

Lois de Newton

-  Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
-  Difficulté technique et calculatoire ;
-  Exercice important.

Flasher ou cliquer
pour accéder
au corrigé



Se préparer

Applications de cours

Ces applications de cours sont des briques élémentaires des raisonnements à mener dans les exercices : les maîtriser est incontournable. Elles sont toutes traitées de manière exhaustive dans le cours.

M1.1 - Établir l'équation du mouvement d'une chute libre, et la résoudre pour établir les lois horaires $(x(t), z(t))$.
Les intégrations seront menées par séparation de variables.

M1.2 - Les équations horaires d'un mouvement de chute libre sont données par

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha t \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t \end{cases}$$

En déduire l'équation de la trajectoire, la portée et la flèche du tir.

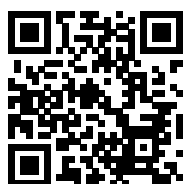
M1.3 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v d'un parachutiste chutant à la verticale dans l'air, en considérant une force de frottement quadratique. Adimensionner l'équation différentielle pour identifier la vitesse limite v_∞ et le temps caractéristique τ nécessaire pour atteindre cette vitesse.

M1.4 - Écrire un code Python permettant de résoudre par la méthode d'Euler explicite l'équation différentielle adimensionnée

$$\frac{dv}{dt} + v^2 = 1.$$

- Avant toute écriture de code, on commencera par établir la relation de récurrence pertinente.
- L'étudiant devra définir les paramètres de la simulation, et construire correctement les listes t et v .
- En revanche, je n'attends pas le code permettant le tracé de la solution.

Cahier d'Entraînement



Le *Cahier d'Entraînement* est un projet collaboratif mené par des enseignants de CPGE, proposant aux étudiants des entraînements leur permettant de travailler en autonomie sur des techniques et « réflexes » utiles dans les exercices, en particulier calculatoires. Il est librement téléchargeable en scannant ou cliquant sur le QR-code ci-contre.

→ pour ce chapitre : 10.1 à 10.5, 10.13 à 10.15, 11.4, 11.5, 11.8, 11.9, 11.13 à 11.18

Exercice 1 : Ski de vitesse



- Force de frottement fluide quadratique ;
- Force de contact entre solides ;
- Adimensionnalisation d'une équation différentielle.



Le ski de vitesse est une discipline sportive dont le but est d'atteindre la vitesse la plus élevée possible sur une piste rectiligne. Le record actuel de $255 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ a été battu par le Français Simon Billy en 2023 aux Arcs, sur une piste inclinée d'un angle $\alpha = 35^\circ$ par rapport à l'horizontale. Les frottements de l'air sont modélisés par une force quadratique $\vec{F}_{\text{air}} = -\beta v \vec{v}$. La masse du skieur et de son équipement est d'environ 90 kg.

La force de réaction $\vec{R}$ exercée par la neige sur le skieur se décompose en une composante normale $\vec{R}_N$, perpendiculaire à la piste, et une composante tangentielle $\vec{R}_T$ décrivant les frottements de la neige, dont les normes sont reliées par

$$\|\vec{R}_T\| = f \|\vec{R}_N\| \quad \text{avec} \quad f \simeq 0,05.$$

On raisonne sur un repère cartésien incliné $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, l'axe (Ox) étant colinéaire et de même sens que le mouvement du skieur.

- 1 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse du skieur.
- 2 - Déterminer le coefficient de frottement β .
- 3 - Écrire l'équation différentielle sous forme adimensionnée, en identifiant une vitesse caractéristique u et un temps caractéristique τ . Que représentent-ils physiquement ?

Correction — 1 - • Système : skieur de masse m ;

- **Référentiel galiléen :** terrestre ;
- **Repérage :** repérons la position du skieur par le milieu des skis (schéma figure 1), il glisse sur la piste donc $y = 0 = \text{cte}$.

$$\vec{OM} = x \vec{e}_x \quad \vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x = v \vec{e}_x \quad \vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_x.$$

- **Bilan des actions mécaniques :** le skieur subit (schéma figure 1)

- son poids : $\vec{P} = m \vec{g} = mg \sin \alpha \vec{e}_x - mg \cos \alpha \vec{e}_y$;
- la réaction normale de la neige : $\vec{R}_N = R_N \vec{e}_y$;
- la réaction tangentielle (= frottements) de la neige : $\vec{R}_T = -R_T \vec{e}_x$;
- les frottements de l'air : $\vec{F}_{\text{air}} = -\beta v^2 \vec{e}_x$.

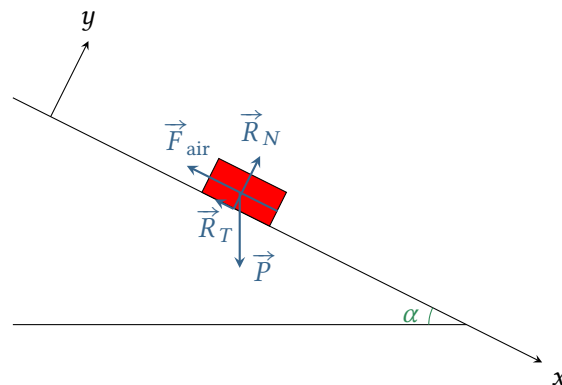


Figure 1 – Skieur de vitesse.

Question d'analyse 1 - Retrouver les projections du poids dans la base cartésienne.

Question d'analyse 2 - Comment connaît-on le sens de $\vec{R}_N$? et celui de $\vec{R}_T$?

• **PFD :**

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T + \vec{F}_{air} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} m \frac{dv}{dt} = mg \sin \alpha - R_T - \beta v^2 \\ 0 = -mg \cos \alpha + R_N \end{cases}$$

Question d'analyse 3 - Pourquoi la première ligne de l'accolade n'est-elle pas directement l'équation du mouvement cherchée ?

On déduit de la deuxième ligne

$$R_N = mg \cos \alpha \quad \text{donc} \quad R_T = f mg \cos \alpha$$

et ainsi

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \alpha - f mg \cos \alpha - \beta v^2 \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{\beta}{m} v^2 = g (\sin \alpha - f \cos \alpha)}.$$

Question d'analyse 4 - Pouvaient-on déterminer les expressions de R_N et R_T sans avoir à projeter le PFD ?

2 - Lorsque la vitesse maximale est atteinte, on a

$$\frac{\beta}{m} v_{max}^2 = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \quad \text{d'où} \quad \boxed{\beta = \frac{mg (\sin \alpha - f \cos \alpha)}{v_{max}^2}}.$$

Question d'analyse 5 - Justifier cette égalité.

Numériquement,

$$v_{max} = 70 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\beta = 70 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}}.$$

Question d'analyse 6 - Retrouver la valeur numérique de v_{max} (= faire la conversion à partir des $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$).

Question d'analyse 7 - Justifier l'unité de β .

3 - Posons $v = v^* u$ et $t = t^* \tau$, où v^* et t^* sont sans dimension. On a alors

$$\frac{dv}{dt} = \frac{u}{\tau} \frac{dv^*}{dt^*}$$

Question d'analyse 8 - Retrouver ce résultat.

On en déduit

$$\frac{u}{\tau} \frac{dv^*}{dt^*} + \frac{\beta}{m} u^2 (v^*)^2 = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \quad \text{soit} \quad \frac{dv^*}{dt^*} + \frac{\beta}{m} u \tau (v^*)^2 = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \frac{\tau}{u}$$

Pour que l'équation ne fasse plus apparaître de paramètres physiques, il faut avoir

$$\begin{cases} \frac{\beta}{m} u \tau = 1 \\ g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \frac{\tau}{u} = 1 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \frac{\beta}{m} \tau^2 g (\sin \alpha - f \cos \alpha) = 1 \\ \frac{\beta/m}{g (\sin \alpha - f \cos \alpha)} u^2 = 1 \end{cases}$$

ce qui permet d'identifier

$$\begin{cases} \tau = \sqrt{\frac{m}{\beta g (\sin \alpha - f \cos \alpha)}} \\ u = \sqrt{\frac{mg (\sin \alpha - f \cos \alpha)}{\beta}} \end{cases}$$

Question d'analyse 9 - Quelle opération sur le système permet d'aboutir à la deuxième écriture ? Elle est souvent intéressante, et peut mériter d'être retenue.

Chute libre avec et sans frottements

Exercice 2 : « Ça par exemple ! Quel bond ! »



- Chute libre ;
- Équation de trajectoire.

Dans l'album de Tintin *On a marché sur la Lune*, le capitaine Haddock s'étonne de pouvoir faire un bond beaucoup plus grand que sur la Terre. Le but de cet exercice est de déterminer la longueur de ce bond.



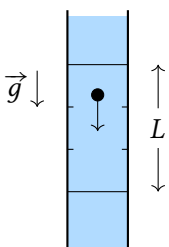
On assimile le mouvement du capitaine Haddock à celui de son centre de masse. Il saute depuis le sol lunaire avec une vitesse initiale v_0 faisant un angle $\alpha = 30^\circ$ avec le sol. On note g_L l'accélération de la pesanteur à la surface de la Lune, environ six fois plus faible que sur Terre.

- 1 - Établir l'équation du mouvement.
- 2 - En déduire l'équation de la trajectoire du centre d'inertie du capitaine Haddock.
- 3 - Exprimer la distance L qu'il a parcourue en sautant en fonction de v_0 , α et g_L .
- 4 - En supposant que le capitaine Haddock est capable de sauter 1,5 m sur Terre et en admettant qu'il n'est pas gêné par son scaphandre, déterminer numériquement la distance L .

Exercice 3 : Viscosimètre à chute de bille



- Force de frottement fluide linéaire.



Une méthode très simple à mettre en œuvre pour mesurer la viscosité η d'un fluide relativement visqueux consiste à lâcher une bille dans une éprouvette contenant le fluide et à mesurer sa vitesse limite. On s'intéresse dans cet exercice à une bille en acier de rayon $R = 1 \text{ mm}$ qui tombe dans une huile siliconée. L'huile exerce sur la bille une force de frottement fluide donnée par la loi de Stokes,

$$\vec{f} = -6\pi \eta R \vec{v}.$$

Données : masse volumique de l'acier $\rho_a = 7,83 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et de l'huile $\rho_h = 970 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

- 1 - Déterminer l'unité de la viscosité η dans le Système International.
- 2 - Montrer qu'en raison de la poussée d'Archimède tout se passe comme si le poids de la bille était modifié avec une masse volumique apparente $\rho = \rho_a - \rho_h$.
- 3 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la norme de la vitesse de la bille.
- 4 - Exprimer la vitesse limite atteinte par la bille et la durée caractéristique τ pour atteindre cette vitesse limite. En déduire un ordre de grandeur (surestimé) de la distance de chute nécessaire pour atteindre cette vitesse limite.

5 - On place deux repères distants de $L = 15,0$ cm dans l'éprouvette, le premier de ces repères étant situé environ 5 cm sous l'interface entre l'air et l'huile. On mesure une durée de chute $\Delta t = 10,7$ s. En déduire la viscosité de l'huile siliconée.

6 - Confirmer que supposer la vitesse limite atteinte lorsque la bille passe au niveau du premier repère est une hypothèse tout à fait légitime. Comment aurait-on pu s'en assurer expérimentalement ?

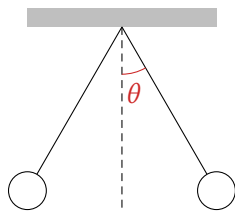
Statique

Exercice 4 : Pendule électrostatique

1 | 2



- Force de Coulomb ;
- Force de tension d'un fil ;
- Système à l'équilibre.



Deux petites boules de polystyrène de masse 1 g sont suspendues par des fils de longueur 20 cm attachés au même point. Chaque boule porte une charge électrique q . À l'équilibre les fils font un angle $2\theta = 20^\circ$.

Question : déterminer q .

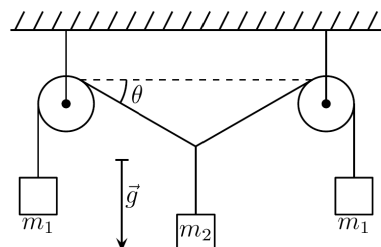
Donnée : $\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

Exercice 5 : Poulies à l'équilibre

2 | 2 | 2



- Force de tension d'un fil ;
- Système composé ;
- Système à l'équilibre.



Considérons le dispositif ci-contre. Les poulies et les fils sont idéaux, c'est-à-dire que la tension du fil conserve la même norme en tout point.

Question : déterminer l'angle θ à l'équilibre.

D'autres mouvements

Exercice 6 : Ascenseur

1 | 1 | 2

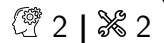


- Force de tension d'un fil.

Un ascenseur dont la cabine pèse 1300 kg monte du rez-de-chaussée au premier étage.

1 - Il démarre avec une accélération de $1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Que vaut la tension du câble qui le hisse ?

2 - Il atteint rapidement une vitesse constante de $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Déterminer à nouveau la tension du câble.

Exercice 7 : Ballon sonde

► Équation de trajectoire.

On modélise un ballon sonde par un point matériel de coordonnées $(x(t), z(t))$. Le ballon est lâché depuis le point O à l'instant $t = 0$. Il acquiert quasi-instantanément une vitesse verticale v_0 qui demeure constante tout au long du mouvement. Le vent lui communique une vitesse horizontale $v_x > 0$, orientée suivant l'axe (Ox) , et proportionnelle à son altitude $z > 0$ mesurée par rapport au niveau du sol : $v_x = z/\tau$ où $\tau > 0$ est homogène à un temps.

- 1 - Écrire et résoudre l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.
- 2 - Écrire et résoudre l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$, à exprimer en fonction de v_0 et τ .
- 3 - En déduire l'équation $z(x)$ de la trajectoire du ballon sonde.
- 4 - Représenter cette trajectoire, et représenter le vecteur vitesse du ballon sonde à trois instants différents.
- 5 - Exprimer les composantes de l'accélération du ballon sonde.

Exercice 8 : Mesure d'un coefficient de frottement dynamique

- Force de contact entre solides ;
 ► Force de tension d'un fil ;
 ► Système composé.

On s'intéresse dans cet exercice au frottement d'un solide sur son support : les lois de Coulomb du frottement solide stipulent que, lorsque le solide glisse, la force $\vec{R}$ réaction du support se décompose en une composante normale R_N et une composante tangentielle R_T de normes proportionnelles,

$$R_T = \mu_d R_N.$$

Le dispositif schématisé figure 2 permet de mesurer le coefficient de frottement dynamique μ_d .

Le solide 1 de masse m , est lié par un fil au solide 2 de masse αm . Le fil de longueur L est inextensible et sans masse, et passe par la gorge d'une poulie idéale, ce qui permet de considérer la norme de la tension du fil identique tout au long du fil. À l'instant initial, les deux solides sont immobiles et le fil tendu. Le solide 1 se trouve à l'abscisse $x(t=0) = 0$ et le solide 2 à une hauteur initiale H au dessus du sol. On lâche alors le solide 2, ce qui met en mouvement le solide 1. Le mouvement se décompose en deux phases, avant et après que le solide 2 ait touché le sol. Le solide 1 est d'abord entraîné par le solide 2, puis au cours de la seconde phase il ralentit progressivement et s'arrête après avoir parcouru une distance totale D .

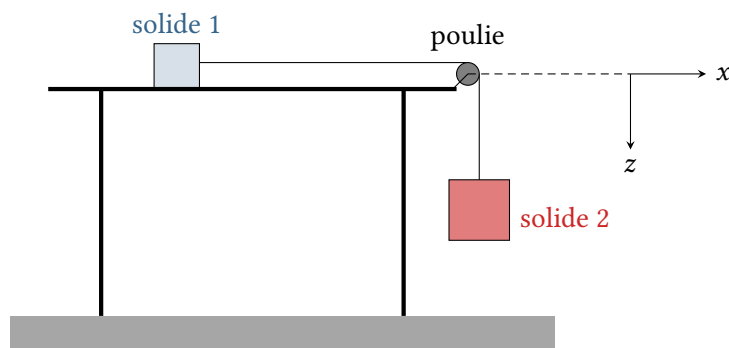


Figure 2 – Expérience de mesure du coefficient de frottement dynamique.

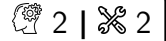
- 1 - Appliquer le principe fondamental de la dynamique aux deux solides indépendamment.
- 2 - En déduire qu'au cours de la première phase

$$\ddot{x} = \frac{\alpha - \mu_d}{1 + \alpha} g.$$

- 3 - Déterminer l'instant t_1 auquel se termine la première phase et la vitesse V_1 du solide 1 à cet instant.
- 4 - Reprendre l'étude et déterminer l'expression de $x(t)$ lors de la deuxième phase. Pour alléger les calculs, on redéfinira l'instant $t = 0$ comme celui auquel commence la seconde phase.
- 5 - En étudiant la condition d'arrêt du solide 1, montrer que

$$\mu_d = \frac{\alpha H}{(1 + \alpha)D - \alpha H}.$$

Exercice 9 : Halage d'une péniche



- ▷ Force de frottement fluide quadratique ;
- ▷ Adimensionnalisation d'une équation différentielle.



Le halage est une technique consistant à faire avancer les embarcations le long d'une rivière ou d'un canal au moyen d'une corde, tirée à la force des bras ou par des chevaux, marchant sur un chemin dégagé longeant la berge appelé « chemin de halage ». Elle a perduré en France pour le transport de marchandises jusque dans les années 1960 !

Considérons une barge fluviale de longueur $L = 30$ m, largeur $\ell = 4$ m, portant un chargement de masse $m = 150$ tonnes. Elle est tractée par deux chevaux, exerçant chacun une force $F_0 = 1500$ N. Après une phase transitoire, la barge atteint une vitesse constante $v_\infty = 1,0$ m · s⁻¹.

On suppose le canal rectiligne de direction (Ox) : la vitesse de la barge s'écrit donc $\vec{v} = v \vec{e}_x$. En première approche¹, on pourra considérer la force exercée par les chevaux colinéaire à la vitesse de l'embarcation. On modélise les frottements visqueux de l'eau par une force de traînée quadratique,

$$\vec{f} = -\frac{1}{2}\rho S C_x \|\vec{v}\| \vec{v},$$

où ρ est la masse volumique de l'eau, S la surface frontale du bateau, perpendiculaire à la direction de déplacement, et C_x le coefficient de traînée, dépendant uniquement de la forme de l'embarcation.

- 1 - Lister l'ensemble des forces subies par la barge et les représenter sur un schéma.
- 2 - Déterminer la hauteur h de la barge immergée sous l'eau.
- 3 - Montrer que la vitesse v vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dv}{dt} + \frac{C_x}{2L} v^2 = \frac{2F_0}{m}.$$

- 4 - Estimer le coefficient de traînée C_x de la barge.
- 5 - Les barges les plus grandes mesuraient 40 m de long pour 5 m de large et pouvaient transporter jusqu'à 300 tonnes de chargement. À quelle vitesse deux chevaux pouvaient-ils les tracter ?
- 6 - En écrivant l'équation différentielle sous forme adimensionnée, identifier un temps caractéristique et estimer la durée mise par la barge pour atteindre sa vitesse de croisière. Commenter.

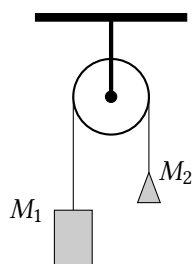
1. Attacher le câble de traction en un point judicieusement choisi du bateau permet de minimiser l'attraction vers la berge, qui devient simple à compenser au gouvernail, et justifie de la négliger ici.

Exercice 10 : Machine d'Atwood

3 | ✂ 1



- Force de tension d'un fil ;
- Système composé.



La machine d'Atwood est un appareil conçu pour l'étude de la chute libre par George Atwood (physicien anglais du XVIII^e siècle) et longtemps amélioré pour se rapprocher davantage d'une véritable chute. L'intérêt de l'invention est de contourner la brièveté du temps de parcours en diminuant l'accélération des masses et de permettre par là la mesure du temps écoulé de bien meilleure façon que les plans inclinés déjà essayés par Galilée.

La machine se compose de deux solides M_1 et M_2 , de masses respectives m_1 et m_2 , reliés par un fil et suspendus de part et d'autre d'une poulie. La poulie est fixée à un bâti. Pour simplifier l'étude, le fil et la poulie sont supposés idéaux et transmettent parfaitement les efforts.

Déterminer les accélérations des deux solides et la force exercée par le fil sur M_1 et M_2 .

Problème ouvert**Exercice 11 : Sieste en hamac**

3 | ✂ 1



- Problème ouvert.



Pensez à vos prochaines vacances ... Pour vous reposer après une année bien remplie vous êtes partis au soleil et vous souhaitez vous accorder une petite sieste dans un hamac tendu entre deux arbres. Malheureusement, les cordes d'attache du hamac sont très usées et vous n'aimeriez pas vous retrouver par terre.

Question : Pour minimiser les risques, vaut-il mieux attacher le hamac presque à l'horizontale ou au contraire le laisser pendre largement ?