendule électrostatique 1 | 2

- *Force de Coulomb ;*
- *Force de tension d'un fil ;*
- *Système à l'équilibre.*

- **Système :** balle de droite sur le schéma ;
- **Référentiel galiléen :** terrestre ;
- **Repérage :** on utilise un repère cartésien, le dispositif étant à l'équilibre la vitesse et l'accélération sont nulles.
- **Bilan des forces :** la balle subit
  - son poids
$$\overrightarrow{P} = mg\,\overrightarrow{e}_z$$
  - la force de tension du fil,
$$\overrightarrow{T} = -T\sin\theta\,\overrightarrow{e}_x - T\cos\theta\,\overrightarrow{e}_z$$
  - la force de Coulomb,
$$\overrightarrow{F}_\mathrm{C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2a)^2}\,\overrightarrow{e}_x = \frac{1}{16\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{\ell^2\sin^2\theta}\,\overrightarrow{e}_x$$

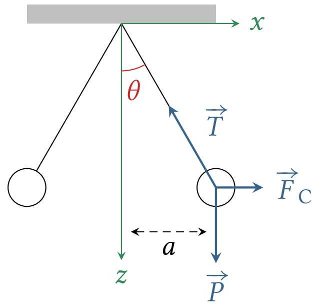

Figure 2 – Pendule électrostatique.

- **Condition d'équilibre :** le système étant à l'équilibre,

$$\vec{T} + \vec{F}_C + \vec{P} = \vec{0} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} -T\sin\theta + \dfrac{1}{16\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{\ell^2\sin^2\theta} = 0 \\ -T\cos\theta + mg = 0 \end{cases}$$

De la projection sur $\vec{e}_z$ on déduit

$$T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

et en injectant dans la projection sur $\vec{e}_x$ il vient

$$-\frac{mg}{\cos\theta}\sin\theta + \frac{1}{16\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{\ell^2\sin^2\theta} = 0$$

d'où on déduit

$$\boxed{q = \sqrt{16\pi\varepsilon_0\,\ell^2\,mg\,\tan\theta\sin^2\theta} = 3\cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}\,.}$$

Exercice 5 : Poulies à l'équilibre 2 | 2 |

- *Force de tension d'un fil ;*
- *Système composé ;*
- *Système à l'équilibre.*

Le système étant composé de plusieurs morceaux, il va falloir les étudier les uns après les autres. Par symétrie, les deux masses m_1 subissent exactement les mêmes forces.

- **Étude d'une masse m_1 :** elle est soumise à son poids et à la tension du fil, soit

$$m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = \vec{0} \qquad \text{d'où} \qquad T_1 = ||\vec{T}_1|| = m_1 g\,.$$

- **Étude de la masse m_2 :** de même,

$$m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = \vec{0} \qquad \text{d'où} \qquad T_2 = ||\vec{T}_2|| = m_2 g\,.$$

- **Étude du point de jonction :** Notons $\vec{T}'$ les forces de tension des fils au niveau du point de jonction. Ce point étant sans masse, il ne ressent pas le poids, et comme il est immobile,

$$\vec{T}'_2 + \vec{T}'_{1g} + \vec{T}'_{1d} = \vec{0}$$

et en projetant sur la verticale ascendante

$$-T_2 + T_1\sin\theta + T_1\sin\theta = 0 \qquad \text{soit} \qquad -m_2 g + 2m_1 g\sin\theta = 0$$

et finalement

$$\boxed{\theta = \arcsin\frac{m_2}{2m_1}\,.}$$

D’autres mouvements

Exercice 6 : Ascenseur

1 | 1 |

▷ *Force de tension d’un fil.*

Le système étudié est la cabine d’ascenseur, en mouvement dans le référentiel terrestre, considéré galiléen. La cabine est soumise son poids $\overrightarrow{P}$, vertical et vers le bas, et à la tension du câble $\overrightarrow{T}$, verticale et vers le haut. D’après la loi de la quantité de mouvement,

$$m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{T}$$

ce qui donne en projection sur un axe vertical orienté vers le haut

$$ma = -mg + T$$

donc

$$\boxed{T = m(a+g)}$$

1 Numériquement,

$$\boxed{T = 1{,}5 \cdot 10^4\,\mathrm{N}}$$

2 Une fois la vitesse constante atteinte, l’accélération de la cabine d’ascenseur est nulle, donc

$$\boxed{T = mg = 1{,}3 \cdot 10^4\,\mathrm{N}}$$

Cet exercice est important de par sa conclusion :

> La force de tension d’un fil n’est pas toujours égale au poids de la masse qui y est suspendue !
> Ce n’est le cas que s’il n’y a pas d’accélération.

Exercice 7 : Ballon sonde

2 | 2

▷ *Équation de trajectoire.*

1 D’après l’énoncé, $v_z = v_0$ constante. L’équation différentielle s’écrit donc

$$\boxed{\dot{z} = v_0\,.}$$

▷ *Forme générale des solutions :* par intégration,

$$z(t) = v_0 t + C \qquad \text{avec} \qquad C \text{ constante.}$$

▷ *Condition initiale :* le ballon est lâché du point O, donc $z(0) = 0$.

▷ *Détermination de la constante :*

$$z(0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} C \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} 0 \qquad \text{d’où} \qquad C = 0\,.$$

▷ *Conclusion :*

$$\boxed{z(t) = v_0 t\,.}$$

2 Par ailleurs, $v_x = z/\tau$ et en injectant l’expression de z déterminée à la question précédente, on aboutit à

$$\boxed{\dot{x} = \frac{v_0 t}{\tau}\,.}$$

▹ *Forme générale des solutions :* par intégration,

$$x(t) = \frac{v_0 t^2}{2\tau} + C' \qquad \text{avec} \qquad C' \text{ constante.}$$

▹ *Condition initiale :* le ballon est lâché du point O, donc $x(0) = 0$.

▹ *Détermination de la constante :*

$$x(0) \underset{\text{sol}}{\overset{\uparrow}{=}} C' \underset{\text{CI}}{\overset{\uparrow}{=}} 0 \qquad \text{d'où} \qquad C' = 0\,.$$

▹ *Conclusion :*

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0 t^2}{2\tau}\,.}$$

3 Comme le ballon sonde est lâché depuis $x = 0$ et qu'à tout instant $v_x \geq 0$, alors $x(t) > 0$ pour tout t. En inversant la loi horaire sur x, on obtient

$$t = \sqrt{\frac{2\tau x}{v_0}}\,,$$

puis on remplace dans l'expression de z,

$$z(x) = v_0\sqrt{\frac{2\tau x}{v_0}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{z(x) = \sqrt{2 v_0 \tau\, x}\,.}$$

4 Voir figure 3. On utilise d'une part que $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire, d'autre part que v_z est constante. En chaque point où l'on souhaite tracer $\vec{v}$, on construit d'abord la composante verticale, qui est égale en tout point. On trace ensuite le vecteur tangent à la trajectoire qui a cette composante verticale.

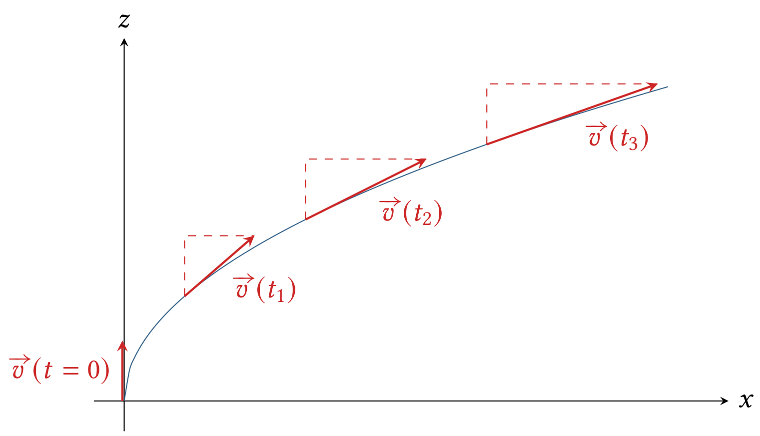

Figure 3 – Trajectoire du ballon sonde. Les traits pointillés indiquent la construction du vecteur vitesse.

5 Par dérivation des composantes de la vitesse, on trouve

$$\boxed{a_x = \ddot{x} = \frac{v_0}{\tau} \qquad \text{et} \qquad a_z = \ddot{z} = 0\,.}$$

Exercice 8 : Mesure d'un coefficient de frottement dynamique — 2 | 2 |

▹ *Force de contact entre solides ;*
▹ *Force de tension d'un fil ;*
▹ *Système composé.*

1 Le solide 1 est soumis à son poids $m\vec{g}$, à la réaction normale $-R_N\,\vec{e}_z$ et tangentielle $-R_T\,\vec{e}_x$ du support et à la force de tension du fil $F\,\vec{e}_x$. D'après le théorème de la résultante cinétique appliqué dans le référentiel du laboratoire galiléen,

$$m\ddot{x}\,\vec{e}_x = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} m\ddot{x} = F - T \\ 0 = mg - N \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \boxed{m\ddot{x} = F - \mu_\mathrm{d} mg\,.}$$

Le solide 2 est soumis à son poids $\alpha m\vec{g}$ et à la force de tension du fil $-F\,\vec{e}_z$. D'après le théorème de la résultante cinétique,

$$\alpha m\,\ddot{z}\,\vec{e}_z = \alpha m\vec{g} + \vec{F} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\alpha m\,\ddot{z} = \alpha mg - F\,.}$$

2 Le fil étant inextensible, $\ddot{x} = \ddot{z}$. Sommer les deux écritures du TRC conduit au résultat,

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{\alpha - \mu_\mathrm{d}}{1+\alpha} g}$$

3 Par double intégration, partant de $x = 0$ avec une vitesse nulle,

$$\dot{x} = \frac{\alpha - \mu_\mathrm{d}}{1+\alpha} gt \qquad \text{et} \qquad x(t) = \frac{\alpha - \mu_\mathrm{d}}{2(1+\alpha)} gt^2$$

La première phase se termine lorsque les deux solides ont avancé d'une distance H, donc à l'instant

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(1+\alpha)H}{(\alpha - \mu_\mathrm{d})g}}$$

La vitesse vaut alors

$$V_1 = \frac{\alpha - \mu_\mathrm{d}}{1+\alpha} gt_1 = \sqrt{\frac{2(\alpha - \mu_\mathrm{d})gH}{1+\alpha}}$$

4 Lors de la deuxième phase, le fil n'est plus tendu donc le solide 1 n'est soumis qu'à son poids et à la réaction du support. Ainsi,

$$\ddot{x} = -\mu_\mathrm{d} g\,.$$

À l'instant initial de cette seconde phase, on a désormais $\dot{x}(t=0) = V_1$ et $x(t=0) = H$, d'où

$$\dot{x}(t) = -\mu_\mathrm{d} gt + V_1 \qquad \text{et} \qquad x(t) = -\frac{1}{2}\mu_\mathrm{d} gt^2 + V_1 t + H\,.$$

5 Le solide s'arrête à l'instant t_2 tel que

$$\dot{x}(t_2) = 0 \qquad \text{soit} \qquad t_2 = \frac{V_1}{\mu_\mathrm{d} g}\,.$$

Or à cet instant, par définition, $x(t=t_2) = D$, d'où

$$\begin{aligned} x(t=t_2) = D &= -\frac{1}{2}\mu_\mathrm{d} g \left(\frac{V_1}{\mu_\mathrm{d} g}\right)^2 + V_1 \frac{V_1}{\mu_\mathrm{d} g} + H \\ &= \frac{{V_1}^2}{2\mu_\mathrm{d} g} + H \\ &= \frac{1}{\cancel{2}\mu_\mathrm{d}\cancel{g}} \frac{\cancel{2}(\alpha - \mu_\mathrm{d})\cancel{g}H}{1+\alpha} + H \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à isoler μ_d dans cette équation,

$$\begin{aligned} (1+\alpha)\mu_\mathrm{d} D &= (\alpha - \mu_\mathrm{d})H + \mu_\mathrm{d}(1+\alpha)H \\ (1+\alpha)\mu_\mathrm{d} D &= \alpha H + \mu_\mathrm{d}\alpha H \\ \Big((1+\alpha)D - \alpha H\Big)\mu_\mathrm{d} &= \alpha H \end{aligned}$$

et finalement

$$\boxed{\mu_\mathrm{d} = \frac{\alpha H}{(1+\alpha)D - \alpha H}\,.}$$

Exercice 9 : Halage d'une péniche 2 | 2

▹ *Force de frottement fluide quadratique ;*
▹ *Adimensionnalisation d'une équation différentielle.*

1 La barge est soumise à son poids $m\vec{g}$, la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$, la force $2\vec{F}_0$ exercée par les chevaux, et la force de traînée $\vec{f}$.

2 Le mouvement de la barge est horizontal, donc les forces verticales se compensent. Ainsi,

$$m\vec{g} + \vec{\Pi} = \vec{0} \qquad \text{soit} \qquad mg - \rho L\ell h g = 0$$

d'où on déduit

$$\boxed{h = \frac{m}{\rho\ell L} = 1{,}25\,\mathrm{m}\,.}$$

3 La surface frontale S s'exprime par

$$S = h\,\ell = \frac{m}{\rho L}$$

ce qui permet d'écrire la force de traînée sous la forme

$$\vec{f} = -\frac{m}{2L}C_x v^2\,\vec{e}_x\,.$$

Appliquons le théorème de la résultante cinétique à la barge dans le référentiel terrestre, supposé galiléen,

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \cancel{m\vec{g}} + \cancel{\vec{\Pi}} + 2\vec{F}_0 - \vec{f}$$

d'où on obtient en projection

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2F_0 - \frac{m}{2L}C_x v^2$$

ou en réorganisant

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{C_x}{2L}v^2 = \frac{2F_0}{m}\,.}$$

4 En régime permanent, la dérivée est nulle donc

$$\frac{C_x}{2L}v_\infty^{\,2} = \frac{2F_0}{m}\,.$$

On en déduit

$$\boxed{C_x = \frac{4F_0L}{mv_\infty^2} = 1{,}2\,.}$$

5 De même,

$$\boxed{v'_\infty = \sqrt{\frac{4F_0L'}{m'C_x}} \simeq 0{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \simeq 3\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}\,.}$$

6 L'équation différentielle peut s'écrire

$$\frac{2L}{C_x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v^2 = v_\infty^{\,2} \qquad \text{soit} \qquad \frac{2L}{C_x\,v_\infty^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2 = 1\,.$$

Pour que l'équation soit homogène, on en déduit que le préfacteur de la dérivée doit s'identifier au rapport τ/v_∞, où τ est le temps caractéristique cherché, soit

$$\frac{\tau}{v_\infty} = \frac{2L}{C_x\, v_\infty^2} \qquad \text{soit} \qquad \tau = \frac{2L}{C_x\, v_\infty} = \frac{2L}{C_x}\sqrt{\frac{mC_x}{4F_0L}}$$

qui se simplifie finalement en

$$\tau = \sqrt{\frac{mL}{F_0C_x}} = 81\ \mathrm{s}$$

Contrairement aux apparences, la péniche atteint sa vitesse de croisière en quelques minutes, ce qui n'est pas si lent.

> *L'équation différentielle peut être résolue de manière analytique, et les solutions s'écrivent sous la forme*
>
> $$v(t) = v_\infty \tanh(t/\tau)\,,$$
>
> *ce qui permet de légitimer l'interprétation de τ comme temps caractéristique du régime transitoire, même si l'équation n'est pas linéaire.*

Exercice 10 : Machine d'Atwood 3 | 1

- *Force de tension d'un fil ;*
- *Système composé.*

Menons l'étude dans le référentiel terrestre, considéré galiléen.

• Analyse qualitative

Les deux solides sont en mouvement de translation rectiligne vertical : il suffit donc d'introduire un axe z vertical, par exemple orienté vers le haut, pour repérer la position des deux solides.

Par ailleurs, les deux solides sont liés par une corde tendue inextensible : si M_1 (qui sur le schéma semble le plus lourd, on suppose donc $m_1 > m_2$) descend de Δz alors M_2 monte d'autant. Ils ont donc un vecteur vitesse de même norme, de même direction, mais de sens opposé. On comprend aussi qu'il en est de même pour les accélérations, on pose donc

$$\vec{a} = \vec{a}_1 = -\vec{a}_2 = -a\,\vec{e}_z$$

où a est la norme de l'accélération.

• Mise en équation

Appliquons maintenant le TRC au système composé du solide M_1 seul. Ce solide est soumis à son poids et à la tension de la corde $\vec{T}_1 = +T_1\vec{u}_z$ où T_1 désigne la norme. Ainsi,

$$m_1\,\vec{a} = m_1\,\vec{g} + \vec{T}_1 \qquad \text{soit} \qquad -m_1 a = -m_1 g + T_1$$

en projection sur l'axe z. De même, le solide M_2 est soumis à son poids et à la tension $\vec{T}_2 = +T_2\vec{u}_z$ de la corde, donc

$$m_2\,\vec{a}_2 = -m_2\,\vec{a} = m_2\,\vec{g} + \vec{T}_2 \qquad \text{soit} \qquad m_2 a = -m_2 g + T_2$$

en projetant.

> *Appliquer le TRC à un système composé des deux solides M_1 et M_2 serait une mauvaise idée : la loi de la quantité de mouvement s'applique au centre d'inertie, mais comme l'un des solides monte alors que l'autre descend, le mouvement du centre d'inertie ne renseigne en rien sur le mouvement de chacun des solides. Le même raisonnement vaut aussi pour les systèmes qui incluraient le fil et les poulies.*

On a à ce stade un système de deux équations ... mais à trois inconnues. Pour s'en sortir, il faut revenir à la modélisation du dispositif. L'énoncé indique que « la corde et la poulie transmettent parfaitement les efforts », ce qui revient à dire que la norme de la force de tension de la corde est la même tout au long de la corde et de part et d'autre de la poulie,

$$T_1 = T_2 = T\,.$$

Le système se simplifie donc en

$$\begin{cases} -m_1 a = -m_1 g + T \\ m_2 a = -m_2 g + T \end{cases}$$

En soustrayant les deux lignes, on peut isoler a,

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 - m_2)g \qquad \text{donc} \qquad \boxed{a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g\,.}$$

On remarque que $a < g$, la chute est donc bien ralentie par rapport au cas de la chute libre. En les multipliant par « l'autre » masse et en les sommant, on peut en déduire T,

$$0 = -2m_1 m_2 g + (m_1 + m_2)T \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g\,.}$$

Enfin, terminons par tester la vraisemblance de la solution. Premier point à vérifier, a et T sont des normes et sont bien toujours positives (rappelons qu'on a supposé $m_1 > m_2$). Deuxième test possible, on peut noter que si les deux masses sont égales alors elles restent en équilibre si elles sont initialement immobiles.

> *L'expression de T permet de constater que contrairement à l'intuition qu'on peut en avoir, $T \neq m_2 g$, ou autrement dit M_2 ne retient pas M_1 de tout son poids. Cela n'a rien d'un problème : une force de liaison est toujours inconnue a priori.*

Problème ouvert

Exercice 11 : Sieste en hamac 3 | 1

▹ *Problème ouvert.*

- **Modélisation**

Pour faire simple, je te modélise par un point matériel de masse m suspendu par des cordes de même longueur, supposées inextensibles et tendues. Une modélisation par un solide indéformable ne changerait qualitativement rien. Le dispositif est donc symétrique, voir figure 4. Pour minimiser le risque que les cordes cassent, il faut minimiser leur force de tension, c'est-à-dire qu'il faut trouver la valeur de α qui minimise la norme de $\vec{T}$ et $\vec{T'}$, que je note plus simplement T et T'.

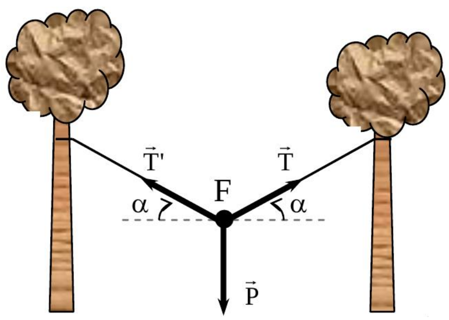

Figure 4 – Un point matériel en train de faire la sieste dans son hamac.

- **Mise en équation**

Tu es le système en « mouvement » dans le référentiel terrestre, qu'on peut considérer galiléen. On y fixe un repère (Oxy). Tu es soumis à

- ton poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u}_y$;
- la force de tension $\overrightarrow{T} = T(\cos\alpha\,\overrightarrow{u}_x + \sin\alpha\,\overrightarrow{u}_y)$;
- la force de tension $\overrightarrow{T'} = T'(-\cos\alpha\,\overrightarrow{u}_x + \sin\alpha\,\overrightarrow{u}_y)$;

Par application du théorème de la résultante cinétique, on a vectoriellement puis en projection

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{T'} = \overrightarrow{0} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} (T - T')\cos\alpha = 0 \\ -mg + (T + T')\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

On en déduit finalement que $T' = T$, ce dont on pouvait se douter vue la symétrie des cordes, et

$$2T\sin\alpha = mg \qquad \text{d'où} \qquad T = T' = \frac{mg}{2\sin\alpha}$$

La tension des cordes est d'autant plus faible que $\sin\alpha$ est grand, donc que α est proche de $\pi/2$.

- **Conclusion**

Il vaut mieux que tu laisses pendre le hamac pour être sûr de ne pas tomber … mais je ne sais pas si ce sera très favorable pour ta sieste :)