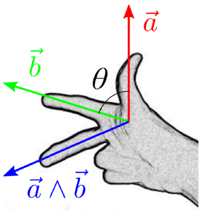
Particules chargées dans un champ électromagnétique

I - Produit vectoriel



- **Définition géométrique :** $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est le vecteur
  - ▹ de direction orthogonale au plan $(\vec{a}, \vec{b})$;
  - ▹ de sens direct, c'est-à-dire donné par la règle de la main droite ;
  - ▹ de norme $||\vec{a}||\,||\vec{b}||\,\sin\theta$ avec θ l'angle non-orienté formé par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

- **Propriétés importantes :**
  - ▹ $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$ si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires ;
  - ▹ anti-commutativité : $\vec{b} \wedge \vec{a} = -\vec{a} \wedge \vec{b}$.

- **Produit vectoriels des vecteurs de base :** $\vec{u}_i \wedge \vec{u}_j = \pm \vec{u}_k$ $(i \neq j)$ avec signe ⊕ si permutation circulaire, ⊖ sinon.

  $\rightsquigarrow$ p.ex. $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = +\vec{e}_z$; $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x = +\vec{e}_y$ mais $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_y = -\vec{e}_x$.

- **Coordonnées :**

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -(a_x b_z - a_z b_x) \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$$

II - Force de Lorentz

- **Charges-sources et charge-test :** les charges-sources créent les champs, la charge-test en subit les effets.

- **Force de Lorentz :**

$$\vec{F}_\mathrm{L} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} [\vec{E}] = \mathrm{V \cdot m^{-1}} \\ [\vec{B}] = \mathrm{T} \quad \text{(Tesla)} \end{cases}$$

Lorsque toutes les charges-sources sont fixes : force de Lorentz = résultante des forces de Coulomb.

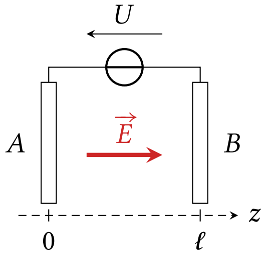
- **Ordres de grandeur :**
  - ▹ poids des particules microscopiques toujours négligeable ;
  - ▹ les composantes électrique et magnétique peuvent être du même ordre de grandeur.

- **La force de Lorentz magnétique ne travaille pas :** $(\vec{v} \wedge \vec{B}) \perp \vec{v}$ donc $\mathcal{P}(\vec{F}_\mathrm{magn}) = 0$.

- **La force de Lorentz est conservative :**
  - ▹ énergie potentielle électrostatique : $E_\mathrm{pe} = qV$;
  - ▹ V potentiel électrostatique, s'exprime en volt ;
  - ▹ conséquence : $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$.

III - Mouvement dans un champ électrostatique uniforme

- **Réalisation pratique :** deux électrodes planes soumises à une tension U.



$$\vec{E} = E\,\vec{e}_z = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\,\vec{e}_z \quad \rightsquigarrow \quad -\int_U^0 \mathrm{d}V = E\int_0^\ell \mathrm{d}z \quad \rightsquigarrow \quad E = \frac{U}{\ell}$$

- **Vitesse d'une charge accélérée par une tension :** conservation de l'énergie mécanique.

$$E_\mathrm{m} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{initial}}}{=} 0 + qV(A) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{final}}}{=} \frac{1}{2}mv^2 + qV(B) \qquad \text{d'où} \qquad v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$

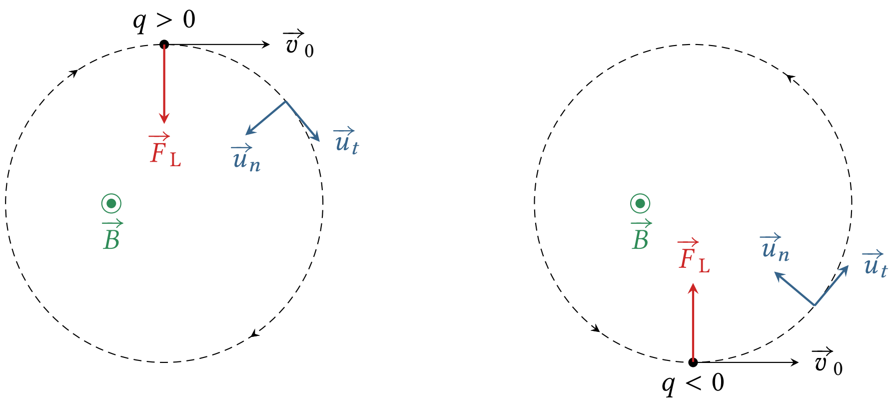
Attention ! La tension $U = V(A) - V(B)$ doit être imposée dans le sens tel que $qU > 0$ pour que la particule se déplace (cf. sens du champ pour que la force de Lorentz dirige la particule vers l'autre électrode).

- **Électron-volt :** $1\,\mathrm{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$ énergie cinétique d'un électron accéléré sous une tension de 1 V.

- **Trajectoire quelconque :** mouvement à vecteur accélération constant $\rightsquigarrow$ analogue chute libre $\rightsquigarrow$ trajectoire parabolique.

IV - Mouvement dans un champ magnétostatique uniforme

- **Allure de la trajectoire :**



- **Propriétés du mouvement :**
  - ▹ mouvement uniforme : $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_\mathrm{L} \cdot \vec{v} = 0$ donc $v = \text{cte}$;
  - ▹ mouvement plan : PFD projeté sur la direction de $\vec{B} \rightsquigarrow$ utilisation de la base de Frénet ;
  - ▹ le sens de parcours dépend du signe de q : se retrouve en dessinant la force de Lorentz ;
  - ▹ la trajectoire est circulaire : PFD projeté dans la base de Frénet avec $\vec{F}_\mathrm{L} = |q|\,vB\,\vec{u}_n$ toujours dirigée vers l'intérieur de la trajectoire

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \\[2mm] \dfrac{mv^2}{R_\mathrm{c}} = |q|\,vB \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad R_\mathrm{c} = \frac{mv}{|q|\,B} = \text{cte} \quad \text{(rayon cyclotron)}$$

  - ▹ période cyclotron : $T_\mathrm{c} = \dfrac{2\pi R_\mathrm{c}}{v} = \dfrac{2\pi m}{|q|\,B}$
  - ▹ vitesse angulaire = pulsation cyclotron $\omega_\mathrm{c} = \dfrac{2\pi}{T_\mathrm{c}} = \dfrac{|q|\,B}{m}$